De la géométrie algorithmique

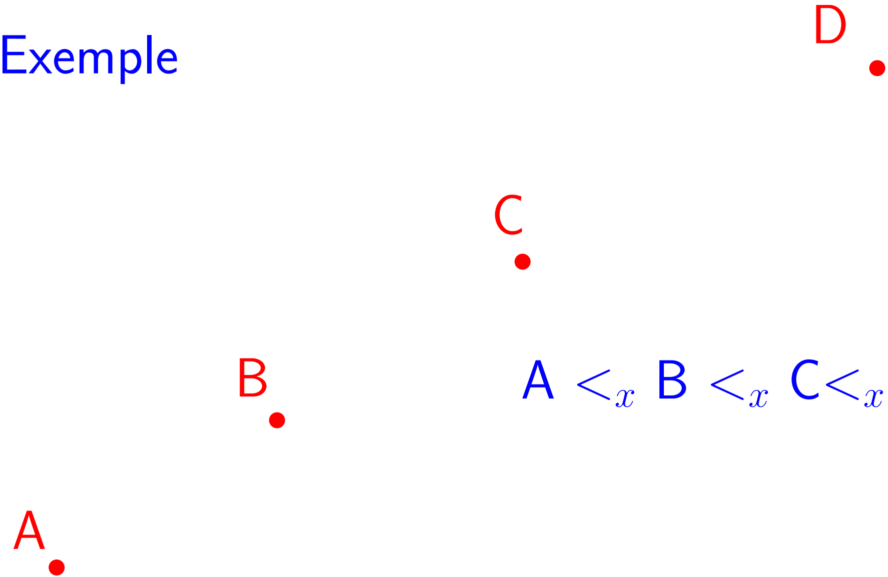
au calcul géométrique


De la géométrie algorithmique
au calcul géométrique
l'exemple de la
triangulation de Delaunay


De la géométrie algorithmique
au calcul géométrique
l'exemple de la
triangulation de Delaunay
Robustesse

Robustesse

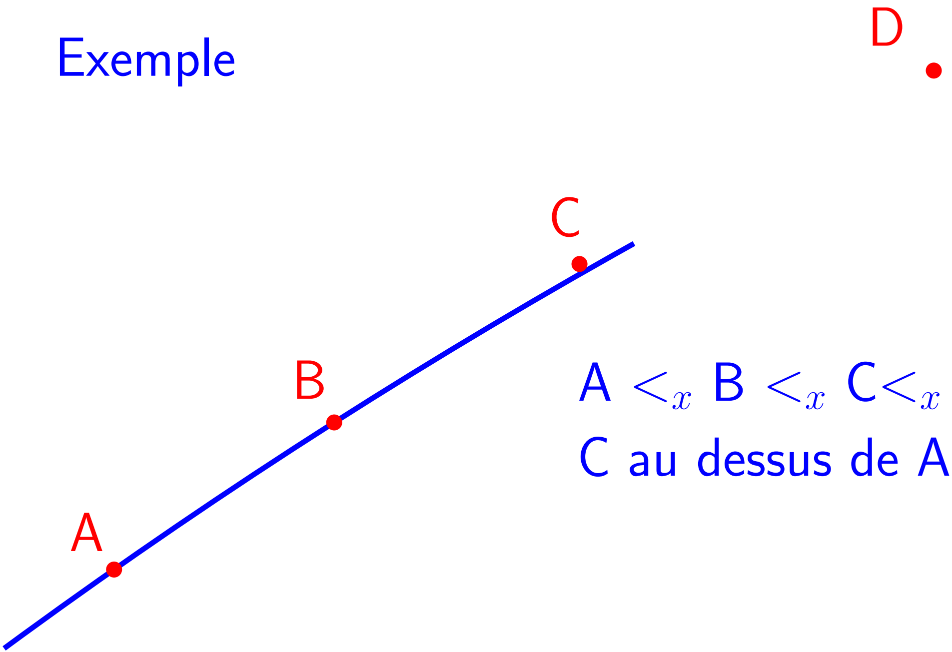
Exemple



$$\text{A} <_x \text{B} <_x \text{C} <_x \text{D}$$

Robustesse

Exemple

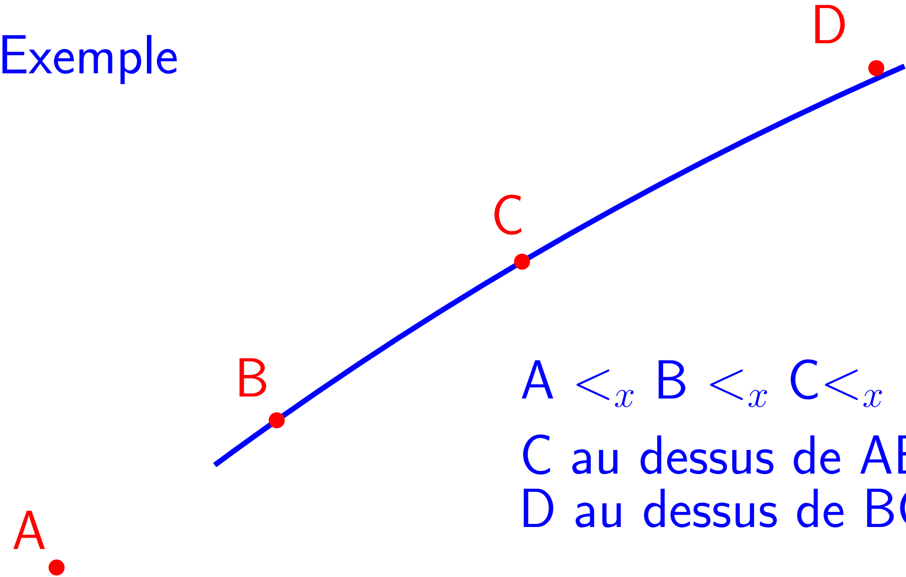


A $<_x$ B $<_x$ C$<_x$ D

C au dessus de AB

Robustesse

Exemple



$A <_x B <_x C <_x D$

C au dessus de AB

D au dessus de BC

Robustesse

Exemple

D

C

B

A

A $<_x$ B $<_x$ C$<_x$ D

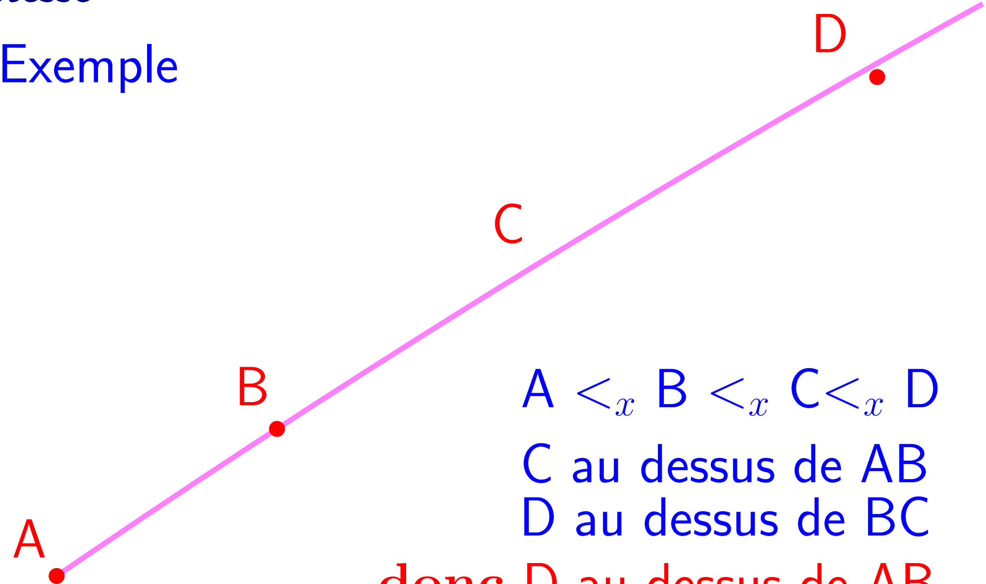
C au dessus de AB

D au dessus de BC

donc D au dessus de AB

Robustesse

Exemple



$A <_x B <_x C <_x D$

C au dessus de AB

D au dessus de BC

donc D au dessus de AB

mais l'évaluation des prédicats donne le contraire

Algorithmes géométriques

Modèle Real RAM

Algorithmes géométriques

Modèle Real RAM

On sait calculer avec des réels

Algorithmes géométriques

Modèle Real RAM

On sait calculer avec des réels ?

float, double

`float, double`

c'est pas des réels

`float, double`

c'est pas des réels

erreurs d'arrondi

`float, double`

c'est pas des réels

erreurs d'arrondi

Problème

`float, double`

c'est pas des réels

erreurs d'arrondi

Problème

$\neq$ Inexactitudes

`float, double`

c'est pas des réels

erreurs d'arrondi

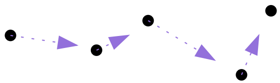
Problème

$\neq$ Inexactitudes

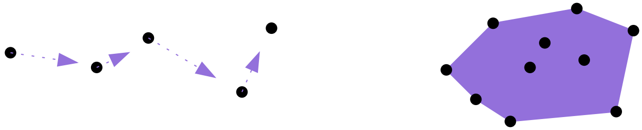
$=$ Incohérences

Résultat combinatoire

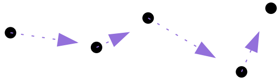
Résultat combinatoire

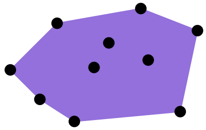


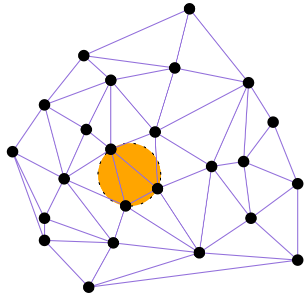
Résultat combinatoire



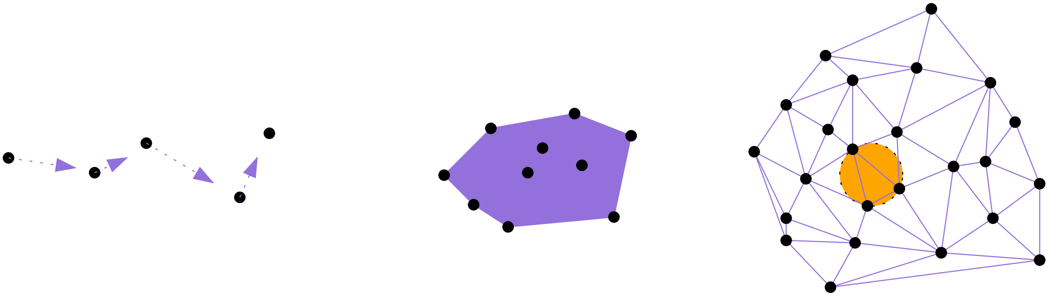
Résultat combinatoire





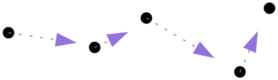


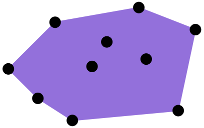
Résultat combinatoire

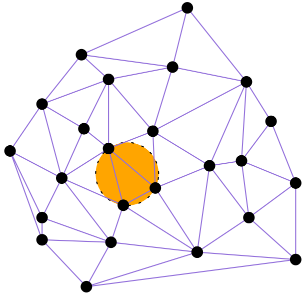


Prédicats

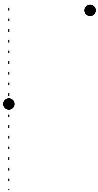
Résultat combinatoire





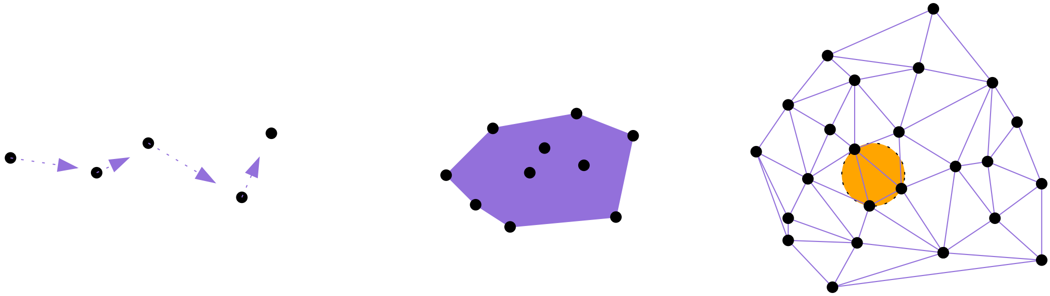


Prédicats

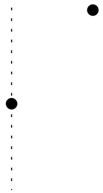


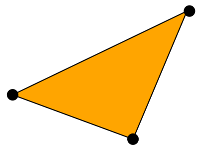
Comparaison

Résultat combinatoire



Prédicats

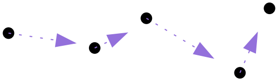


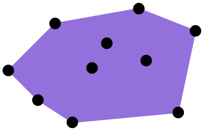


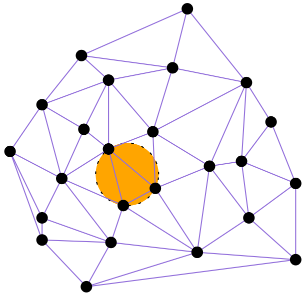
Comparaison

Orientation

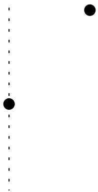
Résultat combinatoire



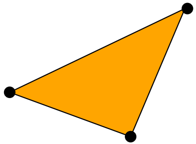




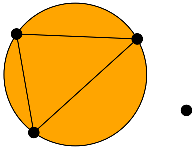
Prédicats



Comparaison



Orientation



Cocircularité

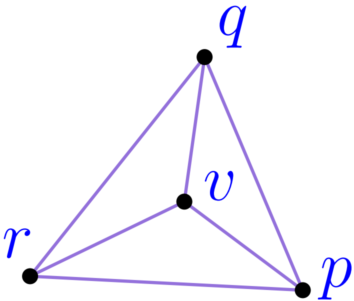
On a tendance à utiliser la géométrie

On a tendance à utiliser la géométrie

i.e. les théorèmes géométriques

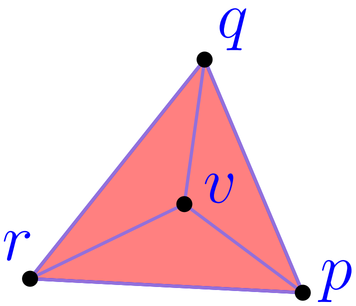
dans les algorithmes

théorème géométrique utile aux algorithmes



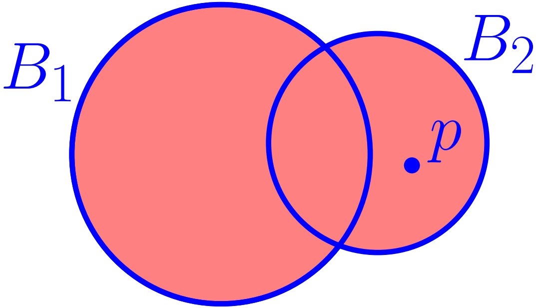
$$\left.\begin{array}{l} pqv \\ qrv \\ rpv \end{array}\right. \text{ ccw} \quad \Longrightarrow \quad pqr$$

théorème géométrique utile aux algorithmes



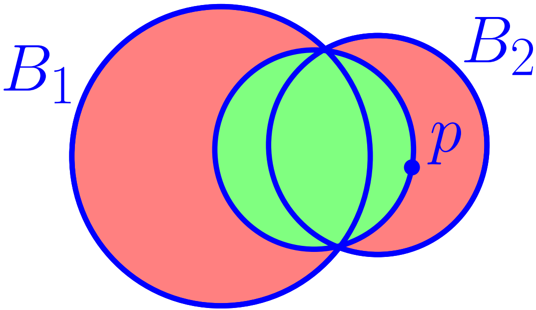
pqv
qrv ccw $\Longrightarrow$ pqr $\boxed{\text{ccw}}$
rpv

théorème géométrique utile aux algorithmes



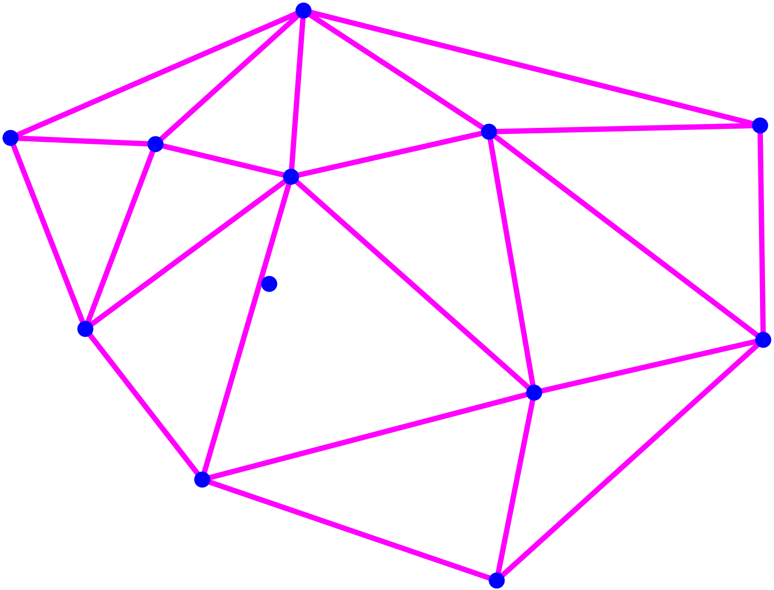
$$\left.\begin{array}{l} p \in B_2 \\ p \notin B_1 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow$$

théorème géométrique utile aux algorithmes

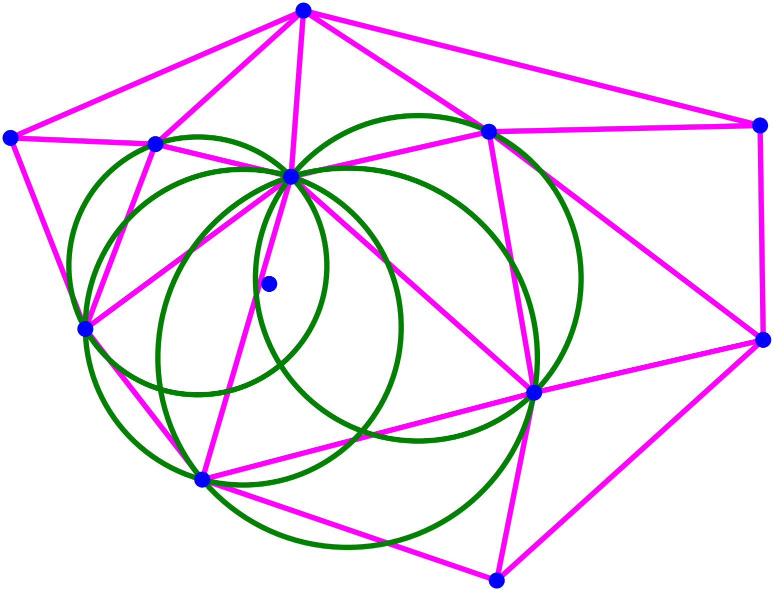


$$p \in B_2$$
$$p \notin B_1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B' \subset B_1 \cup B_2}$$

