Géométrie algorithmique, Correction : des exercices
30 novembre 2005

1 Delaunay et échantillonage de courbes

On a un réseau de courbes à peu près parallèles C_1, C_2, C_3...On suppose que la distance entre deux courbes est toujours supérieure à 6, le rayon de courbure de ces courbes est également supérieur à 6. Ces courbes sont échantillonnées, deux points successifs sur une courbe ont une distance inférieure à 1 (Figure 1).

On calcule la triangulation de Delaunay de l'ensemble de ces points.

1.1 Delaunay «reconstruit» les courbes

Question 1

Montrer que deux points successifs $p_{i,j}$ et $p_{i,j+1}$ sur une courbe C_i sont reliés dans la triangulation de Delaunay.

Correction : Le cercle Γ de centre $p_{i,j}$ de rayon 1 contient $p_{i,j+1}$ et ne contient pas de points sur d'autre courbes. C_i est coincé entre les cercles tangents à C_i en $p_{i,j}$ de rayon 6 donc si on regarde le cercle de diamètre $p_{i,j}p_{i,j+1}$ il ne peut pas contenir de $p_{i,j'}$ pour $j' < j$. L'argument symétrique en $p_{i,j+1}$ permet de conclure.

1.2 Degré dans Delaunay

Supposons dans cette question, pour simplifier, que nos courbes sont des droites parfaitement parallèles avec une distance de 6. On considère la triangulation de Delaunay des points sur C_1 et C_3 et des points $p_{2,k}$ pour $k \leq j$ mais pas les $p_{2,k}$ pour $k > j$.

Question 2

Donner une borne inférieure sur le degré de $p_{2,j}$ dans la triangulation (Figure 2).

Correction : Si on considère les points d'échantillonage sur C_1 d'abcisse tel que $x_{p_{2,j}} \leq x \leq x_{p_{2,j}} + 6$ les cercles tangents à C_1 à ces points et passant par $p_{2,j}$ ne touchent pas C_3, ils sont donc vide, il y a au moins 5 tels points. Le point sur C_1 d'abcisse immédiatement inférieure à $x_{p_{2,j}}$ convient également. On a de même des points sur C_3 plus $p_{2,j-1}$ soit un degré 13.

1.3 Insertion dans Delaunay

Supposons maintenant que les points sur chaque droite ont des écarts de longueur 1 exactement, que les points sur C_1 et C_3 soient déjà insérés dans la triangulation de Delaunay. Si on insère les points dans l'ordre $p_{2,1}$, $p_{2,2}$, $p_{2,3}$...$p_{2,k}$, donner une borne inférieure sur le nombre de triangles créés au cours de l'insertion de cette séquence de points.

Question 3

Proposer un autre ordre d'insertion, en donnant une estimation du nombre de triangle créés (et en essayant de minimiser ce nombre).

Correction : À peu près $13 \cdot k$. On insère les points de 12 en 12 à un coût de 22, puis on continue «dichotomiquement» : les milieux coutent 12, les milieux des milieux coutent 8 les derniers points coutent 7 et 6, soit un degré moyen de $\frac{1}{12}22 + \frac{1}{12}12 + \frac{2}{12}8 + \frac{4}{12}7 + \frac{4}{12}6 = 8.5$.

2 Recherche de plus proche voisin

Étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de n points dans le plan et un point du plan p on cherche à déterminer $NN_{\mathcal{S}}(p)$ le point de $\mathcal{S}$ le plus proche de p. On note $DT(\mathcal{S})$ la triangulation de Delaunay de $\mathcal{S}$.

w est initialisée avec un sommet quelconque de $DT(\mathcal{S})$.

```
N = un sommet de DT(S) ;
dmin = |pN| ;
Faire {
        v = N ;
        Pour chaque voisin w de v dans DT(S) {
                si ( dmin > |pw| ) {
                dmin = |pw| ;
                N = w ;
                }
        }
} tant que (N ≠ v) ;
return N ;
```

2.1

Démontrer que ce programme calcule le plus proche voisin de v.

Correction : On regarde le cercle C de centre p passant par N, supposons que ce cercle contiennent des points de $\mathcal{S}$ alors en considérant les cercle tangents à C en N à l'intérieur de C on va trouver un cercle vide passant par N et un de ces points. N a donc un voisin plus près de p que N ce voisin aurait donc du être considéré dans la boucle et remplacer N. suivant.

2.2

Quelle est la complexité dans le cas le pire de cet algorithme ? Donner un exemple réalisant cette pire complexité ($\forall n$).

Correction : $O(n)$. Exemple avec des points presque alignés.

2.3

Qu'apportent la variante ?
Le nombre d'exécutions de l'instruction $N = w$ est-il modifié ?
Dans quel sens ?
Est-ce que l'on calcule bien toujours le plus proche voisin ?
Commentaires ?

Correction : Variante : la condition d'arrêt est la même, il faut qu'aucun des voisins du dernier candidat n'ait été plus proche et donc inséré dans Q. Par contre au lieu de prendre toujours le meilleur w, on va s'arrêter au premier qui marche, donc on exécutera plus souvent l'instruction $N = w$, mais on regardera moins de points. Au total on peut espérer gagner. C'est vrai pour des points uniformément répartis.