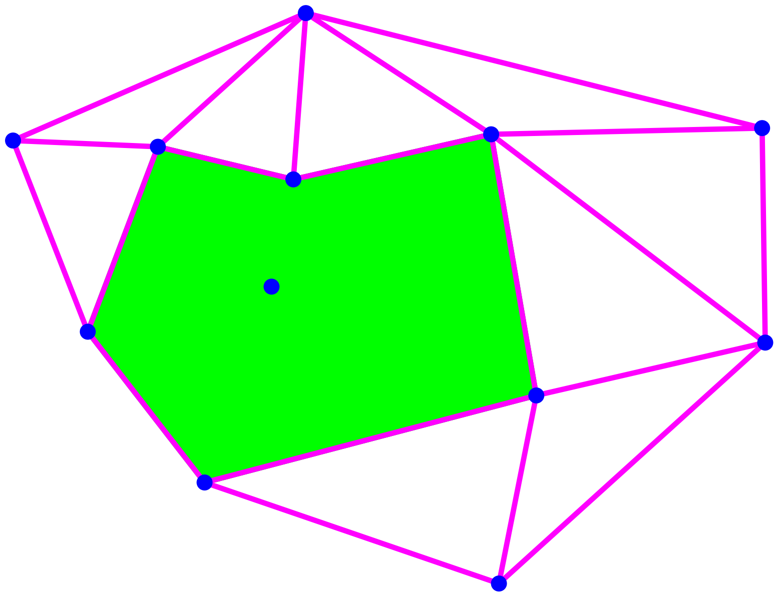
Insertion dans Delaunay



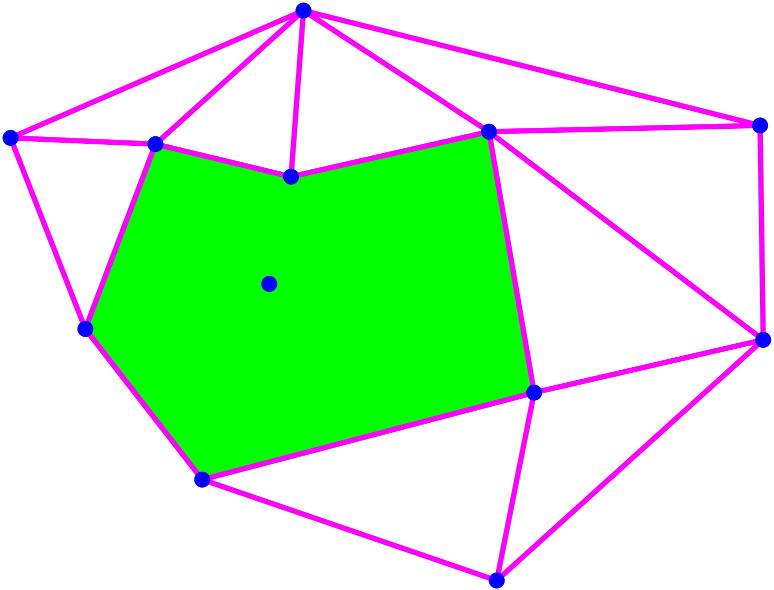
Insertion dans Delaunay



Insertion dans Delaunay

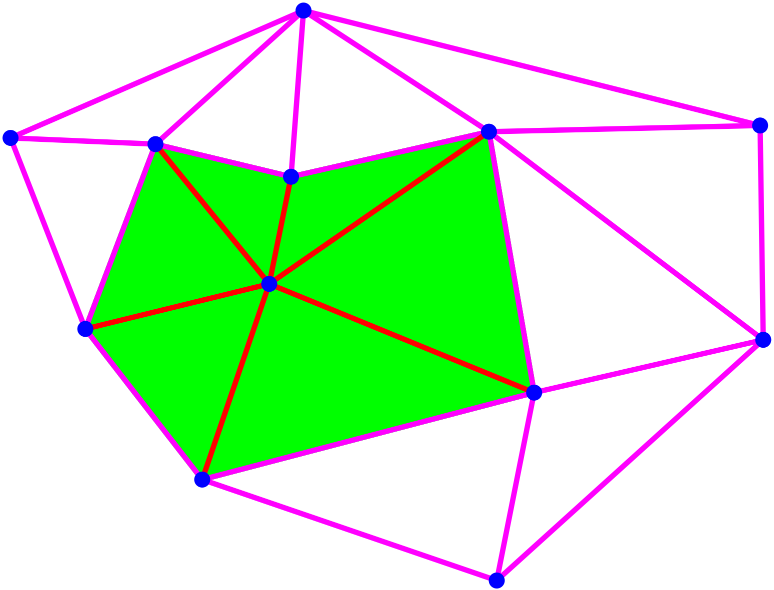


Insertion dans Delaunay



est forcément étoilé

Insertion dans Delaunay

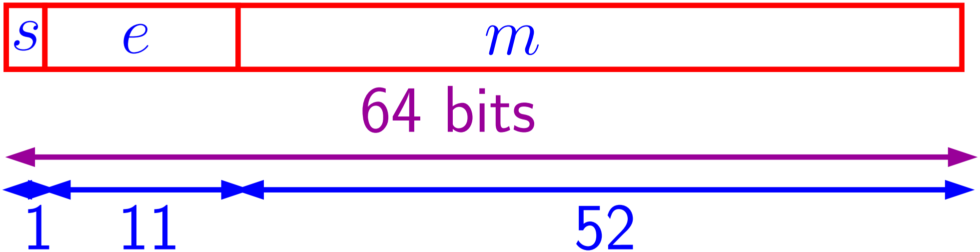


est forcément étoilé

Rappels sur l'arithmétique flottante

`double`

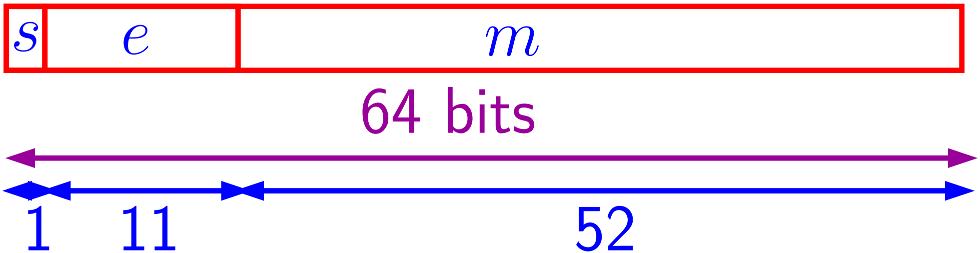
Norme IEEE 754



Rappels sur l'arithmétique flottante

`double`

Norme IEEE 754

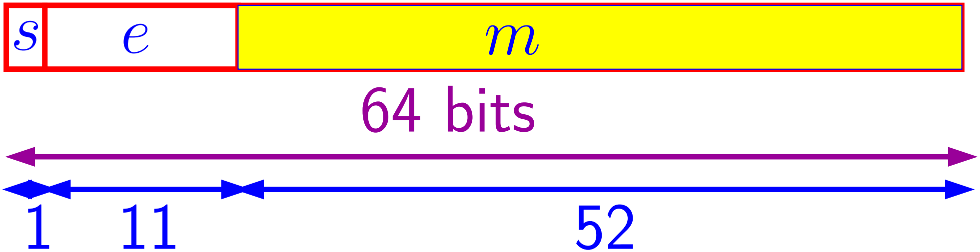


0.1

Rappels sur l'arithmétique flottante

`double`

Norme IEEE 754

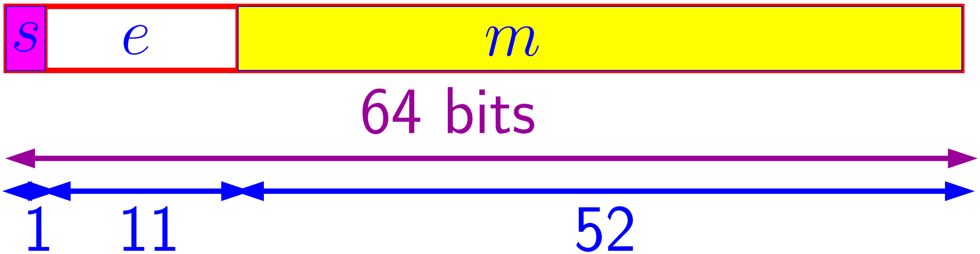


0.1 

Rappels sur l'arithmétique flottante

`double`

Norme IEEE 754

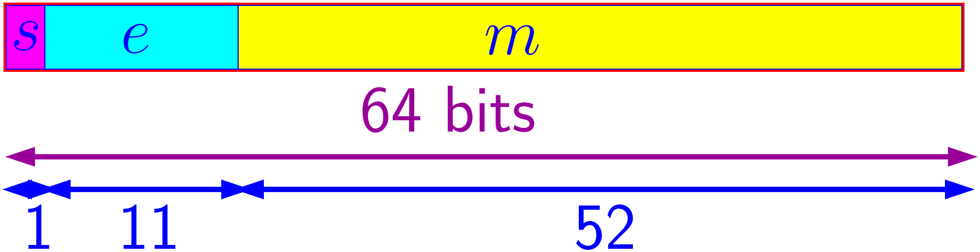


$$-1^{s} \; 0.1m$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

`double`

Norme IEEE 754

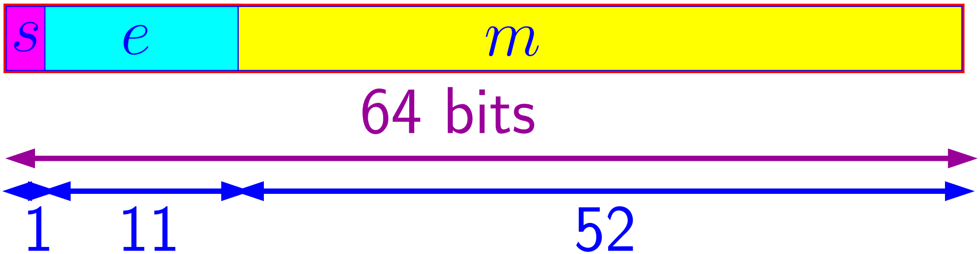


$$-1^{\boxed{s}} \quad 0.1\boxed{\quad m \quad} \; 2^{-1024+\boxed{\quad e \quad}}$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

`double`

Norme IEEE 754



$$-1^{s} \quad 0.1\,m \quad 2^{-1024+e}$$

nombres “normalisés”

Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres représentables

Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres représentables

$$0.11010\ldots01001 \times 2^{e}$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres représentables

$$0.11010\ldots01010 \times 2^e$$

$$0.11010\ldots01001 \times 2^e$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres représentables

$$0.11010\ldots01010 \times 2^e$$

$$0.11010\ldots01011 \times 2^e$$

$$0.11010\ldots01001 \times 2^e$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres représentables

$$0.11111\ldots11111 \times 2^e$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres représentables

$$0.11111\ldots11111 \times 2^{e}$$

$$0.10000\ldots00000 \times 2^{e+1}$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres représentables

$$0.11111\ldots11111 \times 2^e$$

$$0.10000\ldots00000 \times 2^{e+1}$$

$$0.10000\ldots00001 \times 2^{e+1}$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres représentables

$$0.11111\ldots11111 \times 2^{e}$$

$$0.10000\ldots00000 \times 2^{e+1}$$

$$0.10000\ldots00001 \times 2^{e+1}$$

$$0.10000\ldots00010 \times 2^{e+1}$$

$$0.10000\ldots00011 \times 2^{e+1}$$

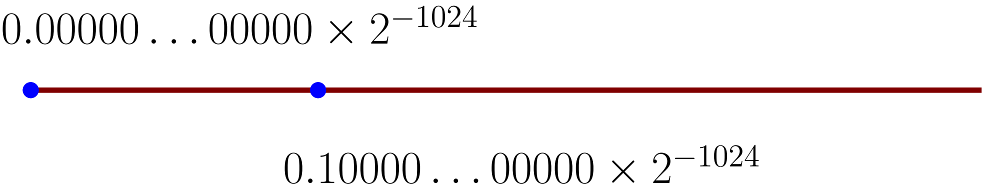
Rappels sur l'arithmétique flottante

Plus petit nombre représentable

$$0.00000\ldots00000 \times 2^{-1024}$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

Plus petit nombre représentable



Rappels sur l'arithmétique flottante

Plus petit nombre représentable

$$0.00000\ldots00000 \times 2^{-1024}$$

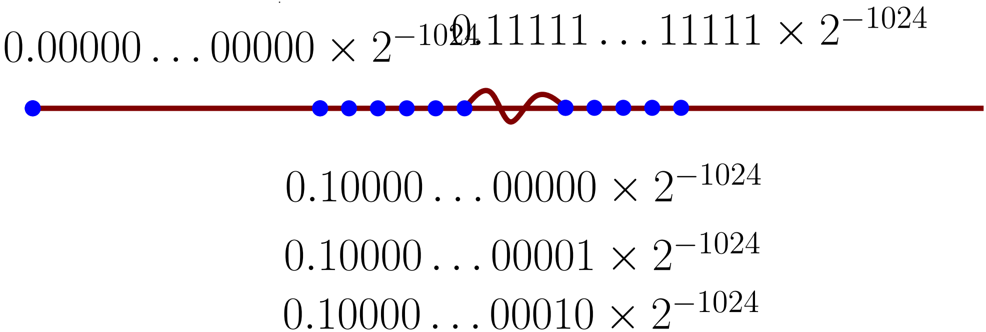
$$0.10000\ldots00000 \times 2^{-1024}$$

$$0.10000\ldots00001 \times 2^{-1024}$$

$$0.10000\ldots00010 \times 2^{-1024}$$

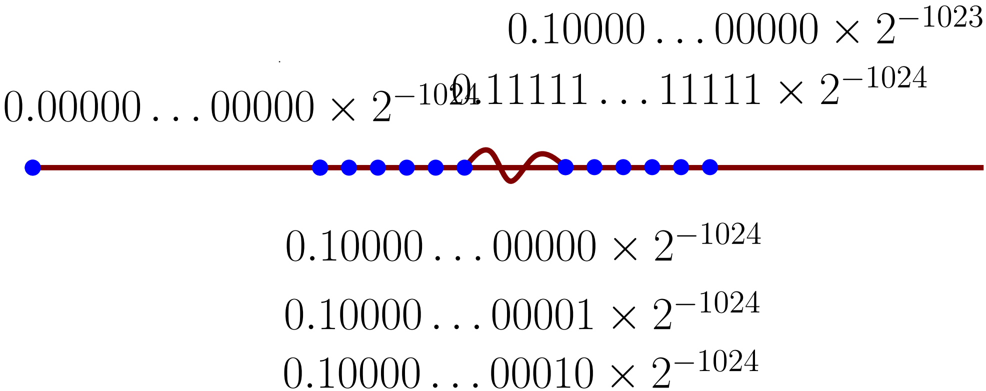
Rappels sur l'arithmétique flottante

Plus petit nombre représentable



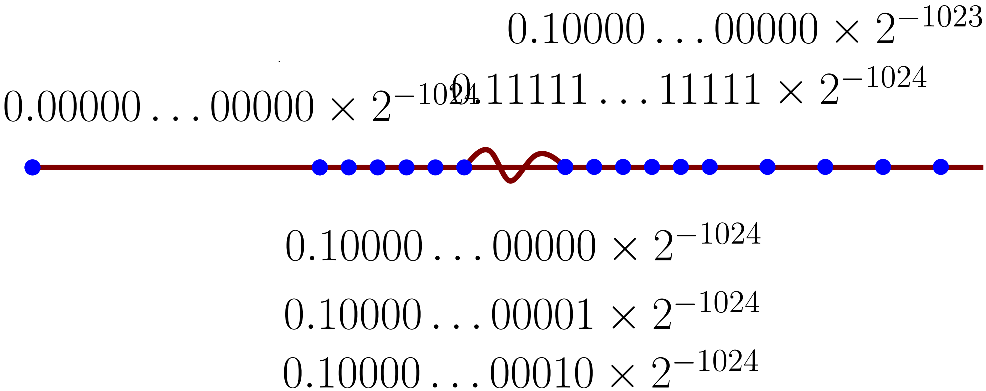
Rappels sur l'arithmétique flottante

Plus petit nombre représentable



Rappels sur l'arithmétique flottante

Plus petit nombre représentable



Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres dénormalisés

$0.00000\ldots00000 \times 2^{-1024}$ $\qquad$ $0.10000\ldots00000 \times 2^{-1023}$

Rappels sur l'arithmétique flottante

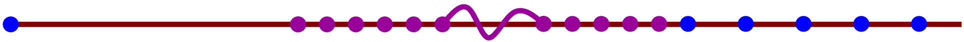
Nombres dénormalisés

$0.00000\ldots00000 \times 2^{-1024}$ $\quad$ $0.10000\ldots00000 \times 2^{-1023}$

Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres dénormalisés

$0.00000\ldots00000 \times 2^{-1024}$ $\qquad$ $0.10000\ldots00000 \times 2^{-1023}$



$0.10000\ldots00000 \times 2^{-1024}$

$0.11111\ldots11111 \times 2^{-1024}$

Rappels sur l'arithmétique flottante

Nombres dénormalisés

$$0.00000\ldots00000 \times 2^{-1024}$$

$$0.10000\ldots00000 \times 2^{-1023}$$

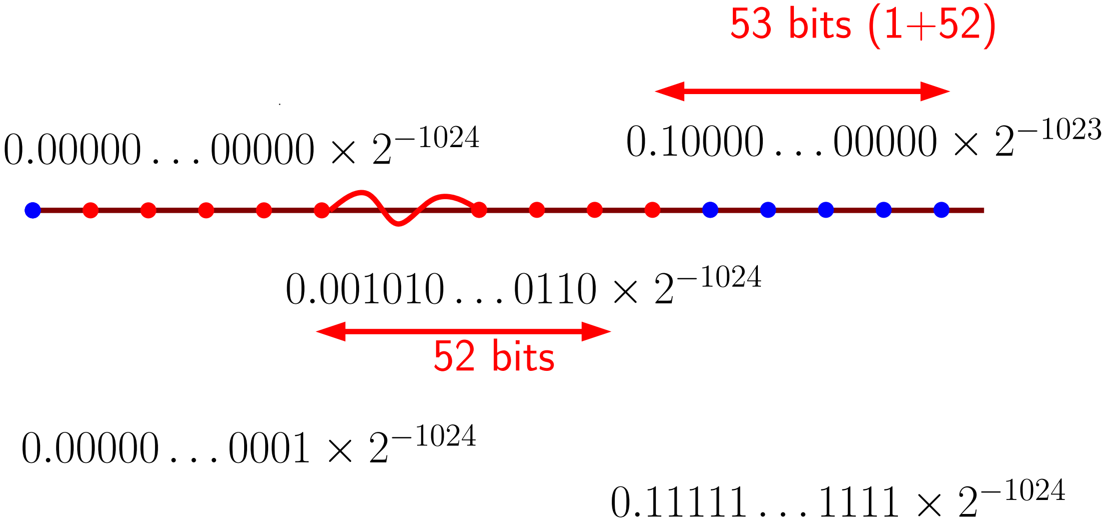
$$0.001010\ldots0110 \times 2^{-1024}$$

$$0.00000\ldots0001 \times 2^{-1024}$$

$$0.11111\ldots1111 \times 2^{-1024}$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

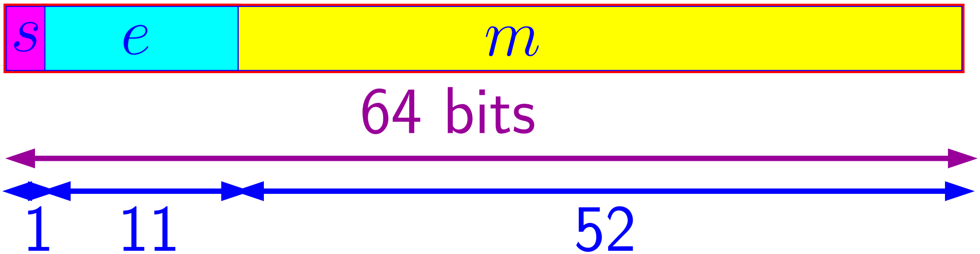
Nombres dénormalisés



Rappels sur l'arithmétique flottante

`double`

Norme IEEE 754



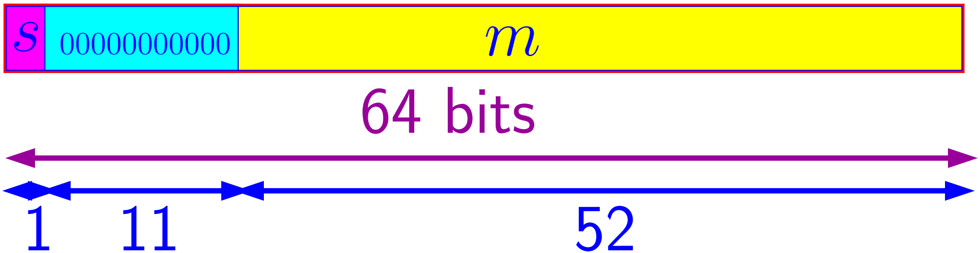
$$-1^{s} \quad 0.1\,m \quad 2^{-1024+e}$$

nombres “normalisés”

Rappels sur l'arithmétique flottante

`double`

Norme IEEE 754



$$-1^{\boxed{s}} \quad 0.\boxed{m} \quad 2^{-1024}$$

nombres “dénormalisés”

Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi

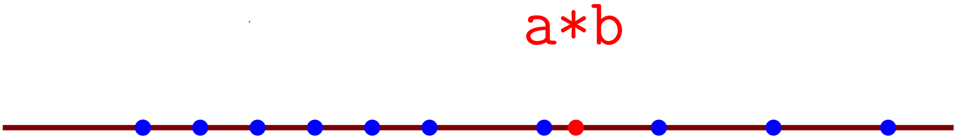
Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi

Nombres représentables

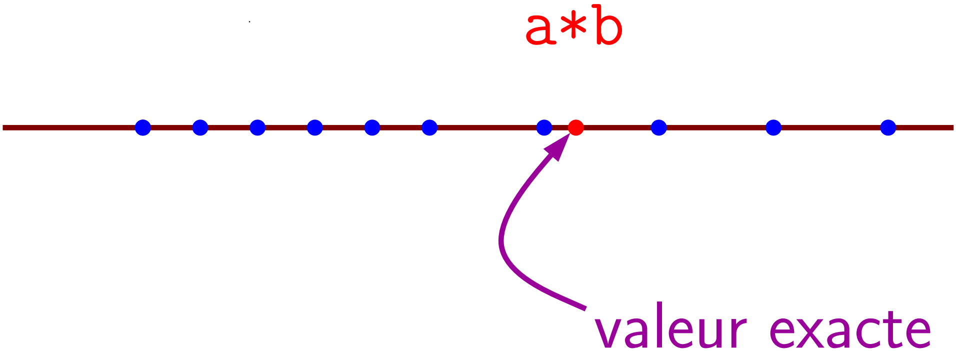
Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi



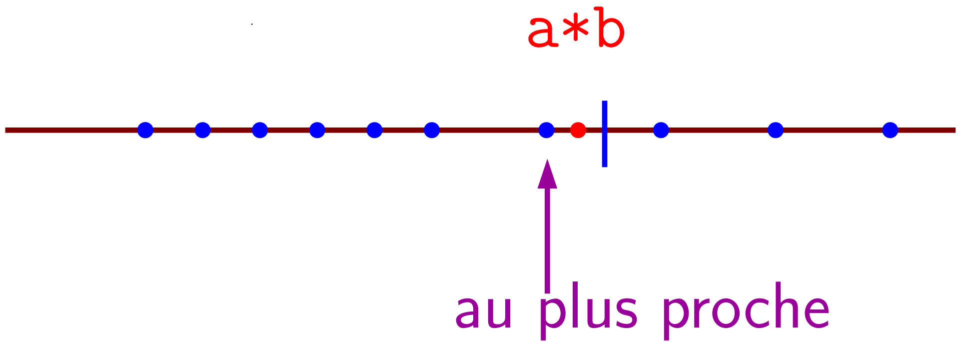
Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi



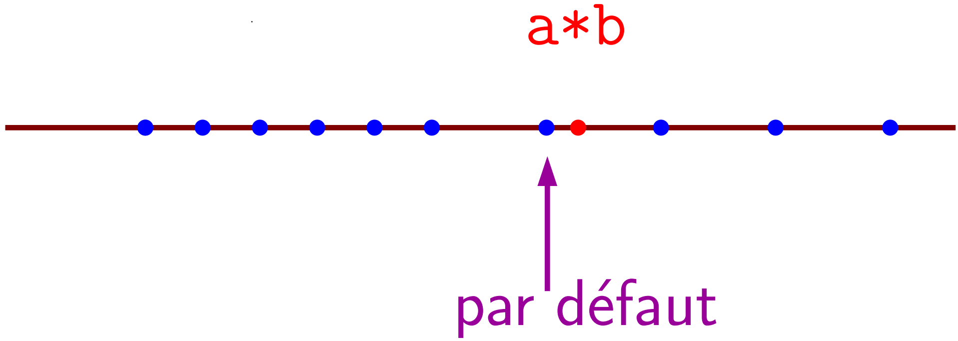
Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi



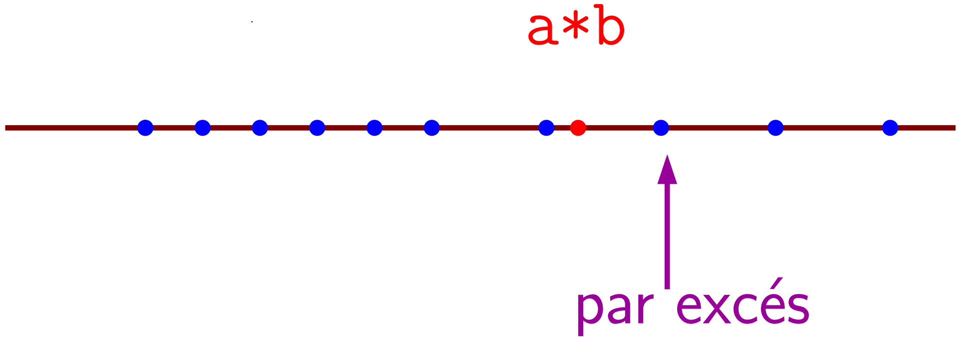
Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi



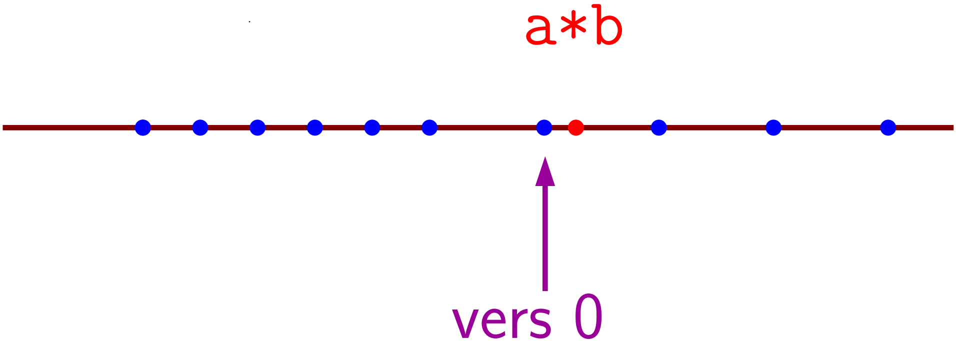
Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi



Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi



Rappels sur l'arithmétique flottante

Règles d'arrondi

4 opérations et racine carrée

a+b a*b sqrt(a)

a-b a/b

Rappels sur l'arithmétique flottante

`double`	53 chiffres binaires
`float`	24 chiffres binaires

Rappels sur l'arithmétique flottante

`double`	53 chiffres binaires
`float`	24 chiffres binaires
modèle jouet	2 chiffres décimaux significatifs

Rappels sur l'arithmétique flottante

`double`	53 chiffres binaires
`float`	24 chiffres binaires
modèle jouet	2 chiffres décimaux significatifs

$$35 + 3.7 =$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

`double`	53 chiffres binaires
`float`	24 chiffres binaires
modèle jouet	2 chiffres décimaux significatifs

$$35 + 3.7 = \qquad 39$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

`double` 53 chiffres binaires

`float` 24 chiffres binaires

modèle jouet 2 chiffres décimaux significatifs

$$35 + 3.7 = \quad 39$$

$$35 + 3.3 + 0.4 =$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

`double` 53 chiffres binaires

`float` 24 chiffres binaires

modèle jouet 2 chiffres décimaux significatifs

$$35 + 3.7 = \quad 39$$

$$35 + 3.3 + 0.4 = \quad 38$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

`double` 53 chiffres binaires

`float` 24 chiffres binaires

modèle jouet 2 chiffres décimaux significatifs

$$
\begin{aligned}
35 + 3.7 &= 39 \\
35 + 3.3 + 0.4 &= 38 \\
35 + (3.3 + 0.4) &=
\end{aligned}
$$

Rappels sur l'arithmétique flottante

`double` 53 chiffres binaires

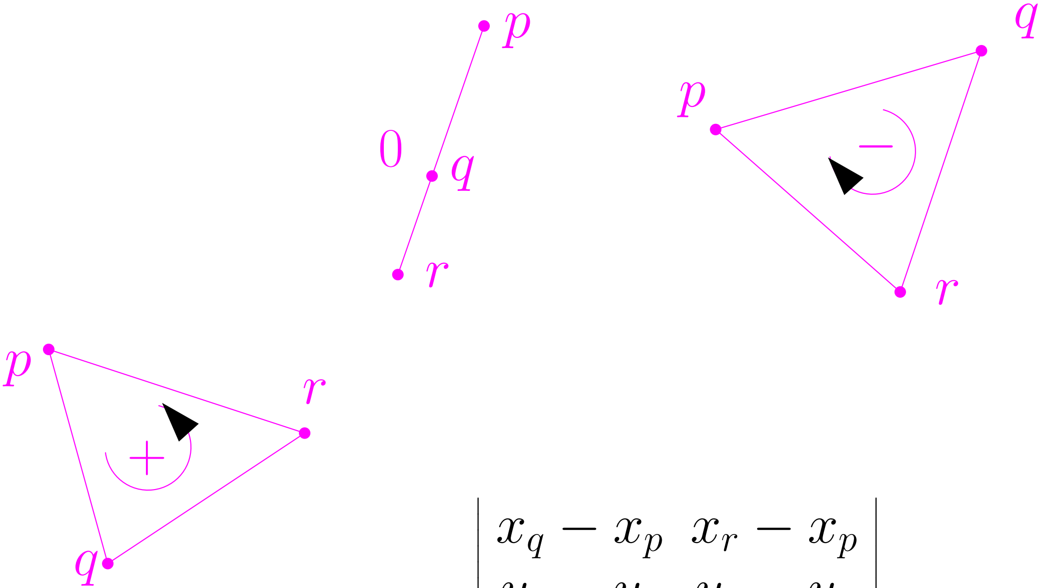
`float` 24 chiffres binaires

modèle jouet 2 chiffres décimaux significatifs

$$
\begin{aligned}
35 + 3.7 &= 39 \\
35 + 3.3 + 0.4 &= 38 \\
35 + (3.3 + 0.4) &= 39
\end{aligned}
$$

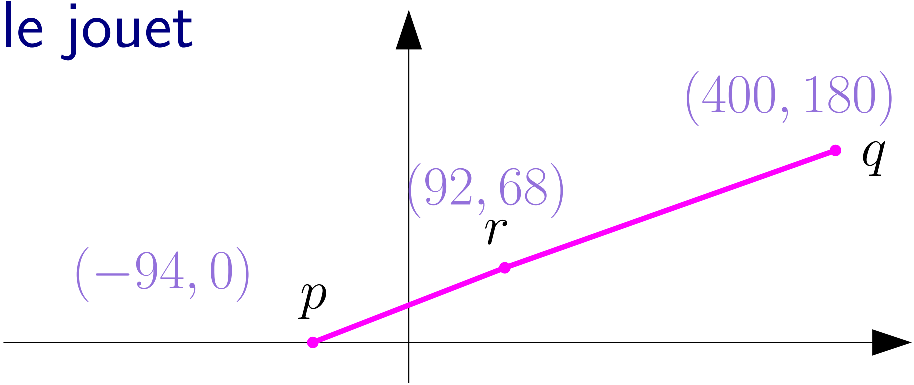
Prédicats

Prédicat d'orientation

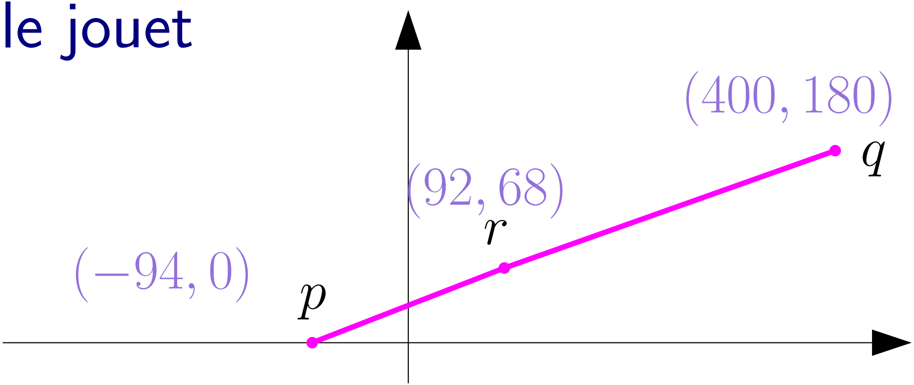


$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$

modèle jouet

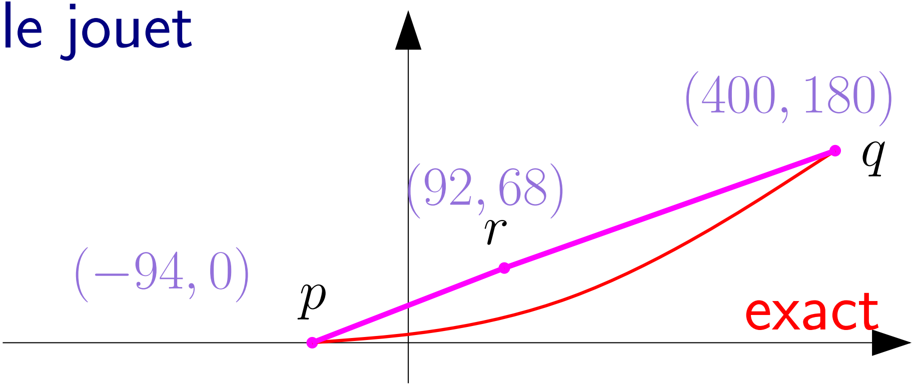


modèle jouet



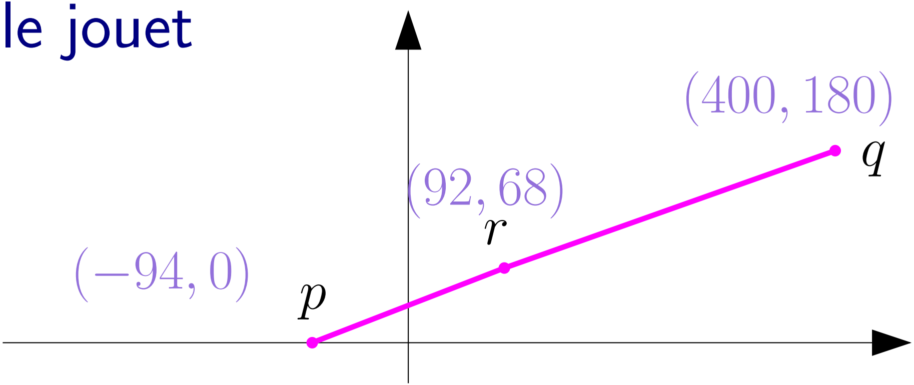
$$(400 + 94) * 68 - (92 + 94) * 180 =$$

modèle jouet



$$(400 + 94) * 68 - (92 + 94) * 180 = 112$$

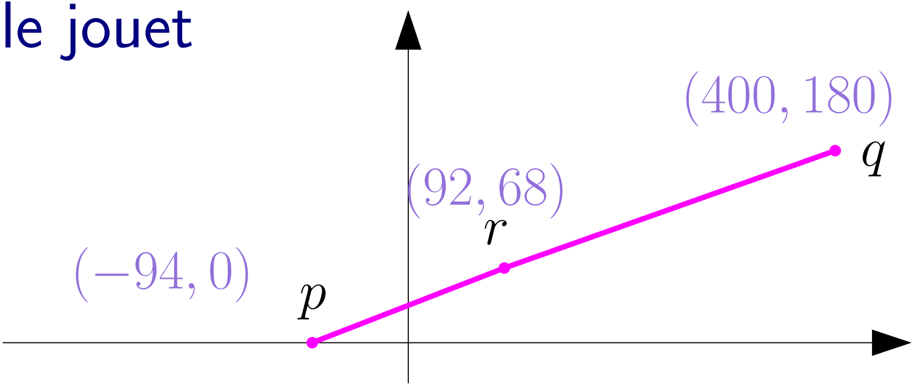
modèle jouet



$$(400 + 94) * 68 - (92 + 94) * 180 =$$

$$494 * 68 - 186 * 180$$

modèle jouet

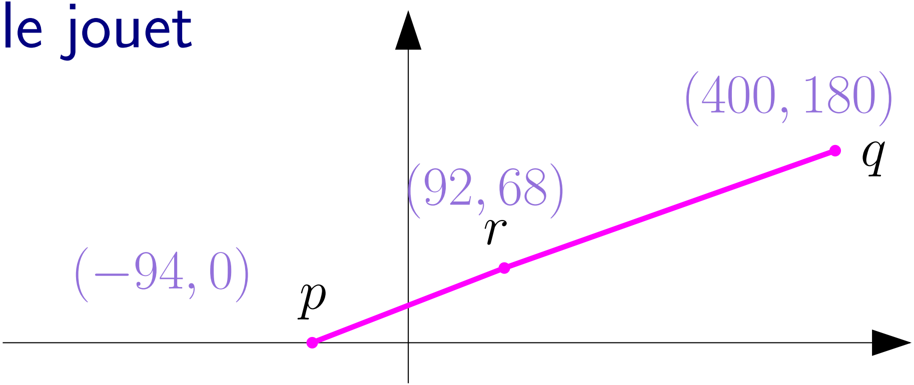


$$(400 + 94) * 68 - (92 + 94) * 180 =$$

$$494 * 68 - 186 * 180$$

$$490 * 68 - 190 * 180$$

modèle jouet



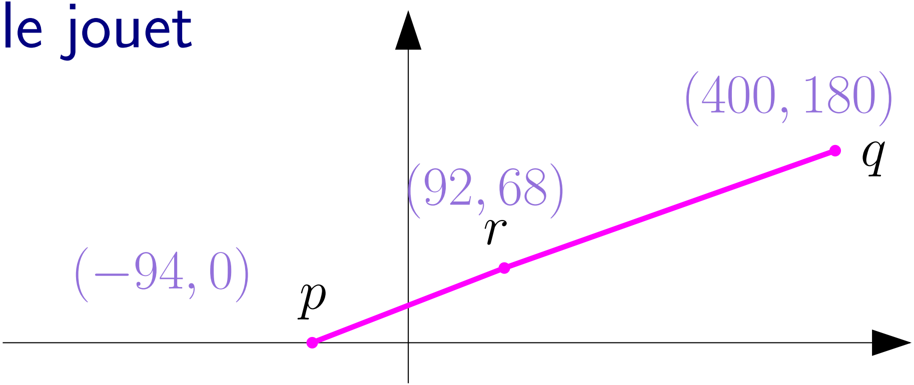
$$(400 + 94) * 68 - (92 + 94) * 180 =$$

$$494 * 68 - 186 * 180$$

$$490 * 68 - 190 * 180$$

$$= 33320 - 34200$$

modèle jouet



$$(400 + 94) * 68 - (92 + 94) * 180 =$$

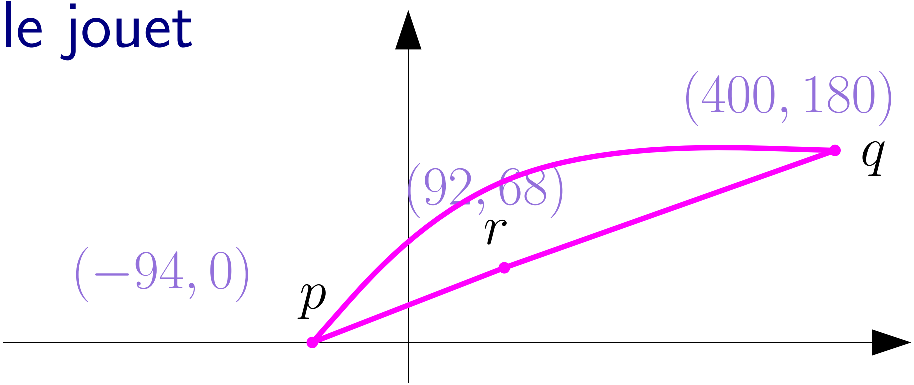
$$494 * 68 - 186 * 180$$

$$490 * 68 - 190 * 180$$

$$= 33320 - 34200$$

$$= 33000 - 34000$$

modèle jouet



$$(400+94)*68-(92+94)*180=$$

$$494*68-186*180$$

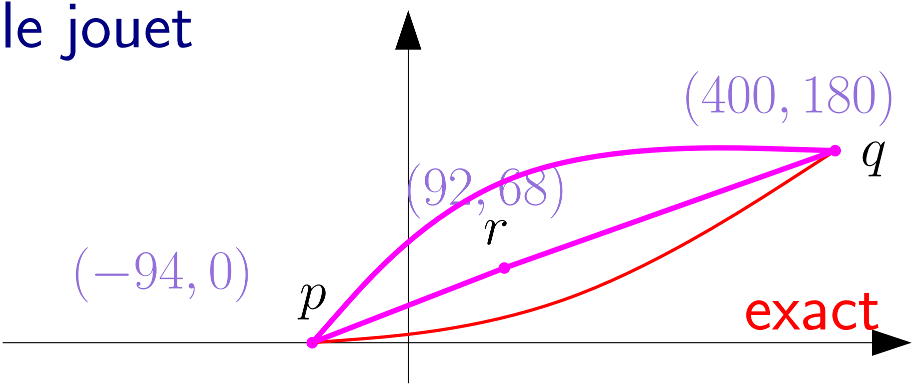
$$490*68-190*180$$

$$=33320-34200$$

$$=33000-34000$$

$$=-1000$$

modèle jouet



$$(400 + 94) * 68 - (92 + 94) * 180 = \ 112$$

$$494 * 68 - 186 * 180$$

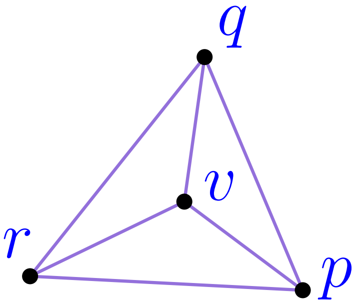
$$490 * 68 - 190 * 180$$

$$= 33320 - 34200$$

$$= 33000 - 34000$$

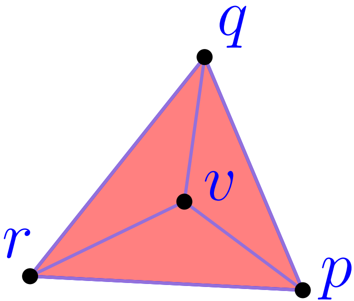
$$= -1000$$

théorème géométrique utile aux algorithmes



$$\begin{matrix} pqv \\ qrv \\ rpv \end{matrix} \quad \text{ccw} \qquad \Longrightarrow \qquad pqr$$

théorème géométrique utile aux algorithmes



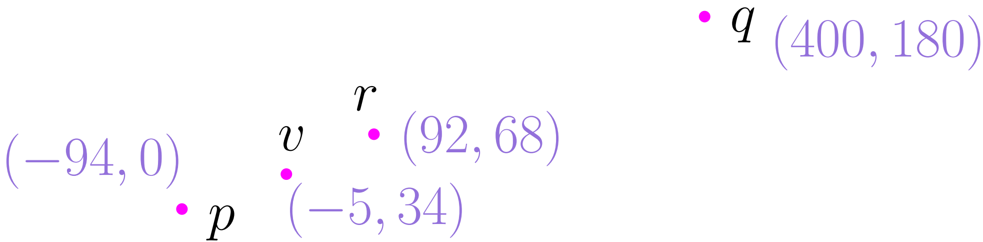
pqv
qrv ccw $\Longrightarrow$ pqr $\boxed{\text{ccw}}$
rpv

modèle jouet

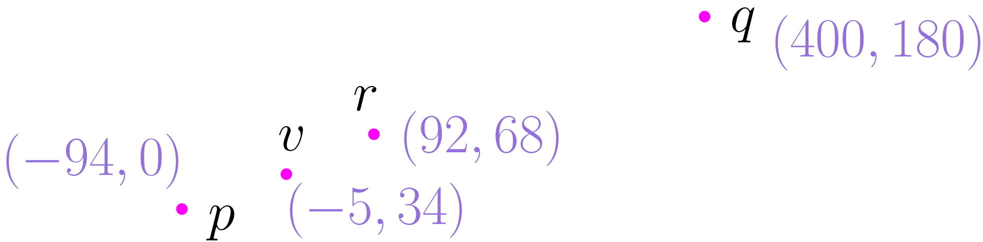
modèle jouet

Ça fait planter les théorèmes

modèle jouet

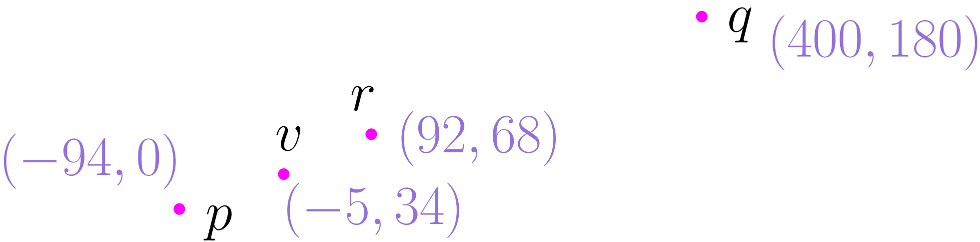


modèle jouet



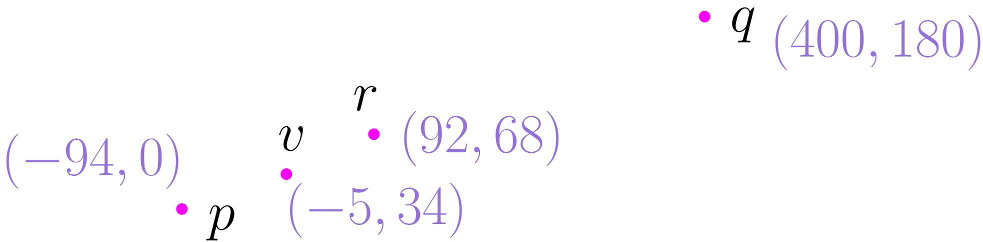
pqv
qrv ccw
rpv

modèle jouet



$$\begin{matrix} pqv \\ qrv \\ rpv \end{matrix} \quad \text{ccw} \qquad \Longrightarrow \qquad pqr \ \boxed{\text{ccw}}$$

modèle jouet



$$\left.\begin{array}{l} pqv \\ qrv \\ rpv \end{array}\right. \text{ ccw} \quad \Longrightarrow \quad pqr \; \boxed{\text{ccw}}$$

calcul “jouet”

modèle jouet

Ça fait planter les théorèmes • q $(400, 180)$

r

v • $(92, 68)$

$(-94, 0)$ • $(-5, 34)$

• p

pqv
qrv ccw $\Longrightarrow$ pqr $\boxed{\text{ccw}}$
rpv

calcul "jouet" $\longrightarrow$ pqr $\boxed{\text{cw}}$

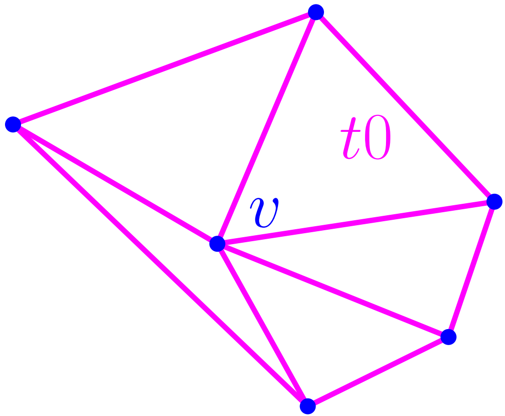
modèle jouet

modèle jouet

Ça fait planter les algorithmes

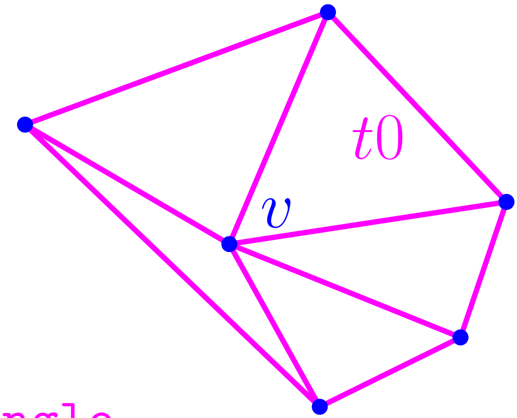
modèle jouet

tourner autour d'un sommet



modèle jouet

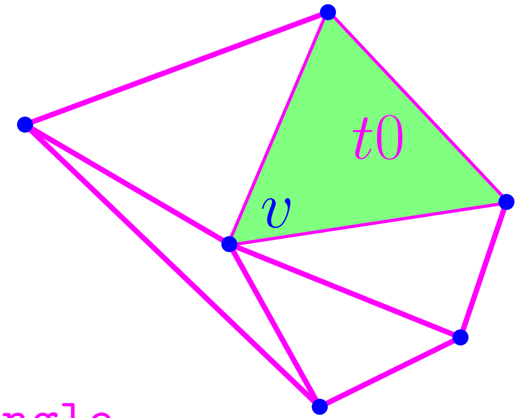
tourner autour d'un sommet




```
do
   let vpq ccw triangle
   go to neighbor through qv
while triangle ≠ t0
```

modèle jouet

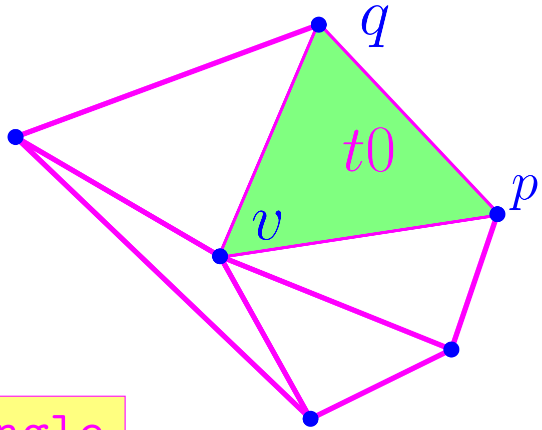
tourner autour d'un sommet




```
do
   let vpq ccw triangle
   go to neighbor through qv
while triangle ≠ t0
```

modèle jouet

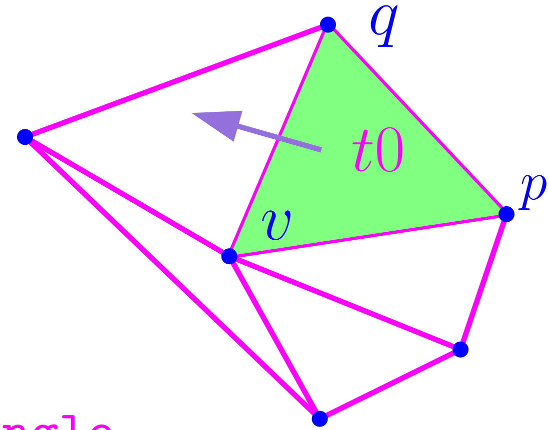
tourner autour d'un sommet




```
do
    let vpq ccw triangle
    go to neighbor through qv
while triangle ≠ t0
```

modèle jouet

tourner autour d'un sommet



do

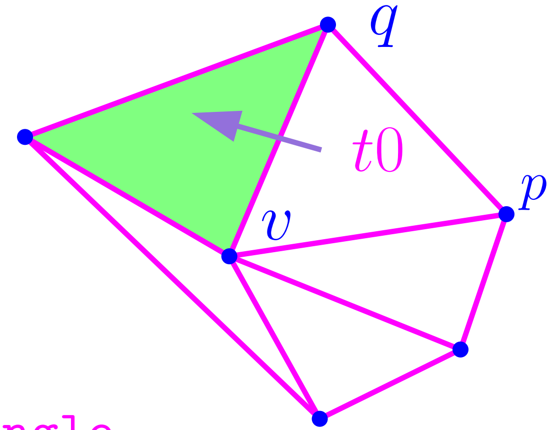
`let` vpq `ccw triangle`

`go to neighbor through` qv

`while triangle` $\neq t0$

modèle jouet

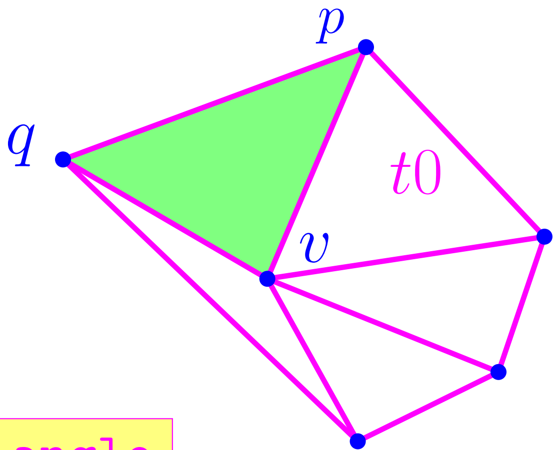
tourner autour d'un sommet




```
do
   let vpq ccw triangle
   go to neighbor through qv
while triangle ≠ t0
```

modèle jouet

tourner autour d'un sommet



`do`

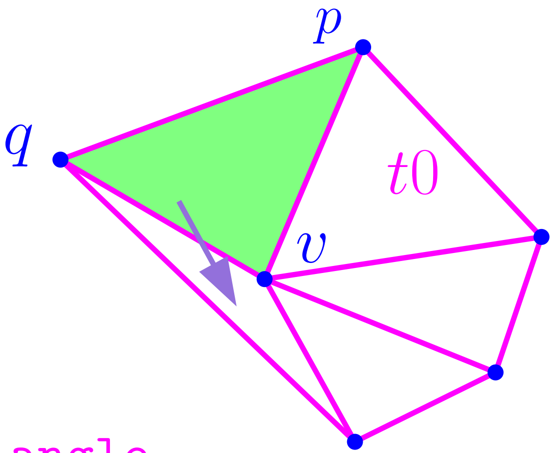
$\boxed{\texttt{let } vpq \texttt{ ccw triangle}}$

`go to neighbor through` qv

`while triangle` $\neq t0$

modèle jouet

tourner autour d'un sommet



do

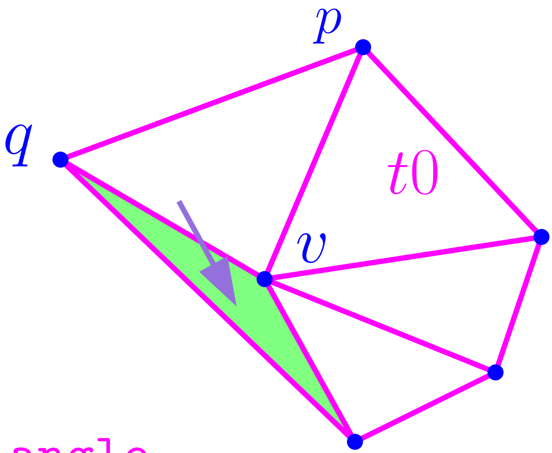
    let vpq ccw triangle

    go to neighbor through qv

while triangle $\neq t0$

modèle jouet

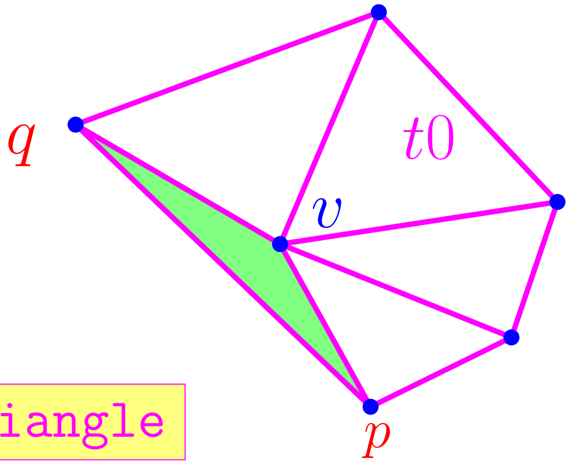
tourner autour d'un sommet




```
do
   let vpq ccw triangle
   go to neighbor through qv
while triangle ≠ t0
```

modèle jouet

tourner autour d'un sommet



`do`

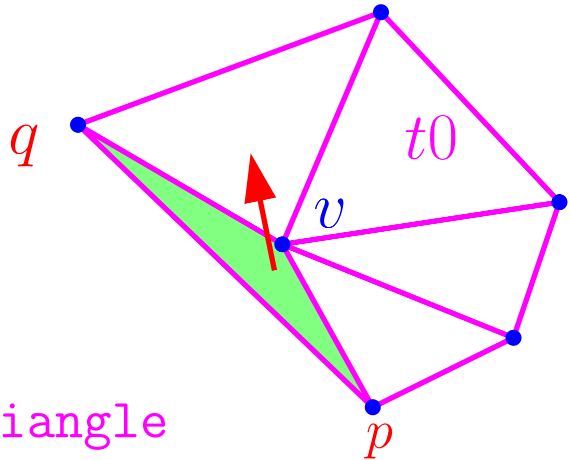
$\boxed{\texttt{let } vpq \texttt{ ccw triangle}}$

`go to neighbor through` qv

`while triangle` $\neq t0$

modèle jouet

tourner autour d'un sommet

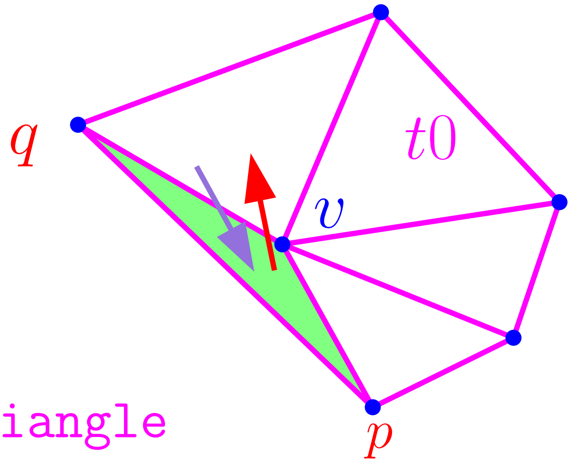



```
do
    let vpq ccw triangle
    go to neighbor through qv
while triangle ≠ t0
```

modèle jouet

tourner autour d'un sommet

Ça boucle



`do`

  `let` vpq `ccw triangle`

  `go to neighbor through` qv

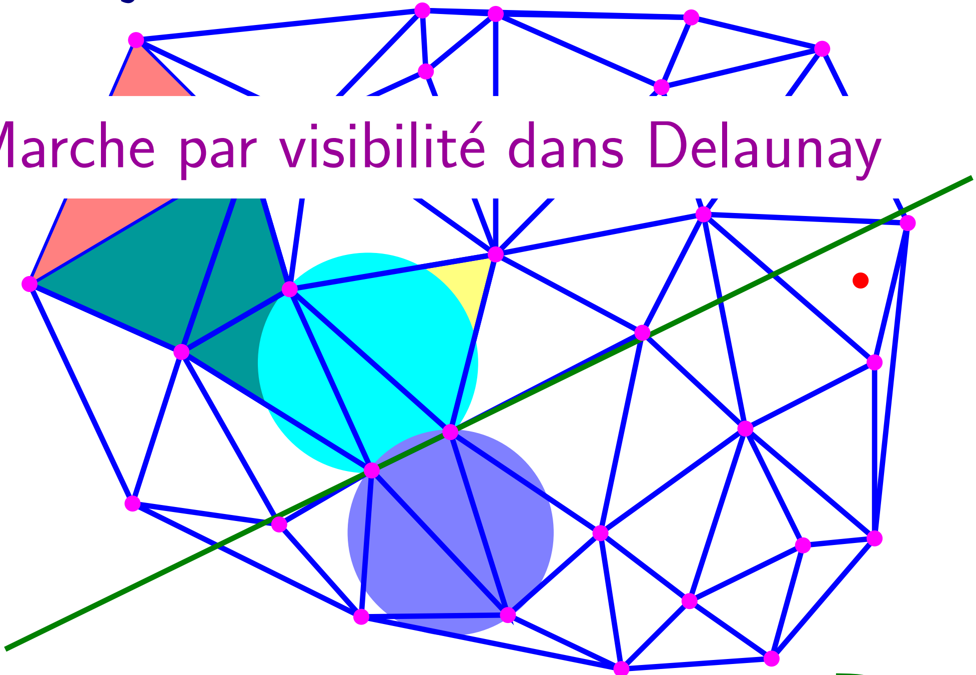
`while triangle` $\neq t0$

modèle jouet

Ça fait planter les algorithmes

modèle jouet

Marche par visibilité dans Delaunay



Pas de cycle dans ce cas. car puissance(•)

modèle jouet

Ça fait planter les algorithmes

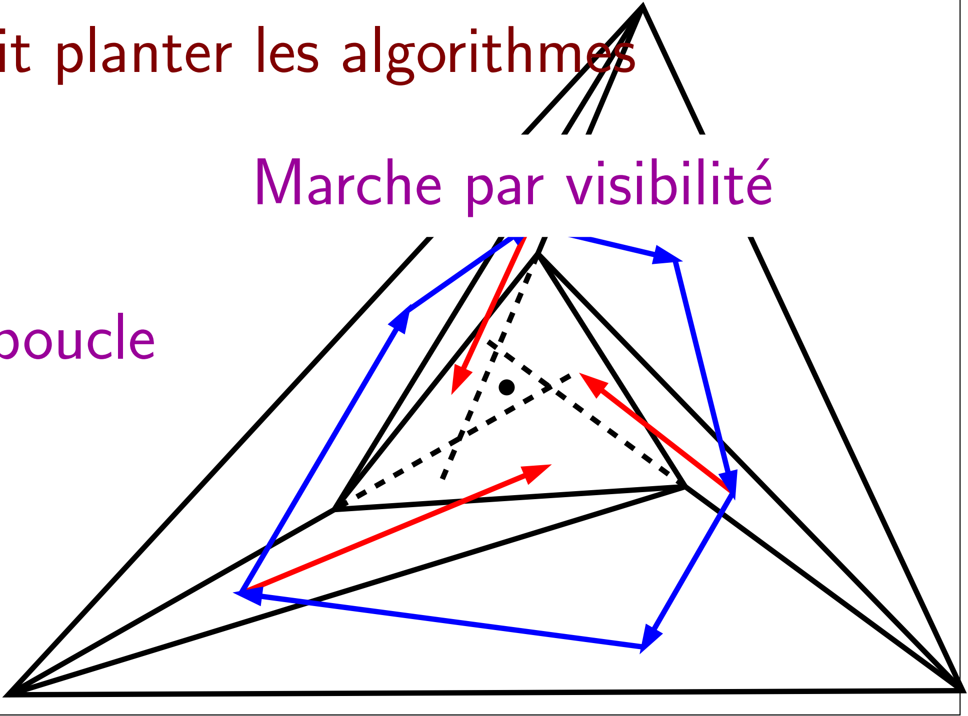
ça boucle

modèle jouet

Ça fait planter les algorithmes

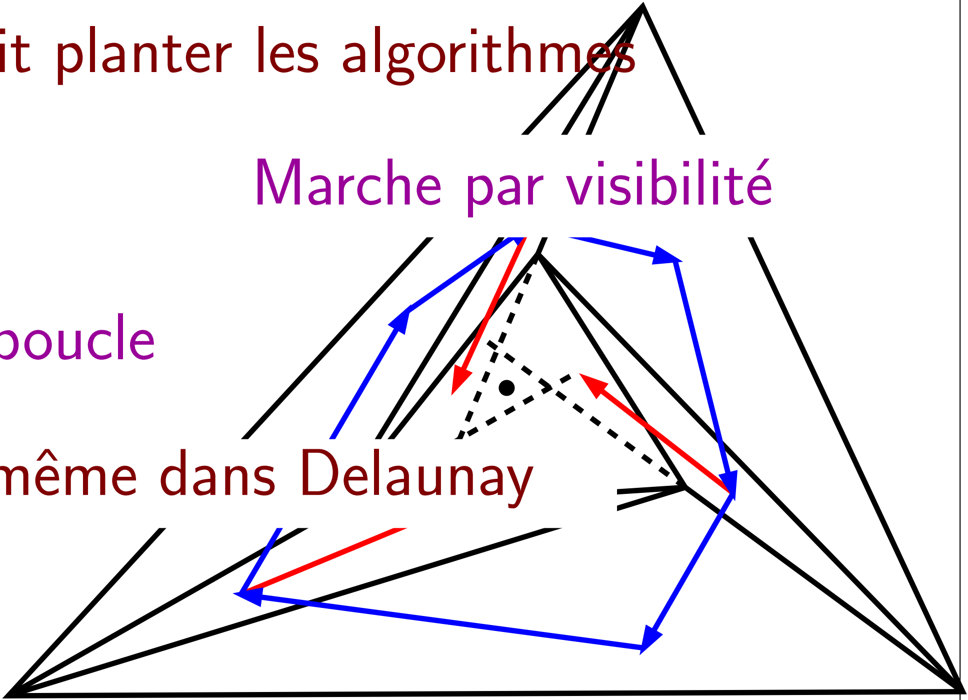
Marche par visibilité

ça boucle



modèle jouet

Ça fait planter les algorithmes



Marche par visibilité

ça boucle

même dans Delaunay

Solution 1

Solution 1

Oublions quelques

millénaires de géométrie

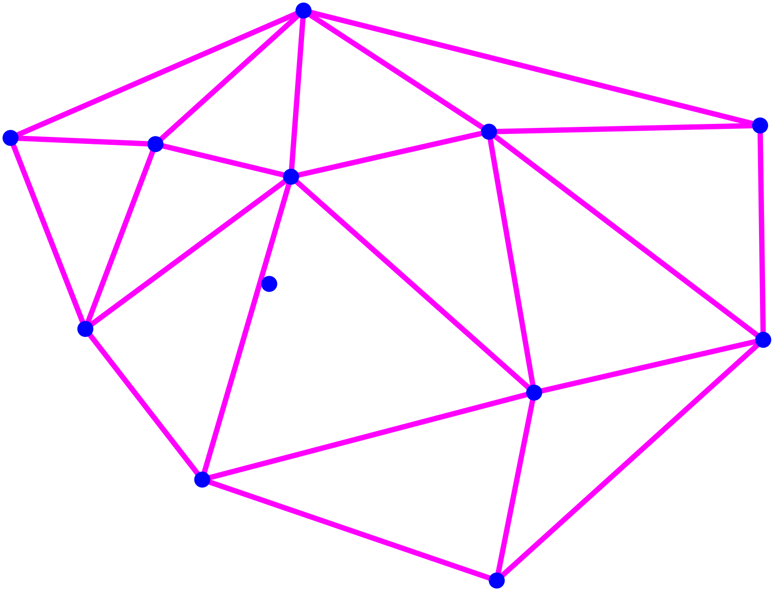
Solution 1

Oublions quelques

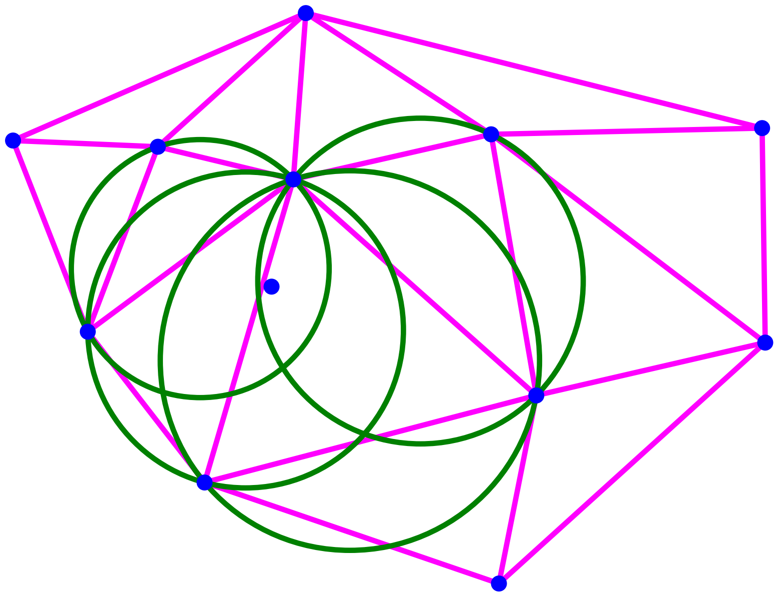
millénaires de géométrie

Concevons les algorithmes sans théorèmes

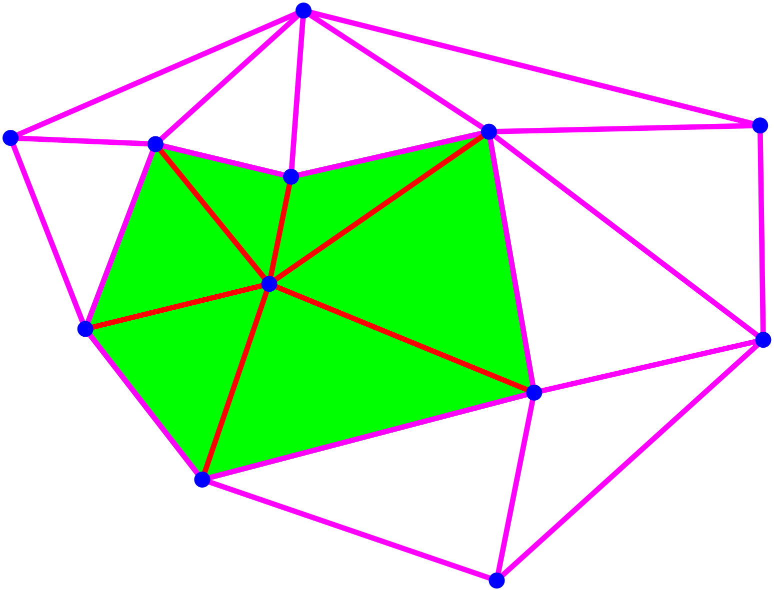
Insertion dans Delaunay



Insertion dans Delaunay



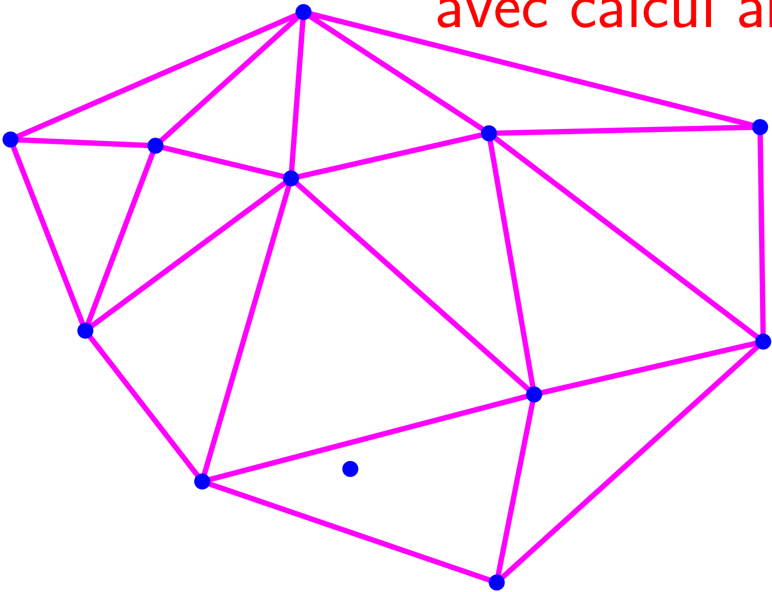
Insertion dans Delaunay



est forcément étoilé

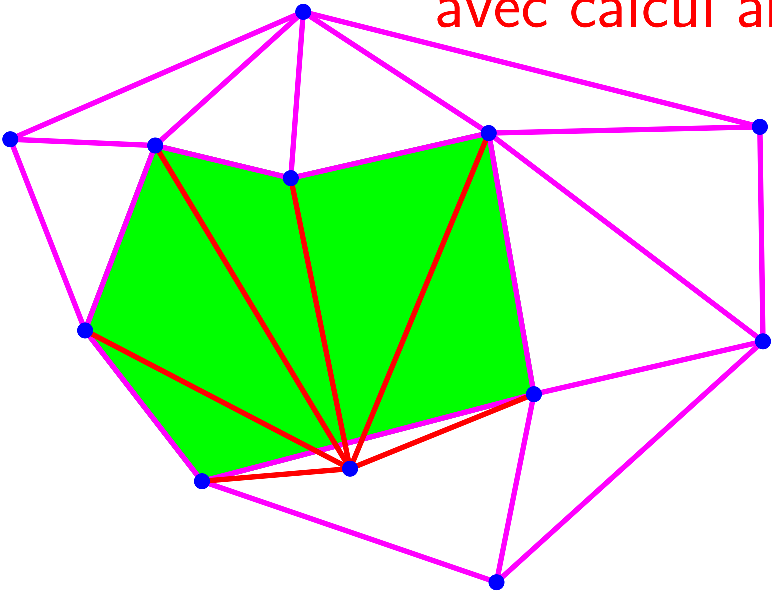
Insertion dans Delaunay

avec calcul arrondi



Insertion dans Delaunay

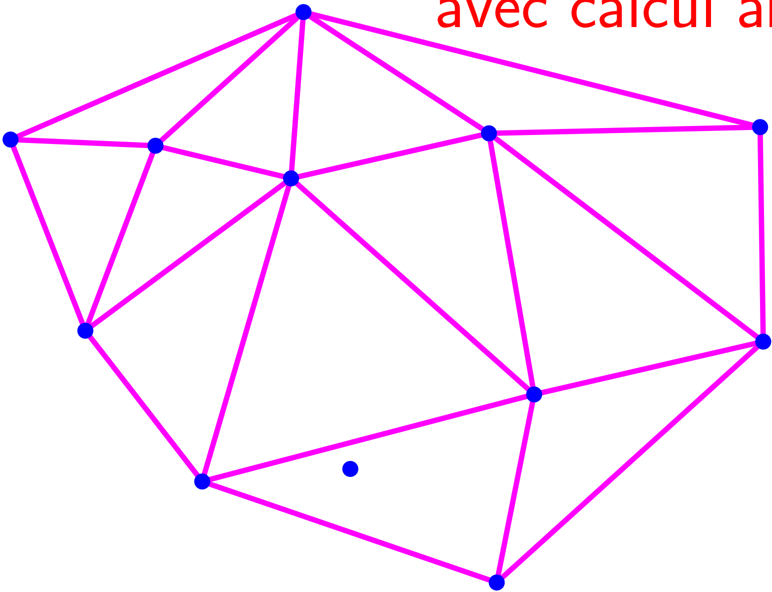
avec calcul arrondi



n'est pas forcément étoilé

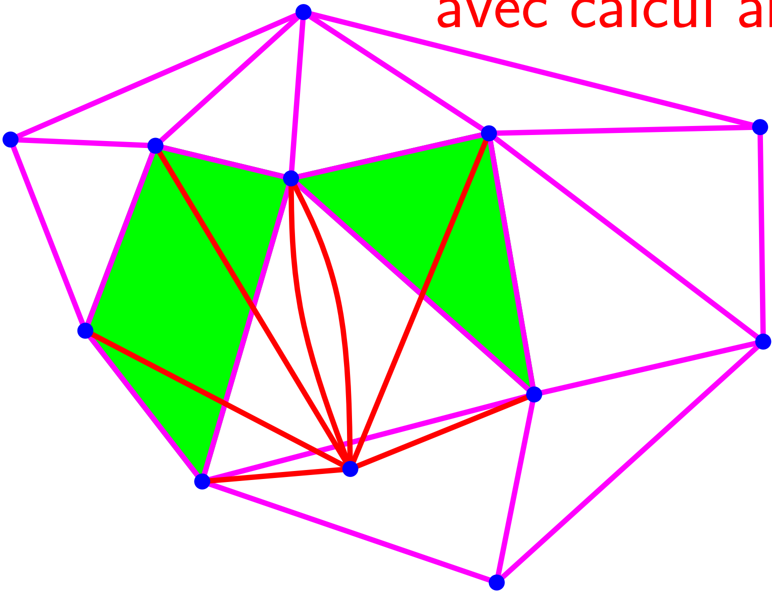
Insertion dans Delaunay

avec calcul arrondi



Insertion dans Delaunay

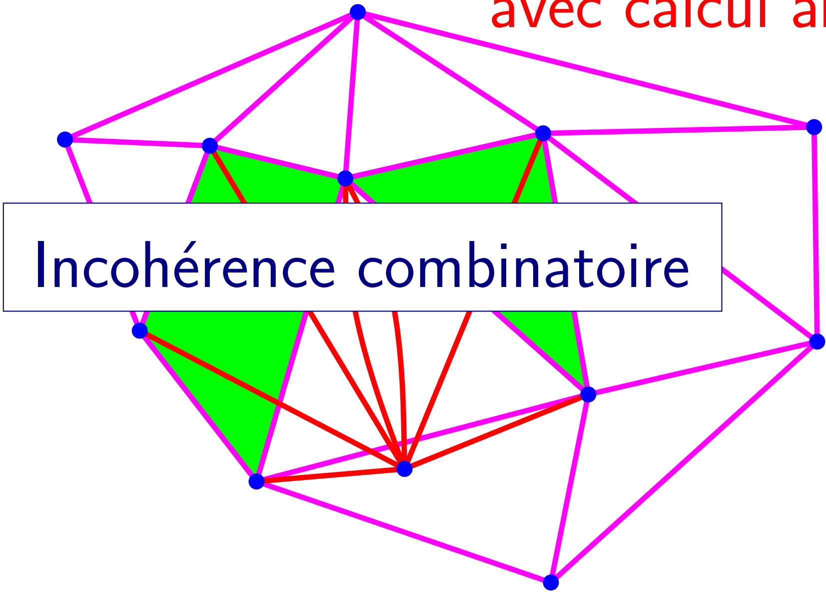
avec calcul arrondi



n'est pas forcément étoilé

Insertion dans Delaunay

avec calcul arrondi



n'est pas forcément étoilé

Solution 1

Concevons les algorithmes sans théorèmes

Solution 1

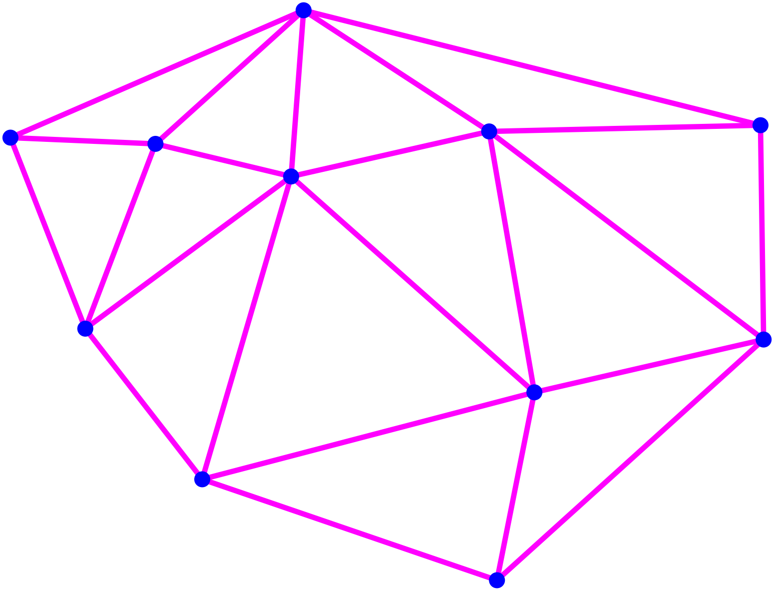
Concevons les algorithmes sans théorèmes

Vérifions la cohérence combinatoire

Solution 1

Concevons les algorithmes sans théorèmes

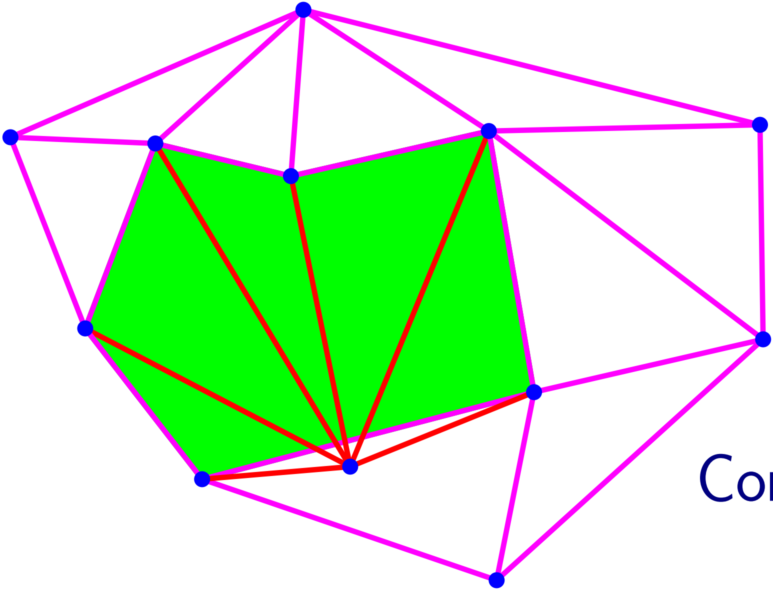
Vérifions la cohérence combinatoire



Solution 1

Concevons les algorithmes sans théorèmes

Vérifions la cohérence combinatoire

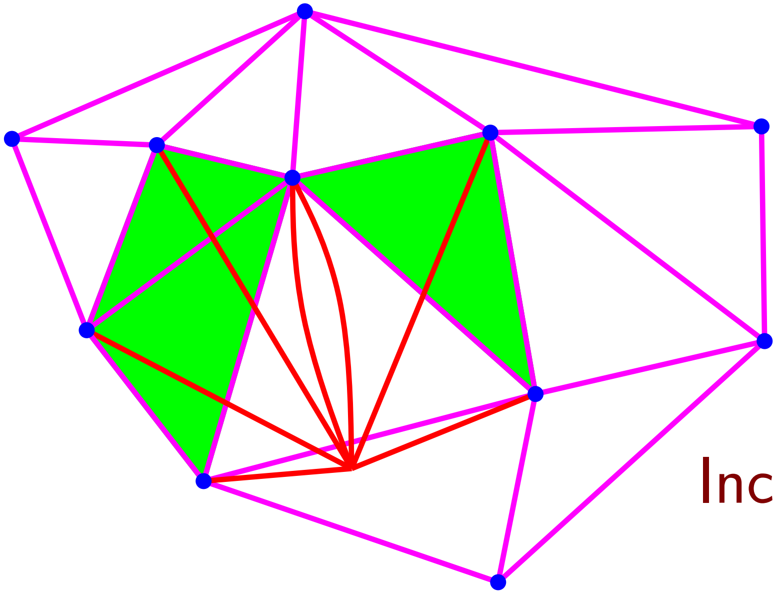


Correct

Solution 1

Concevons les algorithmes sans théorèmes

Vérifions la cohérence combinatoire



Incorrect

Solution 1

En vérifiant la cohérence combinatoire

Solution 1

En vérifiant la cohérence combinatoire

On obtient au mieux

une correction combinatoire

Solution 1

En vérifiant la cohérence combinatoire

On obtient au mieux

une correction combinatoire

ce qu'on calcule est

combinatoirement

une triangulation

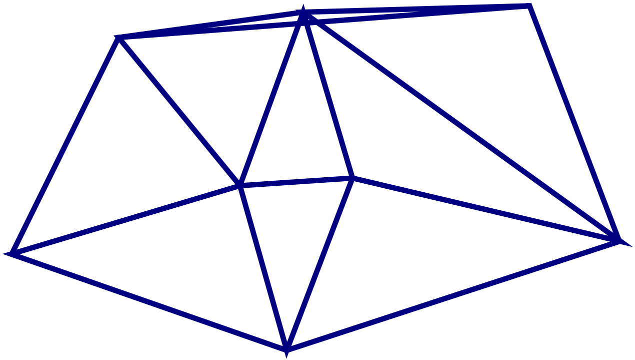
ce qu'on calcule est combinatoirement une triangulation

ce qu'on calcule est combinatoirement
une triangulation

le plongement peut avoir des intersections

ce qu'on calcule est combinatoirement une triangulation

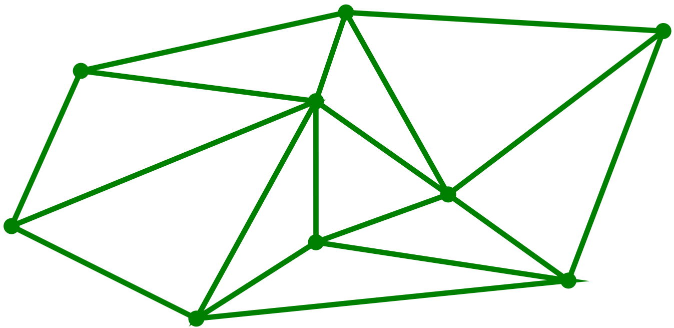
le plongement peut avoir des intersections



ce qu'on calcule est combinatoirement
une triangulation

le plongement peut avoir des intersections

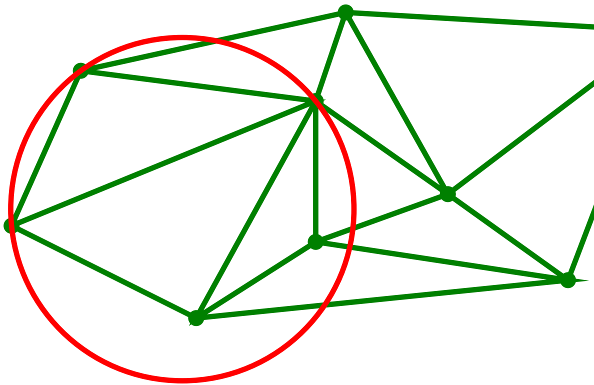
c'est pas Delaunay



ce qu'on calcule est combinatoirement une triangulation

le plongement peut avoir des intersections

c'est pas Delaunay



On vérifie que l'on a

combinatoirement

une triangulation

On vérifie que l'on a

combinatoirement

une triangulation

Peut-être que c'est

combinatoirement

pas Delaunay

On vérifie que l'on a

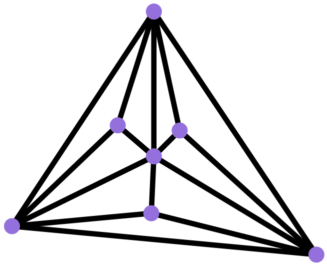
combinatoirement

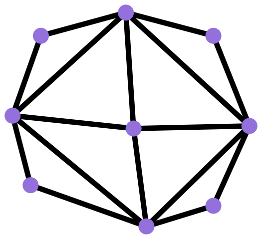
une triangulation

Peut-être que c'est

combinatoirement

pas Delaunay





Solution 1

Concevons les algorithmes sans théorèmes

Vérifions la cohérence combinatoire

~~Solution 1~~

~~Concevons les algorithmes sans théorèmes~~

~~Vérifions la cohérence combinatoire~~

peu (plus) utilisé

Solution 2

Concevons les algorithmes avec théorèmes

Faisons comme si on savait calculer sur les réels

Solution 2

Concevons les algorithmes avec théorèmes

Faisons comme si on savait calculer sur les réels

On a un sous-ensemble manipulable des réels

par ex: les rationnels

Solution 2

Concevons les algorithmes avec théorèmes

Faisons comme si on savait calculer sur les réels

On a un sous-ensemble manipulable des réels

par ex: les rationnels

algébriques ?

Solution 2

Concevons les algorithmes avec théorèmes

Faisons comme si on savait calculer sur les réels

On a un sous-ensemble manipulable des réels

par ex: les rationnels

algébriques ?

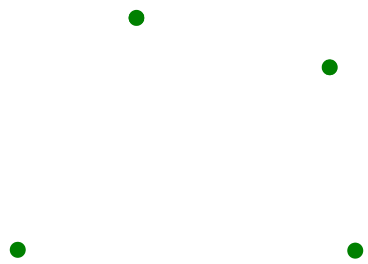
Calcul exact

Prédicats versus constructions

Prédicats versus constructions

Prédicat

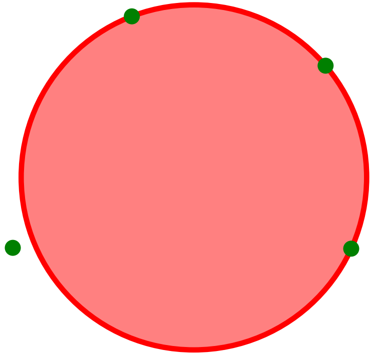
test cocircularité



Prédicats versus constructions

Prédicat

test cocircularité

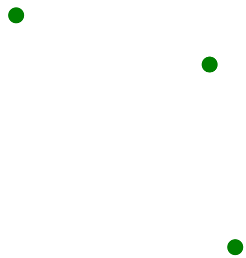


Décision (immédiate)

Prédicats versus constructions

Construction

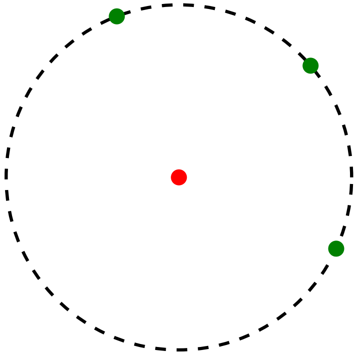
centre cercle circonscrit



Prédicats versus constructions

Construction

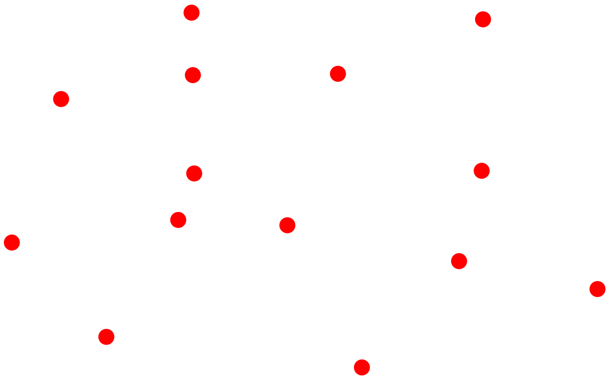
centre cercle circonscrit



Nouvel objet réutilisable

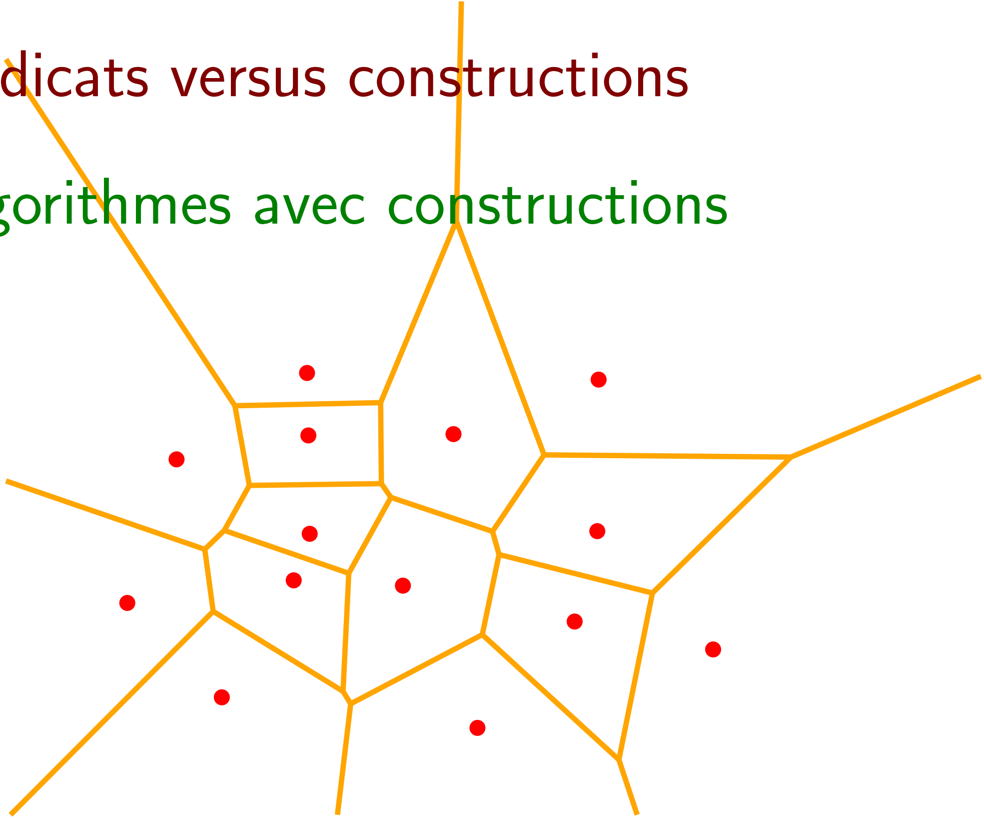
(décision ultérieure)

Prédicats versus constructions



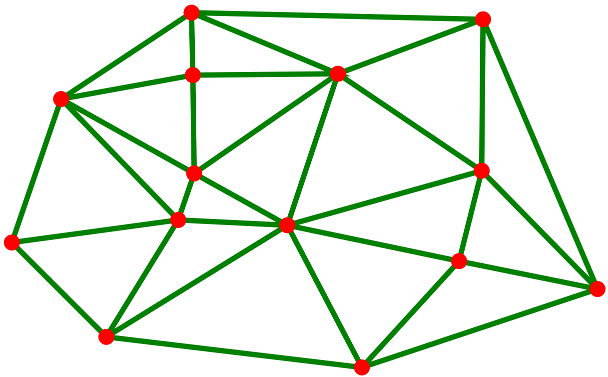
Prédicats versus constructions

Algorithmes avec constructions



Prédicats versus constructions

Algorithmes avec prédicats



Algorithmes avec prédicats

Calcul exact

Algorithmes avec prédicats

Calcul exact

nécessaire ?

Algorithmes avec prédicats

Calcul exact

Paradigme du calcul exact

Algorithmes avec prédicats

Répondre exactement aux prédicats

mais pas forcément du calcul exact

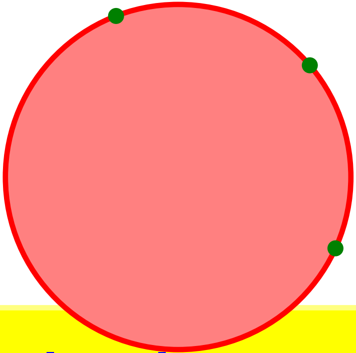
Paradigme du calcul exact

Algorithmes avec prédicats

Répondre exactement aux prédicats

mais pas forcément du calcul exact

test cocircularité



Paradigme du calcul exact

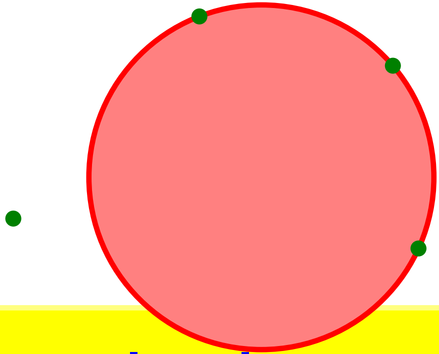
Algorithmes avec prédicats

Répondre exactement aux prédicats

mais pas forcément du calcul exact

test cocircularité

calcul exact superflu



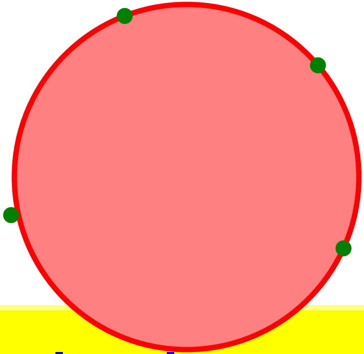
Paradigme du calcul exact

Algorithmes avec prédicats

Répondre exactement aux prédicats

mais pas forcément du calcul exact

test cocircularité



calcul exact nécessaire

Paradigme du calcul exact

calcul exact nécessaire

pour la cohérence des résultats

calcul exact nécessaire

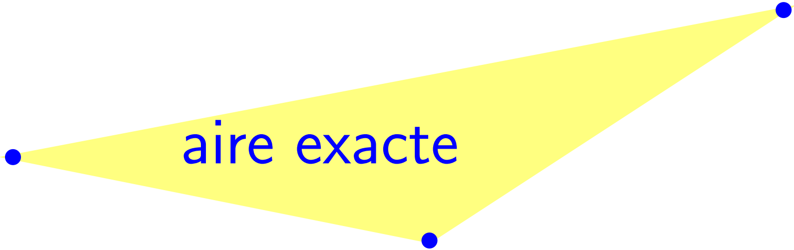
pour la cohérence des résultats

pas pour l'exactitude

Répondre exactement aux prédicats

Répondre exactement aux prédicats

Calcul exact



Répondre exactement aux prédicats

Calcul exact

Calcul approché

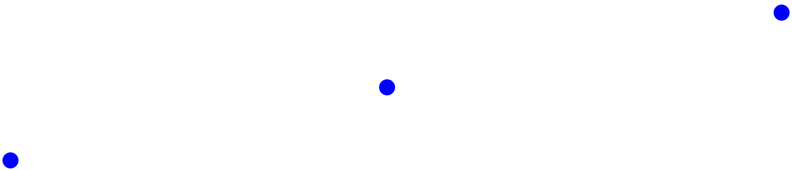
Répondre exactement aux prédicats

Calcul exact

Calcul approché certifié

aire approchée dont le signe est sur

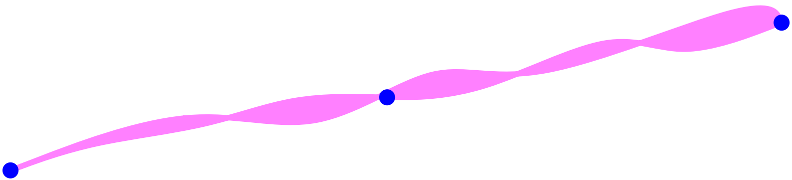
Répondre exactement aux prédicats



Répondre exactement aux prédicats

et si c'est pas sur

on peut se rabattre sur

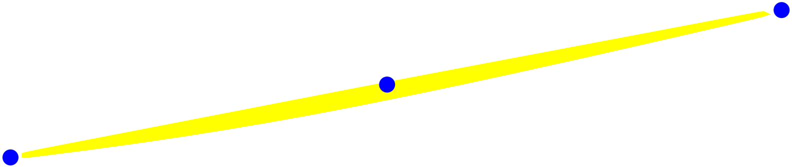


Répondre exactement aux prédicats

et si c'est pas sur

on peut se rabattre sur

le calcul exact



Comment certifier un calcul approché ?

Comment certifier un calcul approché ?

calcul d'erreur

`x + y` ?

Comment certifier un calcul approché ?

calcul d'erreur

$$\texttt{x} \oplus \texttt{y} = \texttt{x+y} + \text{erreur}$$

Comment certifier un calcul approché ?

calcul d'erreur

$$\mathtt{x} \oplus \mathtt{y} = \mathtt{x+y} + \text{erreur}$$

$$\overleftrightarrow{\mathtt{x} + \mathtt{y} \text{ exact}}$$

$$0.11010\ldots010010101001 \times 2^e$$

Comment certifier un calcul approché ?

calcul d'erreur

$$\mathtt{x} \oplus \mathtt{y} = \mathtt{x+y} + \text{erreur}$$

IEEE 754

$\mathtt{x} + \mathtt{y}$ exact

$$0.11010\ldots010\boxed{1}10101001 \times 2^{e}$$

53 bits

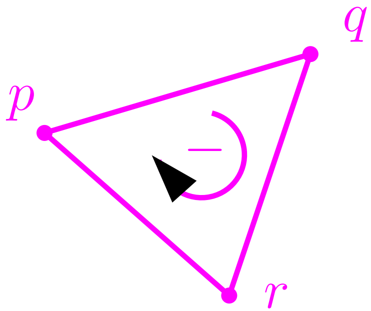
$\mathtt{x} \oplus \mathtt{y}$

$$\text{erreur} \leq |\mathtt{x+y}|2^{-54}$$

Filtre statique

exemple : prédicat d'orientation

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$

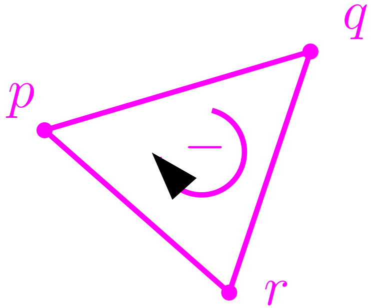


Filtre statique

exemple : prédicat d'orientation

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$

$$|x_\star||y_\star| \leq M$$



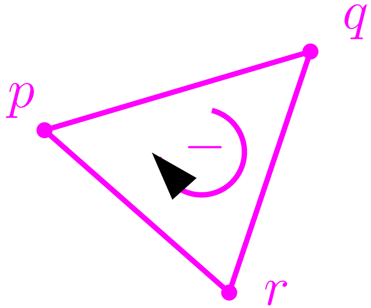
Filtre statique

exemple : prédicat d'orientation

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$

$$|x_\star||y_\star| \leq M$$

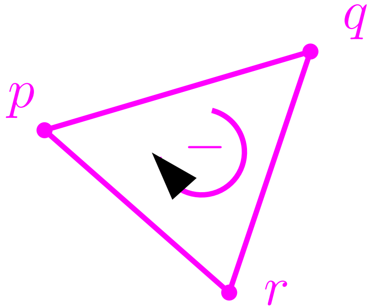
$$|x_\star - x_p| \leq 2M$$



Filtre statique

exemple : prédicat d'orientation

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$



$$|x_\star| |y_\star| \leq M$$

$$|x_\star - x_p| \leq 2M$$

$$\text{erreur}_{x_\star - x_p} \leq 2M2^{-54} = 2^{-53}M$$

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$

$$|x_\star||y_\star| \leq M$$

$$|x_\star - x_p| \leq 2M$$

$$\text{erreur}_{x_\star - x_p} \leq 2M2^{-54} = 2^{-53}M$$

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$

$$|x_\star||y_\star| \leq M$$

$$|x_\star - x_p| \leq 2M$$

$$\mathsf{erreur}_{x_\star - x_p} \leq 2M2^{-54} = 2^{-53}M$$

$$|(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)| \leq 4M^2$$

$$|x_\star||y_\star| \leq M$$

$$|x_\star - x_p| \leq 2M$$

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$

$$\text{erreur}_{x_\star - x_p} \leq 2M2^{-54} = 2^{-53}M$$

$$|(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)| \leq 4M^2$$

$$\begin{aligned} \text{erreur}_{(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)} &\leq 4M^2 2^{-53} + 2(2M.2^{-53}M) \\ &\leq 2^{-50}M^2 \end{aligned}$$

$$|(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)| \leq 4M^2$$

$$\text{erreur}_{(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)} \leq 2^{-50} M^2$$

$$|(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)| \leq 4M^2$$

$$\textsf{erreur}_{(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)} \leq 2^{-50} M^2$$

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix} \leq 8M^2$$

$$|(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)| \leq 4M^2$$

$$\textsf{erreur}_{(x_\star - x_p)(y_\star - y_p)} \leq 2^{-50} M^2$$

$$\left| \begin{array}{cc} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{array} \right| \leq 8M^2$$

$$\textsf{erreur}_{\left| \begin{array}{cc} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{array} \right|} \leq 8M^2 2^{-53} + 2.2^{-50} M^2$$

$$\leq 3.2^{-50} M^2$$

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix} \leq 8M^2$$

$$\text{erreur}\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix} \leq 3.2^{-50}M^2$$

$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix} \leq 8M^2$$

$$\text{erreur}\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix} \leq 3.2^{-50} M^2$$

si $|\text{valeur}| \geq$ erreur

$$\left|\begin{matrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{matrix}\right| \leq 8M^2$$

$$\text{erreur}\left|\begin{matrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{matrix}\right| \leq 3.2^{-50} M^2$$

si $|$valeur$|$ $\geq$erreur

le prédicat est certifié

$$\left|\begin{matrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{matrix}\right| \leq 8M^2$$

$$\text{erreur}\left|\begin{matrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{matrix}\right| \leq 3.2^{-50} M^2$$

si $|$valeur$|$ $\geq$erreur

le prédicat est certifié

sinon

calcul exact (entier)

Filtre statique

Contre

Pour

Filtre statique

Contre

- Hypothèses sur les données
- Opérations restreintes $+ \; - \; \times \; \sqrt{\ }$

Pour

Filtre statique

Contre

Hypothèses sur les données

Opérations restreintes $+ \; - \; \times \; \sqrt{}$

Taux de succés correct

Pour

Filtre statique

Contre

Hypothèses sur les données

Opérations restreintes $+ \quad - \quad \times \quad \sqrt{}$

Taux de succés correct

Très rapide

Pour

Filtre statique

Contre

Hypothèses sur les données

Opérations restreintes $+ \; - \; \times \sqrt{\ }$

erreur à la main ?

Taux de succés correct

Très rapide

Pour (erreur calculée à la compilation)

Filtre dynamique

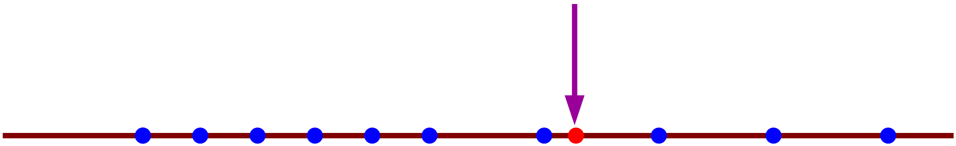
Filtre dynamique

par exemple avec arithmétique d'intervalles

Filtre dynamique

par exemple avec arithmétique d'intervalles

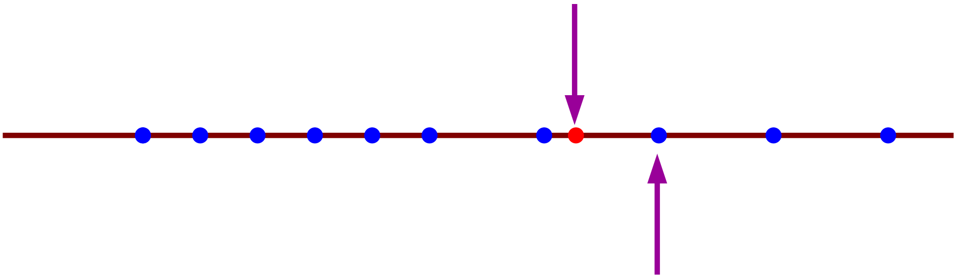
a non représentable



Filtre dynamique

par exemple avec arithmétique d'intervalles

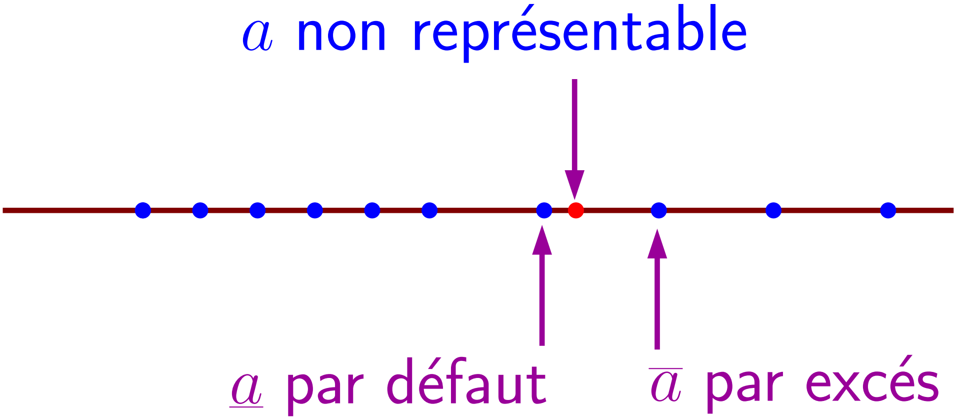
a non représentable



$\overline{a}$ par excés

Filtre dynamique

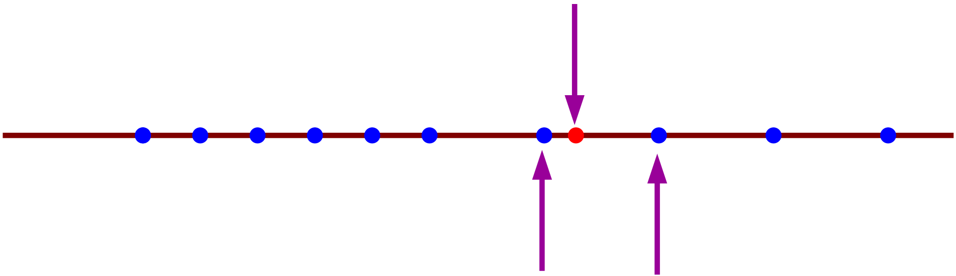
par exemple avec arithmétique d'intervalles



Filtre dynamique

par exemple avec arithmétique d'intervalles

a non représentable



$\underline{a}$ par défaut $\overline{a}$ par excés

$$[\underline{a}, \overline{a}]$$

arithmétique d'intervalles

$$[\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{b}, \overline{b}] =$$

arithmétique d'intervalles

$$[\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a}\underline{+}\underline{b}, \overline{a}\overline{+}\overline{b}]$$

arithmétique d'intervalles

$$[\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{\underline{a}+\underline{b}}, \overline{\overline{a}+\overline{b}}]$$

on propage l'approximation

arithmétique d'intervalles

$$[\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a}\underline{+}\underline{b}, \overline{a}\overline{+}\overline{b}]$$

on propage l'approximation

si $0 \notin [\underline{resultat}, \overline{resultat}]$

le prédicat est certifié

arithmétique d'intervalles

$$[\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{\underline{a}+\underline{b}}, \overline{\overline{a}+\overline{b}}]$$

on propage l'approximation

si $0 \notin [\underline{resultat}, \overline{resultat}]$

le prédicat est certifié

sinon

calcul exact (entier)

Programmation

```
template <class FT>
Orientation orientation
    ( FT px, FT py, FT qx, FT qy, FT rx, FT ry)
{
   return sign( (qx-px)*(ry-py)-(rx-px)*(qy-py) );
}
```

Programmation

```
template <class FT>
Orientation orientation
    ( FT px, FT py, FT qx, FT qy, FT rx, FT ry)
{
   return sign( (qx-px)*(ry-py)-(rx-px)*(qy-py) );
}
```

`FT` peut être double

Programmation

```
template <class FT>
Orientation orientation
    ( FT px, FT py, FT qx, FT qy, FT rx, FT ry)
{
   return sign( (qx-px)*(ry-py)-(rx-px)*(qy-py) );
}
```

`FT` peut être `double`

mais aussi `Interval`

Filtre dynamique

Contre

Pour

Filtre dynamique

Contre

Opérations complètes

si on sait faire intervalle

Pas d'hypothèses sur les données

Pour

Filtre dynamique

Contre

Opérations complètes

si on sait faire intervalle

Taux de succés excellent

Pas d'hypothèses sur les données

Pour

Filtre dynamique

Contre

Moins rapide

Opérations complètes

si on sait faire intervalle

Taux de succés excellent

Pas d'hypothèses sur les données

Pour

Filtre dynamique

Contre

Moins rapide (erreur à l'execution)

Opérations complètes

si on sait faire intervalle

Taux de succés excellent

Pas d'hypothèses sur les données

Pour

Conclusion

paradigme du calcul exact

on isole les problèmes de cohérence

dans les prédicats

Conclusion

paradigme du calcul exact

on isole les problèmes de cohérence

dans les prédicats

Conclusion

paradigme du calcul exact

on isole les problèmes de cohérence
dans les prédicats

on répond exactement au prédicat

Conclusion

paradigme du calcul exact

on isole les problèmes de cohérence
dans les prédicats

on répond exactement au prédicat

1- c'est pour la cohérence, pas pour l'exactitude

2- ça veut pas dire forcément arithmétique exacte

Cas dégénérés

Cas dégénérés

et si les points sont alignés

cocycliques

...

Cas dégénérés

et si les points sont alignés

cocycliques

...

que faut-il faire ?

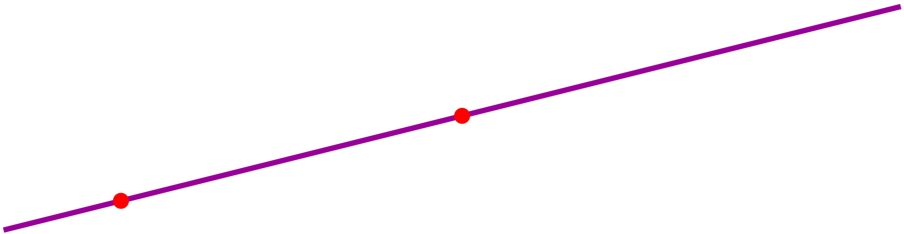
Cas dégénérés

Mauvais argument :

Cas dégénérés

Mauvais argument :

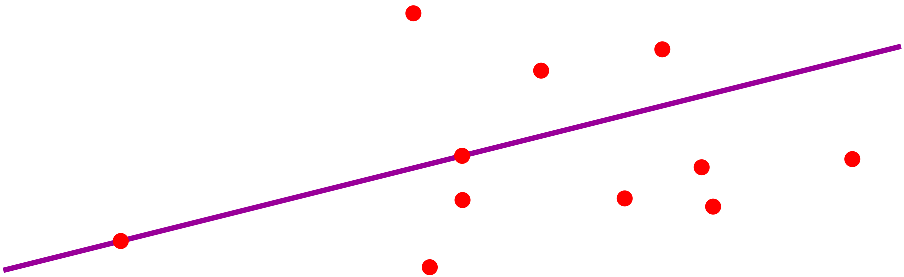
ça n'arrive pas



Cas dégénérés

Mauvais argument :

ça n'arrive pas



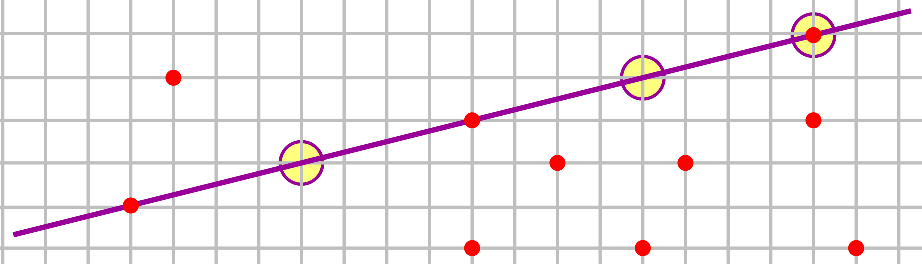
Proba nulle

Cas dégénérés

Mauvais argument :

ça n'arrive pas

Mais si car les points sont discrêts



Retour sur l'origine du problème

Retour sur l'origine du problème

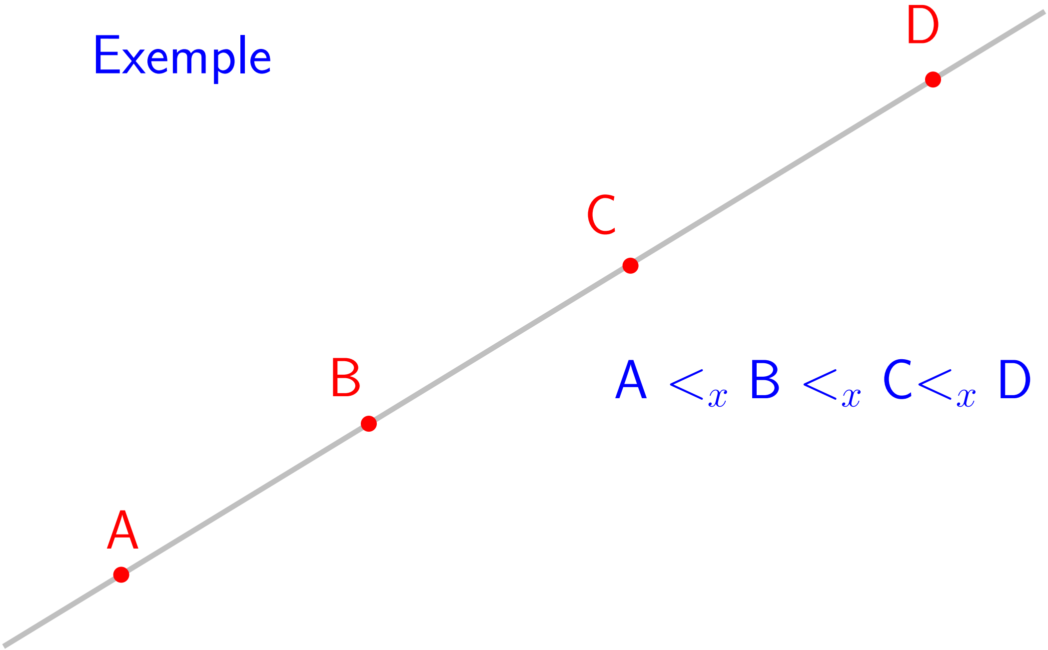
On a tendance à utiliser la géométrie

i.e. les théorèmes géométriques

dans les algorithmes

Robustesse

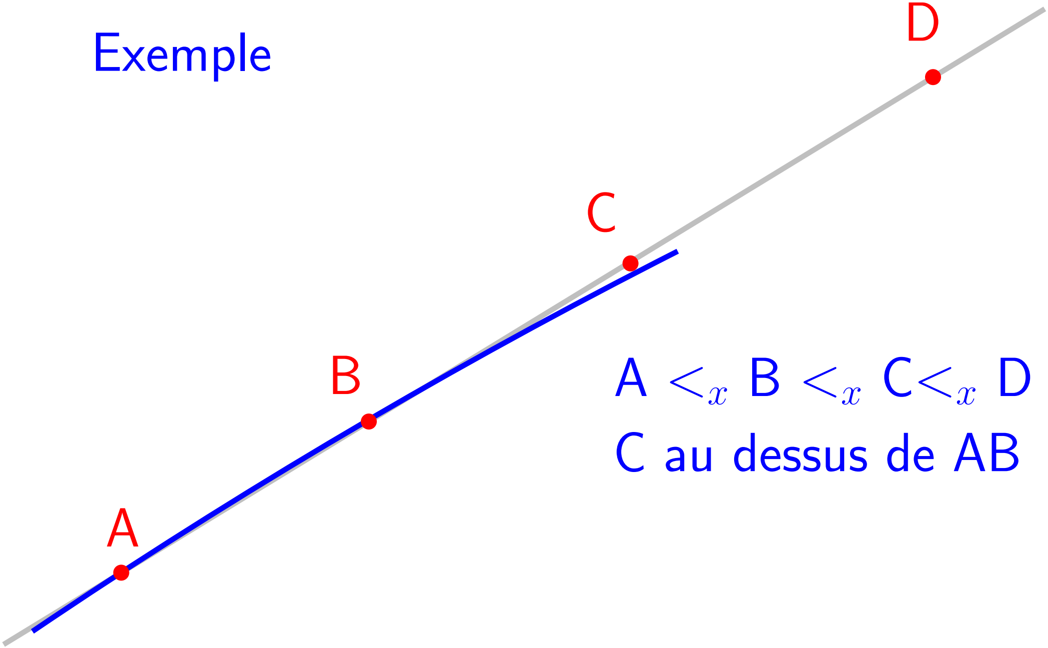
Exemple



$$\mathsf{A} <_x \mathsf{B} <_x \mathsf{C} <_x \mathsf{D}$$

Robustesse

Exemple

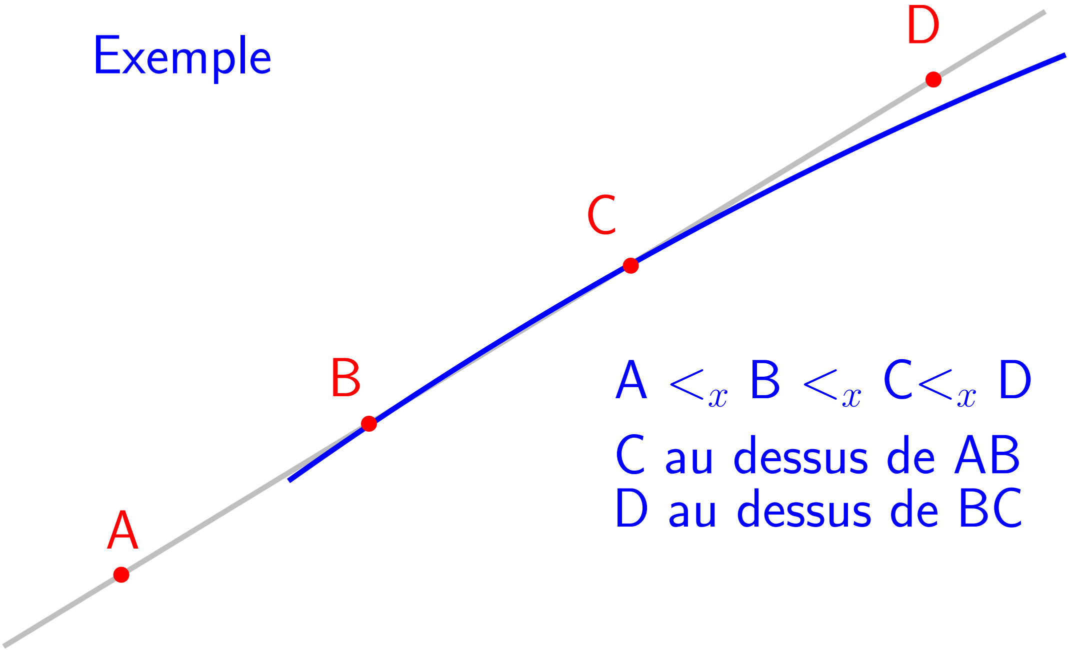


A $<_x$ B $<_x$ C$<_x$ D

C au dessus de AB

Robustesse

Exemple



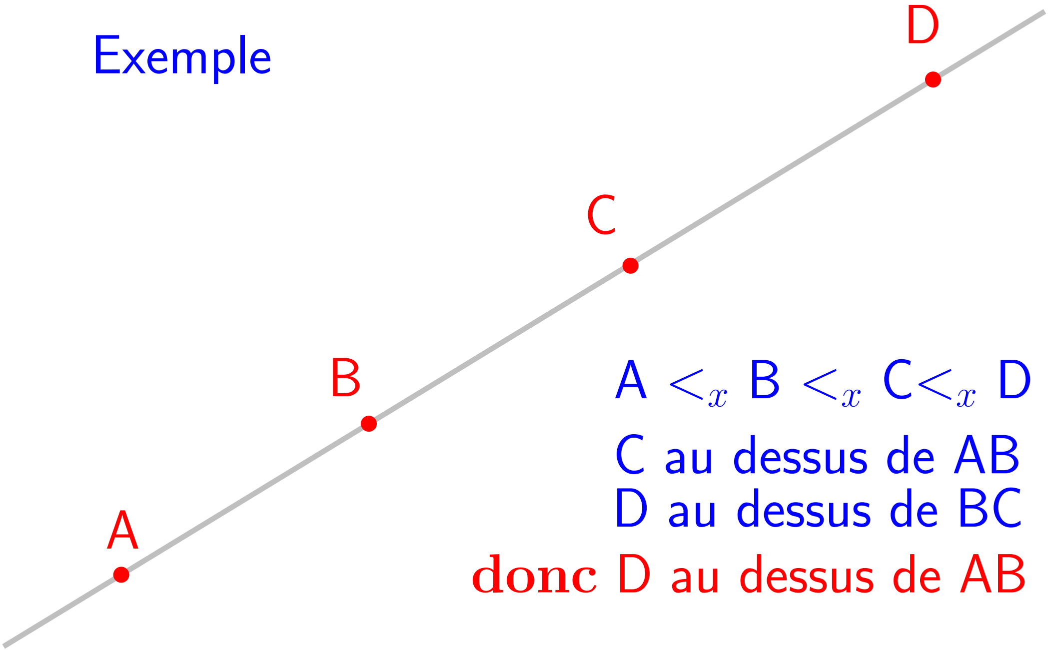
A $<_x$ B $<_x$ C$<_x$ D

C au dessus de AB

D au dessus de BC

Robustesse

Exemple



A $<_x$ B $<_x$ C$<_x$ D

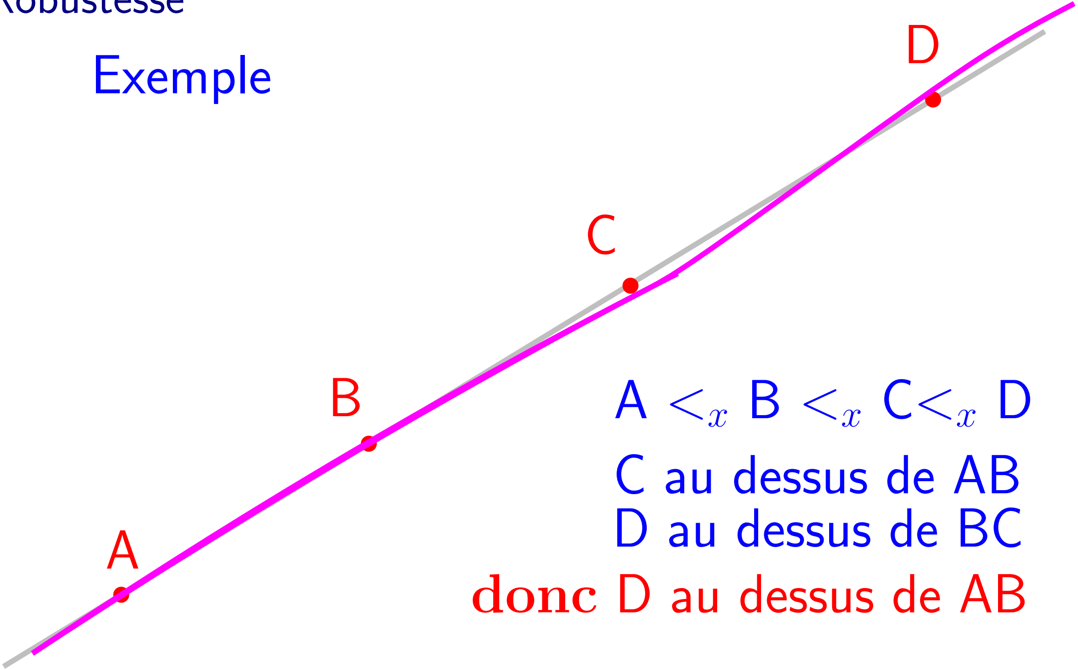
C au dessus de AB

D au dessus de BC

donc D au dessus de AB

Robustesse

Exemple



A $<_x$ B $<_x$ C$<_x$ D

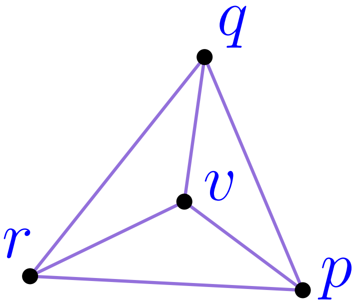
C au dessus de AB

D au dessus de BC

donc D au dessus de AB

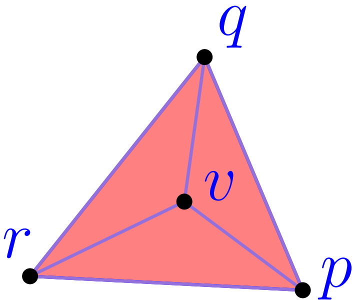
mais l'évaluation des prédicats pourrait donner le contraire

théorème géométrique utile aux algorithmes



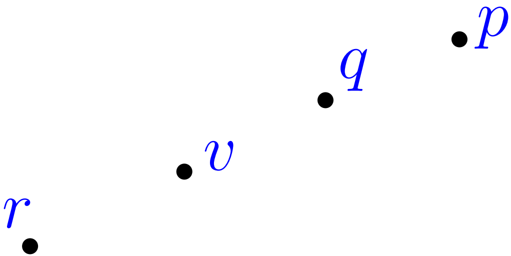
$$\left.\begin{matrix} pqv \\ qrv \\ rpv \end{matrix}\right. \ \text{ccw} \quad \Longrightarrow \quad pqr$$

théorème géométrique utile aux algorithmes

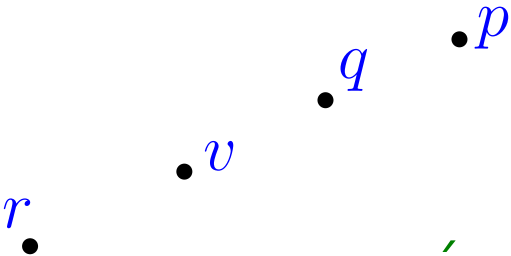


pqv
qrv ccw $\Longrightarrow$ pqr $\boxed{\text{ccw}}$
rpv

si les points sont alignés

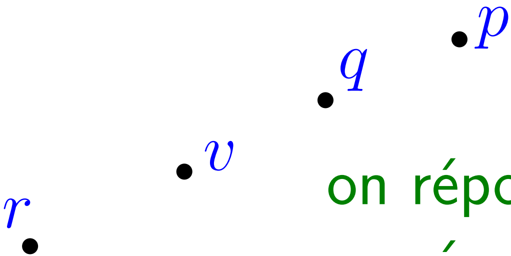


si les points sont alignés



on répond alignés ?

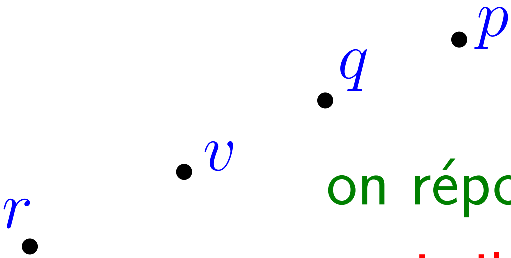
si les points sont alignés



on répond n'importe quoi ?

on répond alignés ?

si les points sont alignés



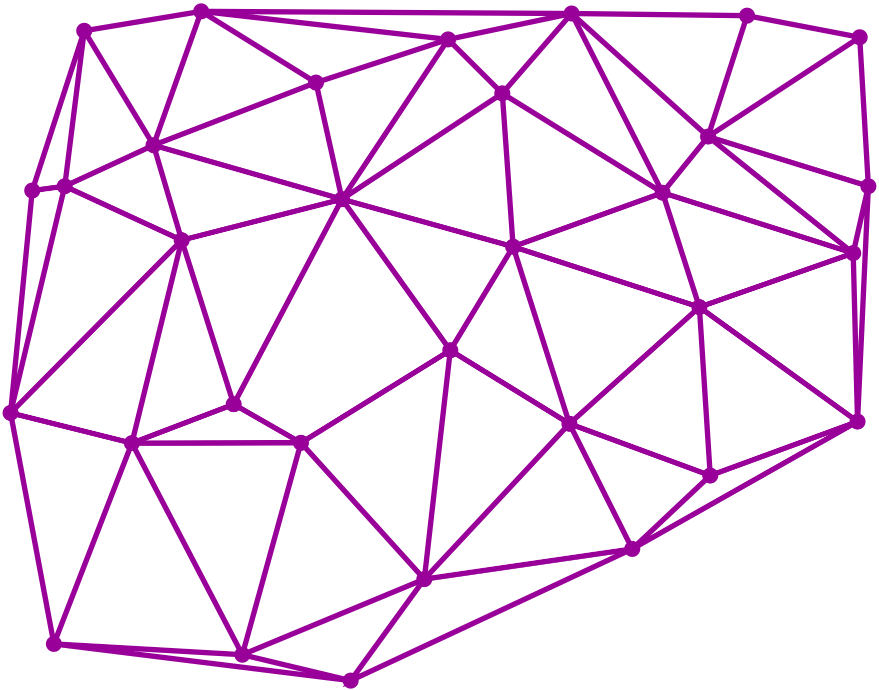
on répond n'importe quoi ?

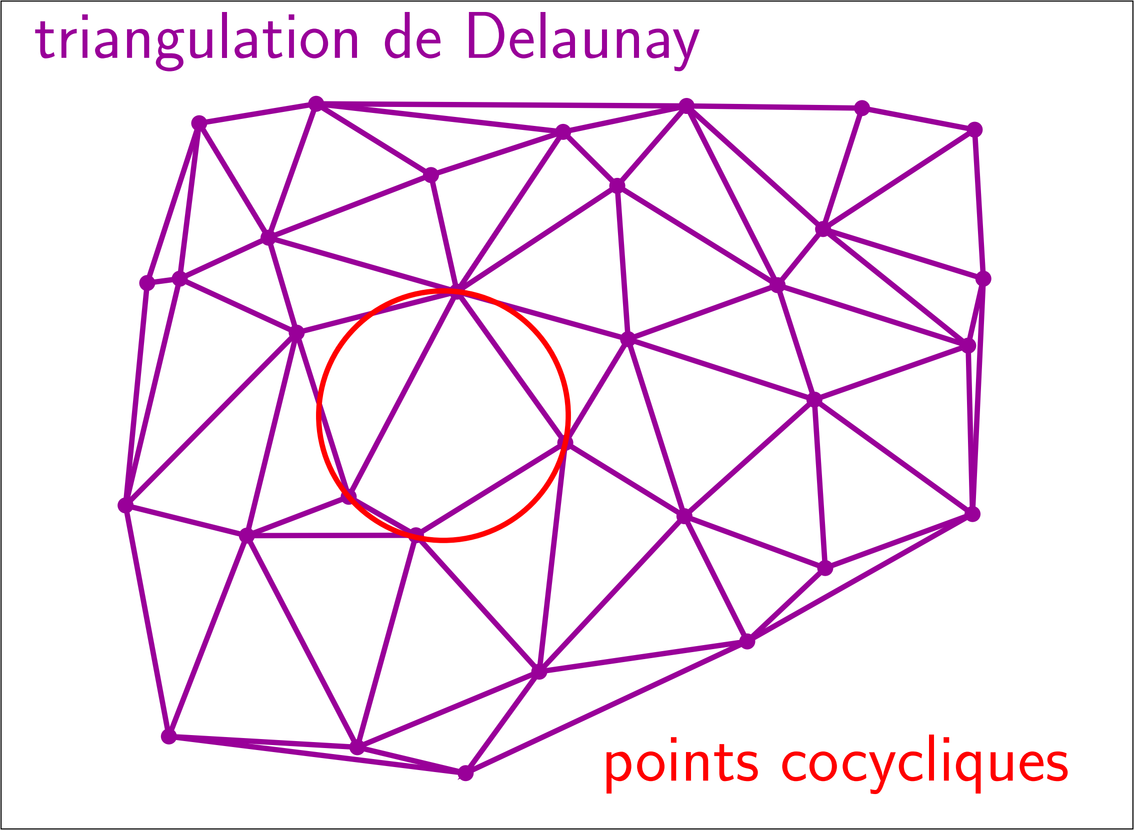
mais il faut être cohérent

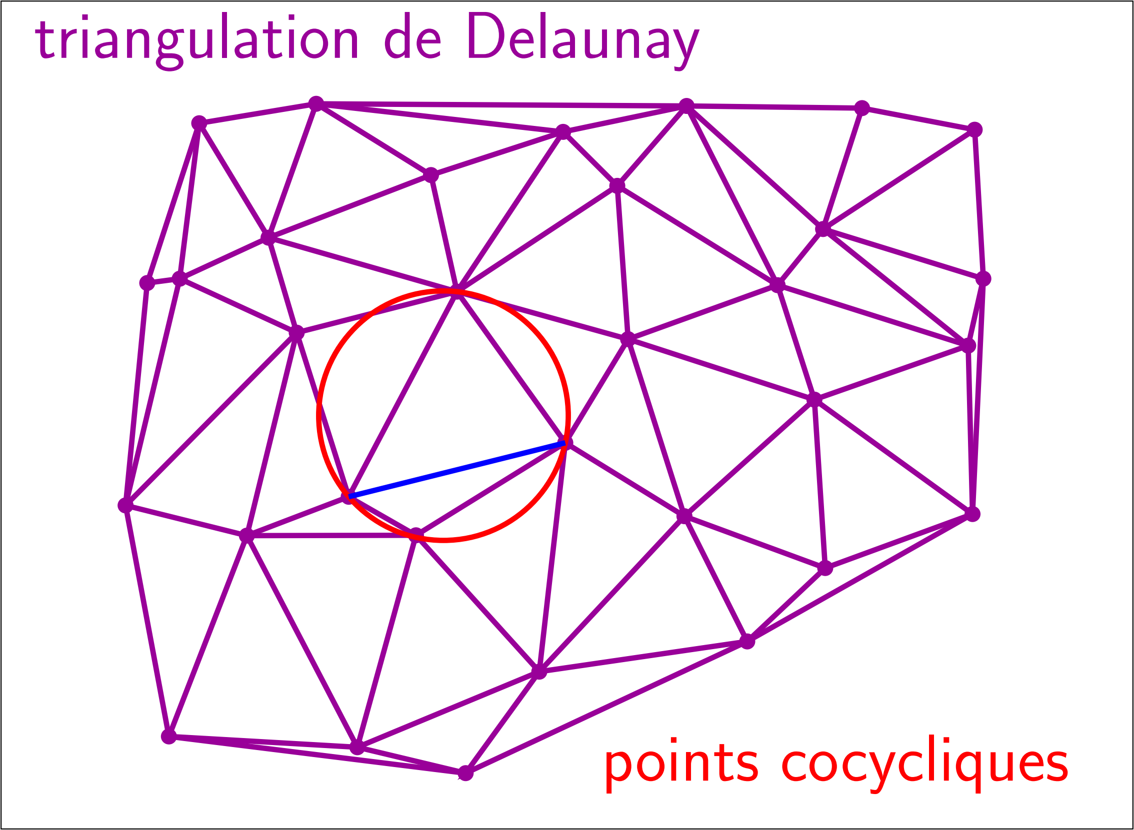
vis à vis des théorèmes géométriques

$$\left.\begin{array}{l} pqv \\ qrv \\ rpv \end{array}\right. \text{ ccw} \quad \Longrightarrow \quad pqr \ \boxed{\text{ccw}}$$

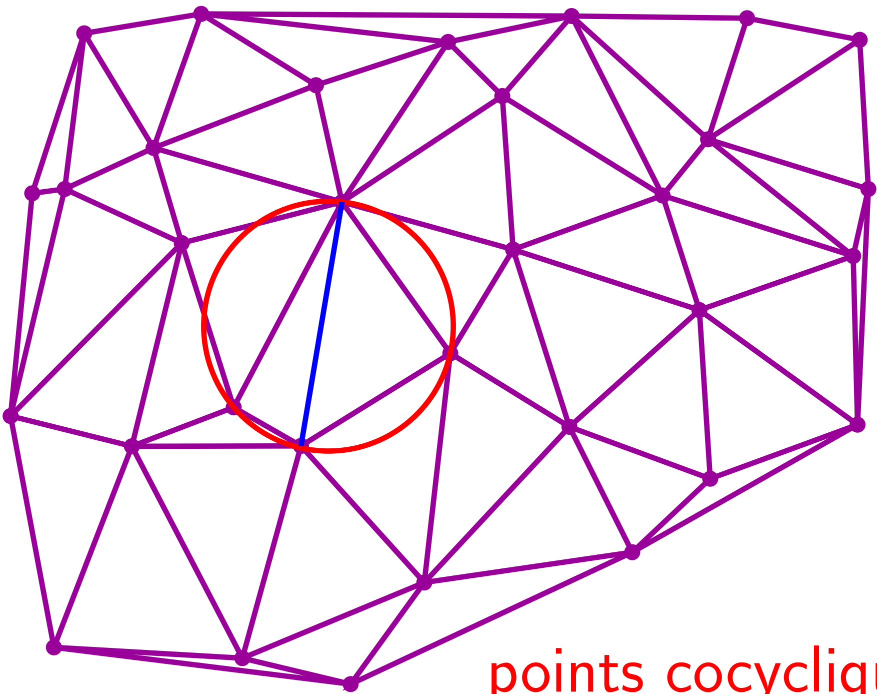
triangulation de Delaunay




triangulation de Delaunay
points cocycliques

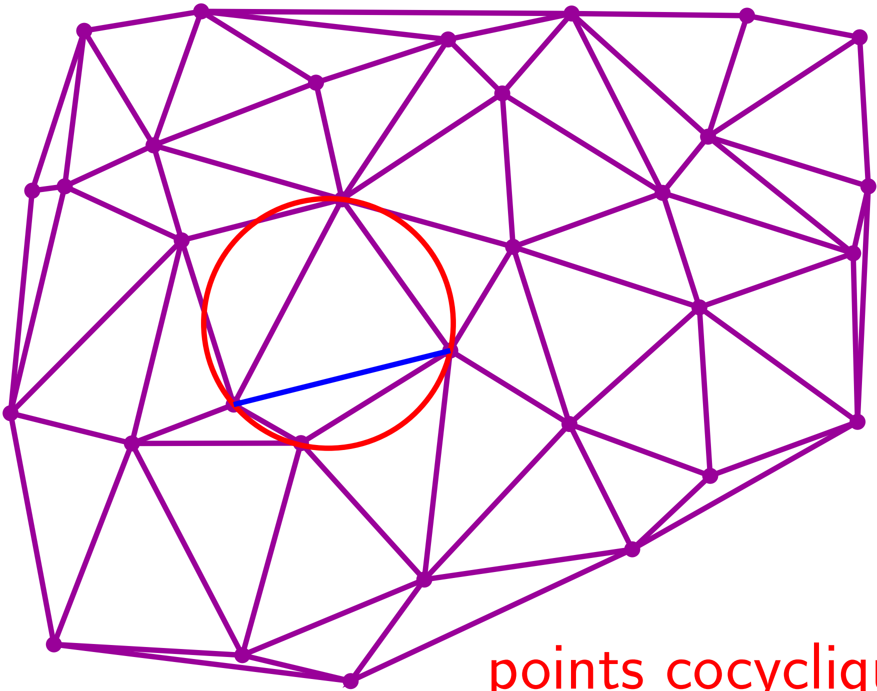

triangulation de Delaunay
points cocycliques

triangulation de Delaunay



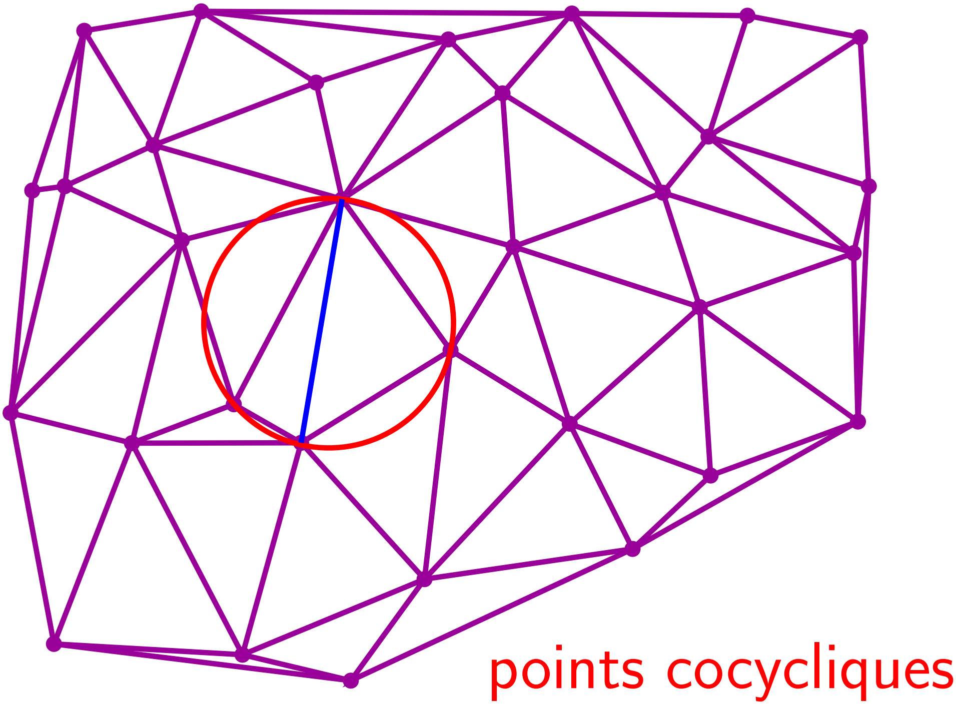
points cocycliques

triangulation de Delaunay

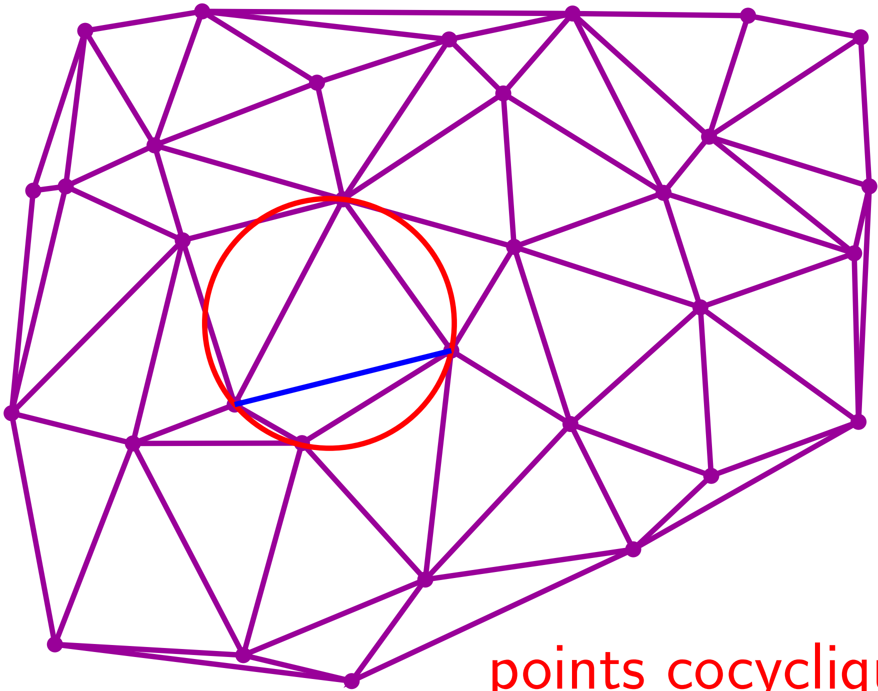


points cocycliques

triangulation de Delaunay

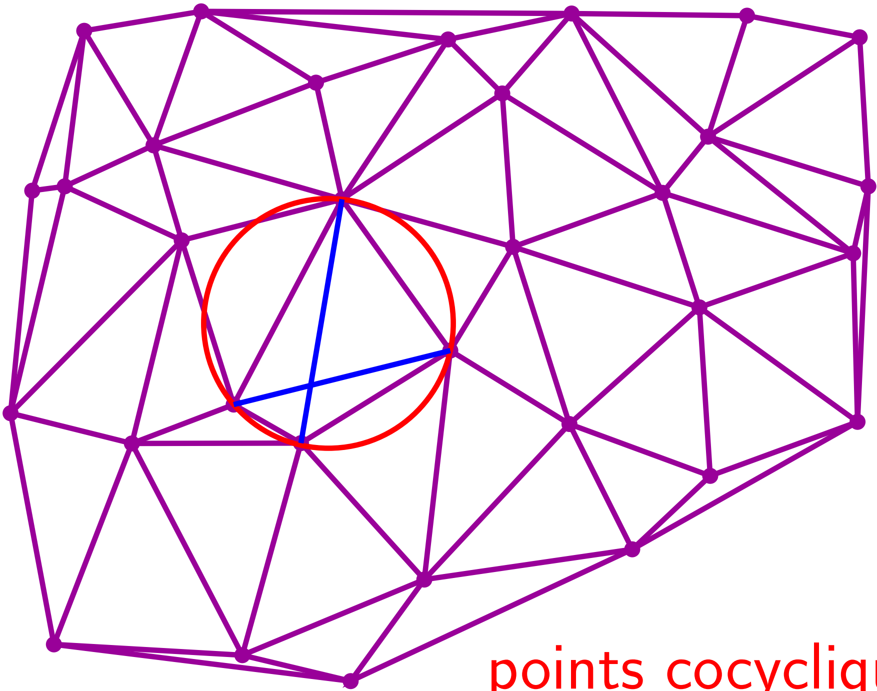


triangulation de Delaunay



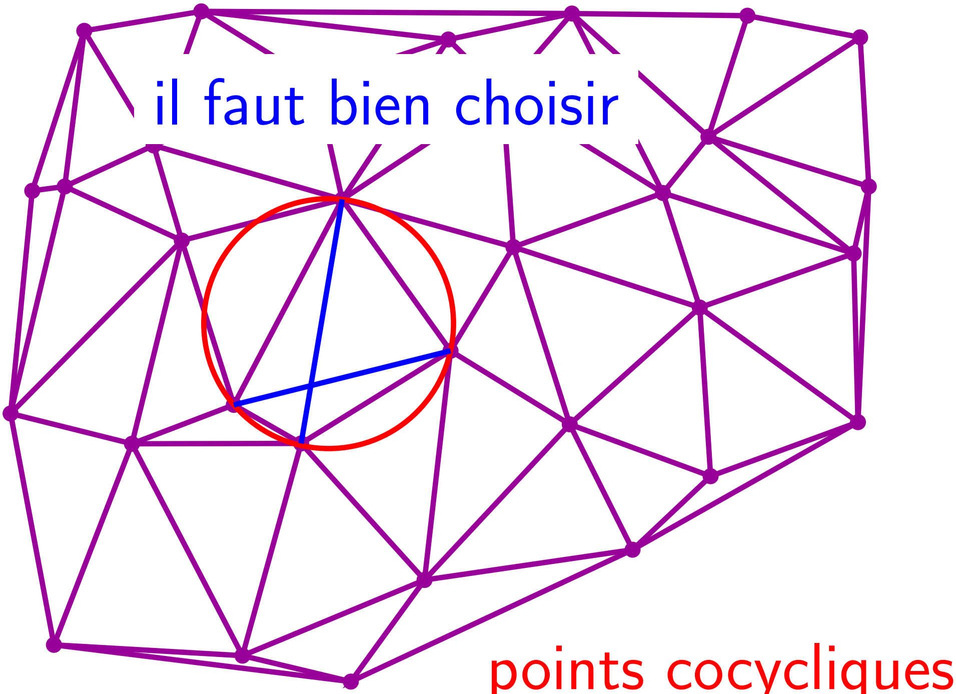
points cocycliques

triangulation de Delaunay

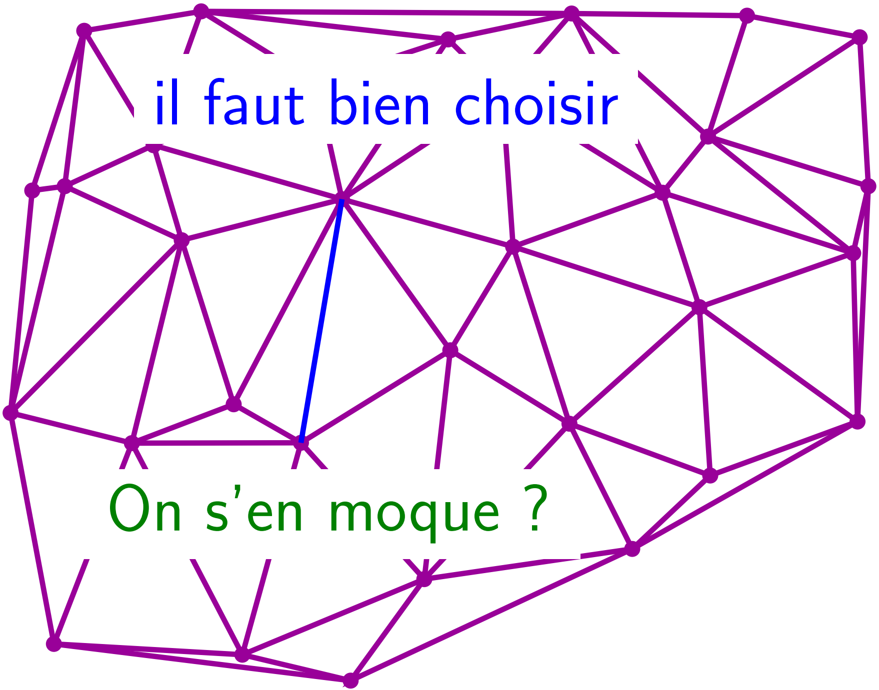


points cocycliques

triangulation de Delaunay

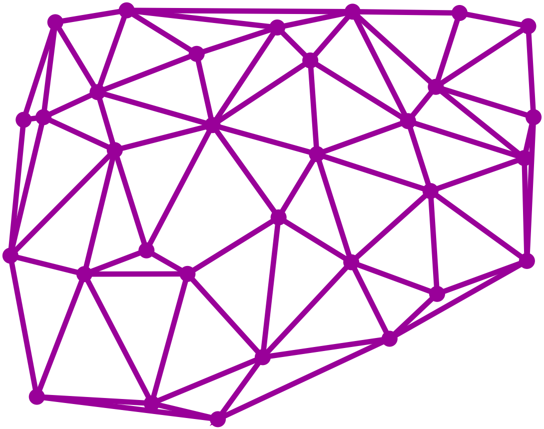


triangulation de Delaunay



soit on traite les cas particuliers explicitement

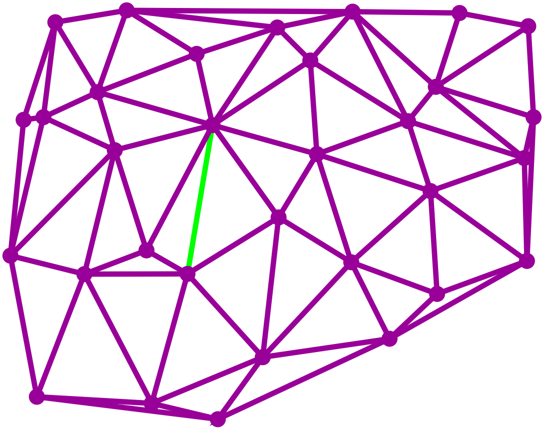
soit on traite les cas particuliers explicitement



l'arête litigieuse

est absente

soit on traite les cas particuliers explicitement

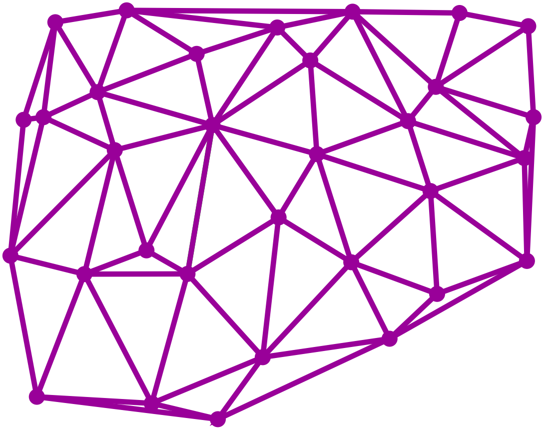


l'arête litigieuse

est absente

est “marquée”

soit on traite les cas particuliers explicitement



l'arête litigieuse

est absente

est "marquée"

soit on simule l'absence de cas particuliers

SoS : Simulation of Simplicity

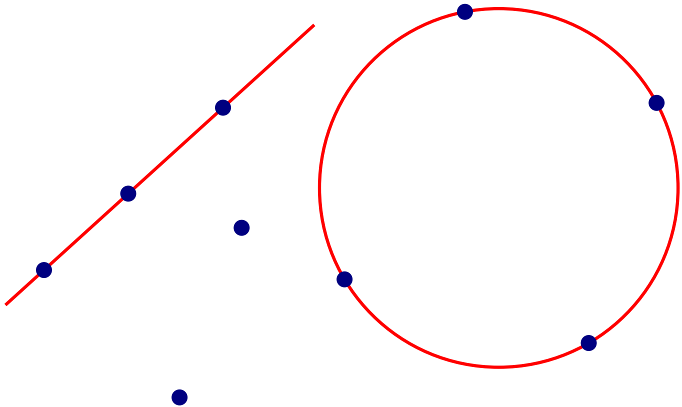
SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

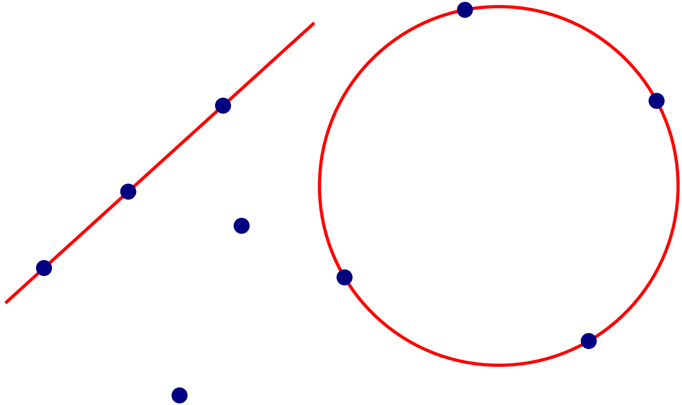
Les données



SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

Les données eventuellement dégénérées

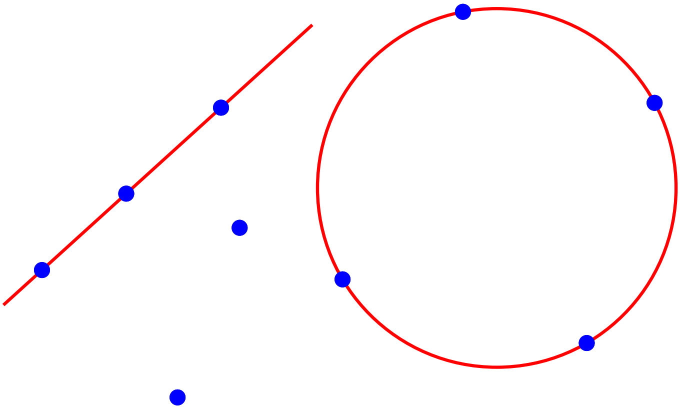


SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

Les données eventuellement dégénérées vont dépendre d'un paramètre ε

$\varepsilon = \boxed{}$

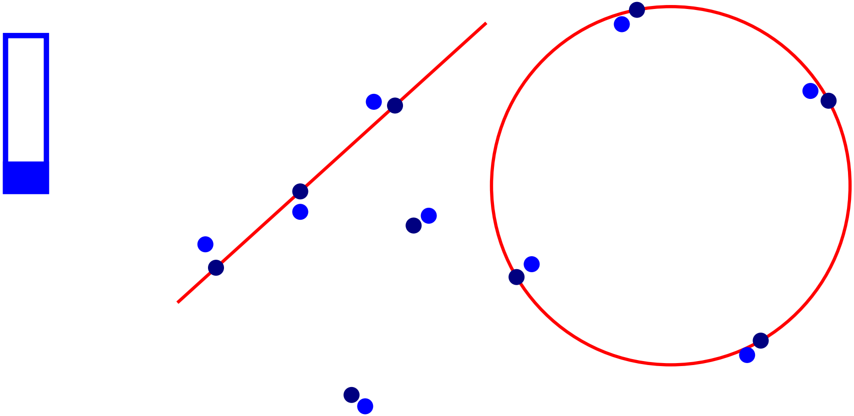


SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

Les données eventuellement dégénérées
vont dépendre d'un paramètre ε

$\varepsilon =$

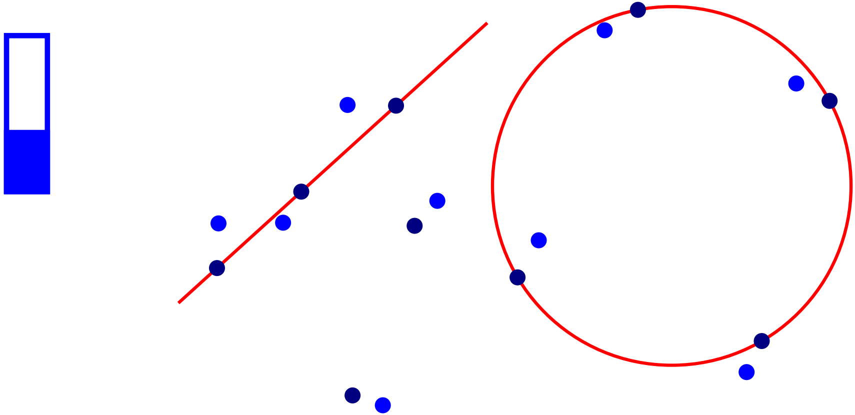


SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

Les données eventuellement dégénérées vont dépendre d'un paramètre ε

$\varepsilon =$

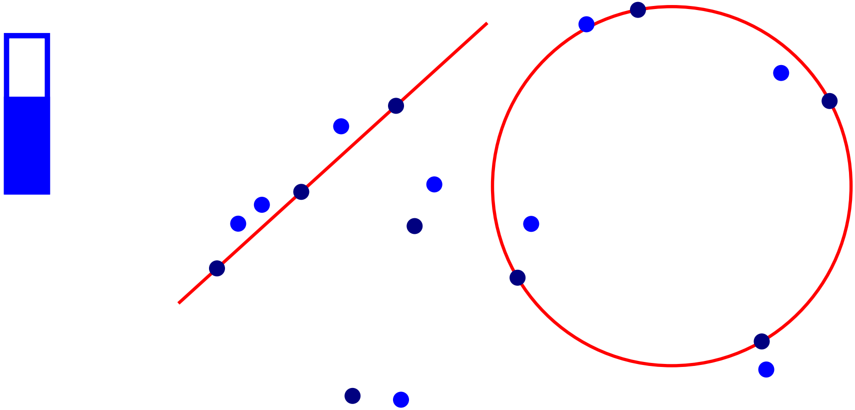


SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

Les données eventuellement dégénérées vont dépendre d'un paramètre ε

$\varepsilon =$

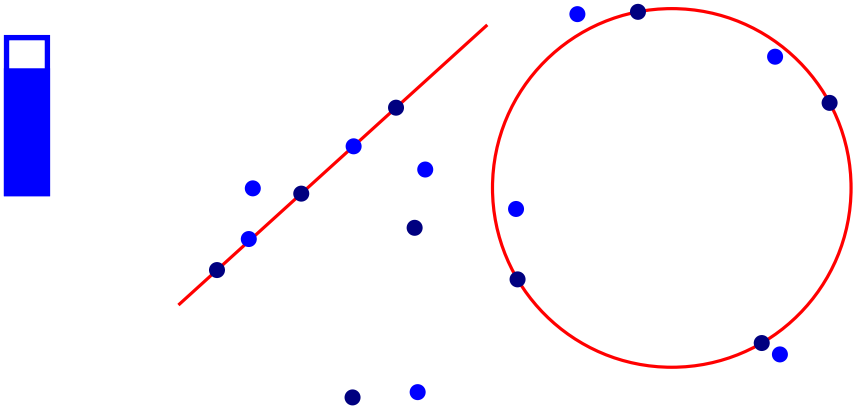


SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

Les données eventuellement dégénérées
vont dépendre d'un paramètre ε

$\varepsilon =$

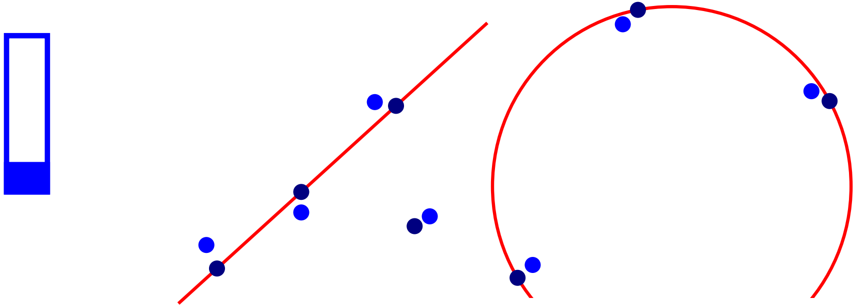


SoS : Simulation of Simplicity

Perturbation symboliques

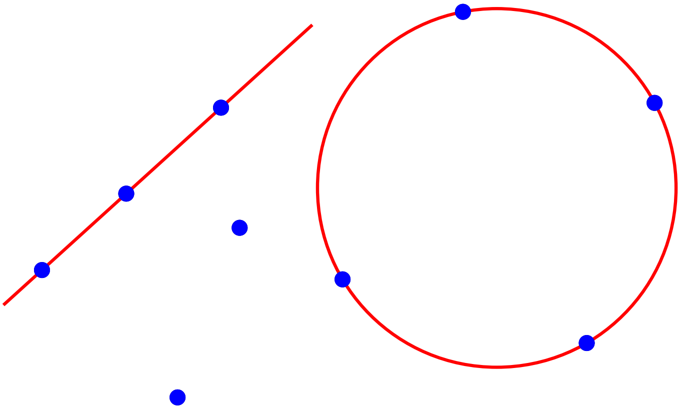
Les données eventuellement dégénérées
vont dépendre d'un paramètre ε

$\varepsilon =$



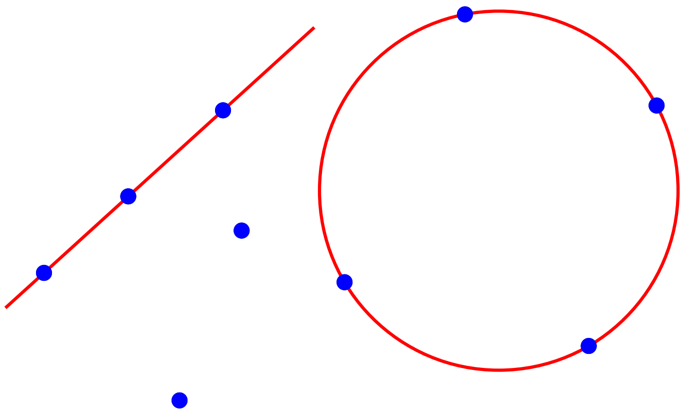
On regarde le problème limite $\varepsilon \to 0$

comme pour les problèmes de précision



comme pour les problèmes de précision

Tout se passe dans les prédicats



Les données vont dépendre d'un paramètre ε

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

comment ?

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

pour $\varepsilon = 0$ c'est (potentiellement) dégénéré

On étudie le problème limite

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

pour $\varepsilon = 0$ c'est (potentiellement) dégénéré

On étudie le problème limite

il faut que, quand $\varepsilon \to 0^+$

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

pour $\varepsilon = 0$ c'est (potentiellement) dégénéré

On étudie le problème limite

il faut que, quand $\varepsilon \to 0^+$

1 les dégénérescences soient levées

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

pour $\varepsilon = 0$ c'est (potentiellement) dégénéré

On étudie le problème limite

il faut que, quand $\varepsilon \to 0^+$

1 les dégénérescences soient levées

d'une manière controlée ?

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

pour $\varepsilon = 0$ c'est (potentiellement) dégénéré

On étudie le problème limite

il faut que, quand $\varepsilon \to 0^+$

1 les dégénérescences soient levées

d'une manière controlée ?

canonique ?

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

pour $\varepsilon = 0$ c'est (potentiellement) dégénéré

On étudie le problème limite

il faut que, quand $\varepsilon \to 0^+$

1 les dégénérescences soient levées

d'une manière controlée ?

canonique ?

que la limite ait du sens

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

pour $\varepsilon = 0$ c'est (potentiellement) dégénéré

On étudie le problème limite

il faut que, quand $\varepsilon \longrightarrow 0^+$

1 les dégénérescences soient levées

d'une manière controlée ?

canonique ?

que la limite ait du sens

2 que ça coute pas plus cher

en temps, en précision. . .

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

comment ?

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

Solution 1 [EM]

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

Solution 1 [EM]

$$(x_1, y_1)$$
$$(x_2, y_2)$$
$$(x_3, y_3)$$
$$(x_4, y_4)$$
$$(x_5, y_5)$$

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

Solution 1 [EM]

$$
\begin{array}{ll}
(x_1, y_1) & (x_1 + \varepsilon, y_1 + \varepsilon^2) \\
(x_2, y_2) & (x_2 + 2\varepsilon^4, y_2 + 4\varepsilon^8) \\
(x_3, y_3) & (x_3 + 3\varepsilon^{16}, y_3 + 9\varepsilon^{32}) \\
(x_4, y_4) & (x_4 + 4\varepsilon^{2^6}, y_4 + 4^2\varepsilon^{2^7}) \\
(x_5, y_5) & (x_5 + 5\varepsilon^{2^8}, y_5 + 5^2\varepsilon^{2^9})
\end{array}
$$

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

Solution 1 [EM]

$$
\begin{aligned}
&(x_1+\varepsilon, y_1+\varepsilon^2)\\
&(x_2+2\varepsilon^4, y_2+4\varepsilon^8)\\
&(x_3+3\varepsilon^{16}, y_3+9\varepsilon^{32})\\
&(x_4+4\varepsilon^{2^6}, y_4+4^2\varepsilon^{2^7})\\
&(x_5+5\varepsilon^{2^8}, y_5+5^2\varepsilon^{2^9})
\end{aligned}
$$

chaque nombre est perturbé par $\alpha\varepsilon^{2^\star}$

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

Solution 1 [EM]

$$(x_1+\varepsilon, y_1+\varepsilon^2)$$
$$(x_2+2\varepsilon^4, y_2+4\varepsilon^8)$$
$$(x_3+3\varepsilon^{16}, y_3+9\varepsilon^{32})$$
$$(x_4+4\varepsilon^{2^6}, y_4+4^2\varepsilon^{2^7})$$
$$(x_5+5\varepsilon^{2^8}, y_5+5^2\varepsilon^{2^9})$$

chaque nombre est perturbé par $\alpha\varepsilon^{2^\star}$

problème non dégénéré $\longrightarrow \alpha$

$\star$ toujours différent

on applique

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

on applique

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3 + 3\varepsilon^{16} & x_1 + \varepsilon \\ y_3 + 9\varepsilon^{32} & y_1 + \varepsilon^2 \end{vmatrix}$$

on applique

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3 + 3\varepsilon^{16} & x_1 + \varepsilon \\ y_3 + 9\varepsilon^{32} & y_1 + \varepsilon^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

on applique

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3 + 3\varepsilon^{16} & x_1 + \varepsilon \\ y_3 + 9\varepsilon^{32} & y_1 + \varepsilon^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

on applique

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3 + 3\varepsilon^{16} & x_1 + \varepsilon \\ y_3 + 9\varepsilon^{32} & y_1 + \varepsilon^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^2 \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

on applique

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3 + 3\varepsilon^{16} & x_1 + \varepsilon \\ y_3 + 9\varepsilon^{32} & y_1 + \varepsilon^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^2 \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon^3 \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

on applique

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3 + 3\varepsilon^{16} & x_1 + \varepsilon \\ y_3 + 9\varepsilon^{32} & y_1 + \varepsilon^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^2 \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon^3 \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\varepsilon^{16} \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

on applique

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3 + 3\varepsilon^{16} & x_1 + \varepsilon \\ y_3 + 9\varepsilon^{32} & y_1 + \varepsilon^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^2 \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon^3 \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\varepsilon^{16} \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{17} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{18} \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{19} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

on applique

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3 + 3\varepsilon^{16} & x_1 + \varepsilon \\ y_3 + 9\varepsilon^{32} & y_1 + \varepsilon^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^2 \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon^3 \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\varepsilon^{16} \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{17} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{18} \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{19} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon^{32} \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ 9 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{33} \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ 9 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{34} \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{35} \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}$$

on applique

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3 + 3\varepsilon^{16} & x_1 + \varepsilon \\ y_3 + 9\varepsilon^{32} & y_1 + \varepsilon^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^2 \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon^3 \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\varepsilon^{16} \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{17} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{18} \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{19} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon^{32} \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ 9 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{33} \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ 9 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{34} \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{35} \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon^{48} \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ 9 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{49} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{50} \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{51} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}$$

on applique

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3 + 3\varepsilon^{16} & x_1 + \varepsilon \\ y_3 + 9\varepsilon^{32} & y_1 + \varepsilon^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^2 \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon^3 \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\varepsilon^{16} \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{17} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{18} \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{19} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ça peut pas être le polynome nul

$$\varepsilon^{32} \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ 9 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{33} \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ 9 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{34} \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{35} \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon^{48} \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ 9 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{49} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{50} \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon^{51} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}$$

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

chaque nombre est perturbé par $\alpha\varepsilon^{2^\star}$

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

chaque nombre est perturbé par $\alpha\varepsilon^{2^{\star}}$

méthode très générale

(beaucoup de prédicats)

un peu lourde

numérotation des points

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

Solution 2 [EC]

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

Solution 2 [EC]

$$(x_1, y_1)$$
$$(x_2, y_2)$$
$$(x_3, y_3)$$
$$(x_4, y_4)$$
$$(x_5, y_5)$$

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

Solution 2 [EC]

$$\begin{array}{ll}
(x_1, y_1) & (x_1 + \varepsilon, y_1 + \varepsilon) \\
(x_2, y_2) & (x_2 + (2\%q)\varepsilon, y_2 + (4\%q)\varepsilon) \\
(x_3, y_3) & (x_3 + (3\%q)\varepsilon, y_3 + (9\%q)\varepsilon) \\
(x_4, y_4) & (x_4 + (4\%q)\varepsilon, y_4 + (4^2\%q)\varepsilon) \\
(x_5, y_5) & (x_5 + (5\%q)\varepsilon, y_5 + (5^2\%q)\varepsilon)
\end{array}$$

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

Solution 2 [EC]

$$(x_1 + \varepsilon, y_1 + \varepsilon)$$
$$(x_2 + (2\%q)\varepsilon, y_2 + (4\%q)\varepsilon)$$
$$(x_3 + (3\%q)\varepsilon, y_3 + (9\%q)\varepsilon)$$
$$(x_4 + (4\%q)\varepsilon, y_4 + (4^2\%q)\varepsilon)$$
$$(x_5 + (5\%q)\varepsilon, y_5 + (5^2\%q)\varepsilon)$$

chaque nombre est perturbé par

$$(\alpha\%q)\varepsilon$$

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

Solution 2 [EC]

$$\begin{aligned}
&(x_1 + \varepsilon, y_1 + \varepsilon)\\
&(x_2 + (2\%q)\varepsilon, y_2 + (4\%q)\varepsilon)\\
&(x_3 + (3\%q)\varepsilon, y_3 + (9\%q)\varepsilon)\\
&(x_4 + (4\%q)\varepsilon, y_4 + (4^2\%q)\varepsilon)\\
&(x_5 + (5\%q)\varepsilon, y_5 + (5^2\%q)\varepsilon)
\end{aligned}$$

chaque nombre est perturbé par

$$(\alpha\%q)\varepsilon$$

problème non dégénéré $\longrightarrow \alpha$

q convenable (premier)

on applique

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

on applique $q = 7$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3 + 3\varepsilon & x_1 + \varepsilon \\ y_3 + 2\varepsilon & y_1 + \varepsilon \end{vmatrix}$$

on applique

$$q = 7$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3 + 3\varepsilon & x_1 + \varepsilon \\ y_3 + 2\varepsilon & y_1 + \varepsilon \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

on applique

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3 + 3\varepsilon & x_1 + \varepsilon \\ y_3 + 2\varepsilon & y_1 + \varepsilon \end{vmatrix} \quad q = 7$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon \left(\begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ 2 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

on applique $q=7$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3+3\varepsilon & x_1+\varepsilon \\ y_3+2\varepsilon & y_1+\varepsilon \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} +\varepsilon\left(\begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ 2 & y_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+\varepsilon^2\left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ 2 & y_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ 2 & y_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

on applique

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3+3\varepsilon & x_1+\varepsilon \\ y_3+2\varepsilon & y_1+\varepsilon \end{vmatrix} \quad q=7$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} +\varepsilon\left(\begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ 2 & y_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+\varepsilon^2\left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ 2 & y_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ 2 & y_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+\varepsilon^3\left(\begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & y_1 \end{vmatrix}\right)$$

on applique

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3+3\varepsilon & x_1+\varepsilon \\ y_3+2\varepsilon & y_1+\varepsilon \end{vmatrix} \quad q=7$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon\left(\begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ 2 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+\varepsilon^2\left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ 2 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ 2 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+\varepsilon^3\left(\begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & y_1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+\varepsilon^4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

on applique

$$\boxed{q=7}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_3+3\varepsilon & x_1+\varepsilon \\ y_3+2\varepsilon & y_1+\varepsilon \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \varepsilon\left(\begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ 2 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+\varepsilon^2\left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ 2 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ 2 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

Ça peut pas être le polynome nul

$$+\varepsilon^3\left(\begin{vmatrix} x_3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & x_1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & y_1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+\varepsilon^4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

chaque nombre est perturbé par

$$(\alpha\%q)\varepsilon$$

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

chaque nombre est perturbé par

$$(\alpha\%q)\varepsilon$$

méthode moins générale

prédicat orientation (dim d)

plus léger en calcul

numérotation des points

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

numérotation des points

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

numérotation des points

ordre relatif seulement

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

Solution 3 [ADS]

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

Solution 3 [ADS]

Perturber l'univers

(et pas les données)

$$(x, y)$$

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

Solution 3 [ADS]

Perturber l'univers

(et pas les données)

(x, y) $\quad\quad$ $(x + \varepsilon y, y)$

on applique

$$x_3 - x_1$$

on applique

$$x_3 - x_1$$

$$(x_3 + \varepsilon y_3) - (x_1 + \varepsilon y_1)$$

on applique

$$x_3 - x_1$$

$$(x_3 + \varepsilon y_3) - (x_1 + \varepsilon y_1)$$

$$(x_3 - x_1)$$

on applique

$$x_3 - x_1$$

$$(x_3 + \varepsilon y_3) - (x_1 + \varepsilon y_1)$$

$$(x_3 - x_1) \; + \varepsilon(y_3 - y_1)$$

on applique

$$x_3 - x_1$$

$$(x_3 + \varepsilon y_3) - (x_1 + \varepsilon y_1)$$

$$(x_3 - x_1) \ + \varepsilon(y_3 - y_1)$$

Ça peut pas être le polynome nul

sauf si points confondus

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

perturber l'univers

Les données vont dépendre d'un paramètre ε

perturber l'univers

vérifier adéquation prédicat/perturbation

plus léger en calcul

pas de numérotation des points

Perturbation pour Delaunay

perturber l'univers

Perturbation pour Delaunay

perturber l'univers

(x, y) $\quad$ $\left(x + \varepsilon y, y + \varepsilon^2 x + \varepsilon^3 (x^2 + y^2)\right)$

Perturbation pour Delaunay

perturber l'univers

$$(x, y) \qquad \left(x + \varepsilon y, y + \varepsilon^2 x + \varepsilon^3 (x^2 + y^2)\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y \\ 1 & q_x & q_y \\ 1 & r_x & r_y \end{vmatrix}$$

Perturbation pour Delaunay

perturber l'univers

$$(x, y) \qquad \big(x + \varepsilon y, y + \varepsilon^2 x + \varepsilon^3 (x^2 + y^2)\big)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y \\ 1 & q_x & q_y \\ 1 & r_x & r_y \end{vmatrix}$$

$$(1 - \epsilon^3) \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y \\ 1 & q_x & q_y \\ 1 & r_x & r_y \end{vmatrix} + \epsilon^3 \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_x^2 + p_y^2 \\ 1 & q_x & q_x^2 + q_y^2 \\ 1 & r_x & r_x^2 + r_y^2 \end{vmatrix} + \epsilon^4 \begin{vmatrix} 1 & p_y & p_x^2 + p_y^2 \\ 1 & q_y & q_x^2 + q_y^2 \\ 1 & r_y & r_x^2 + r_y^2 \end{vmatrix}$$

Perturbation pour Delaunay

perturber l'univers

si polynome nul

p, q, r alignés

$$(1-\epsilon^3)\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y \\ 1 & q_x & q_y \\ 1 & r_x & r_y \end{vmatrix} + \epsilon^3 \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_x^2+p_y^2 \\ 1 & q_x & q_x^2+q_y^2 \\ 1 & r_x & r_x^2+r_y^2 \end{vmatrix} + \epsilon^4 \begin{vmatrix} 1 & p_y & p_x^2+p_y^2 \\ 1 & q_y & q_x^2+q_y^2 \\ 1 & r_y & r_x^2+r_y^2 \end{vmatrix}$$

Perturbation pour Delaunay

perturber l'univers

si polynome nul

p, q, r alignés

$p^\star$, $q^\star$, $r^\star$ paralléle axe z

$$(1-\epsilon^3)\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y \\ 1 & q_x & q_y \\ 1 & r_x & r_y \end{vmatrix} + \epsilon^3 \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_x^2+p_y^2 \\ 1 & q_x & q_x^2+q_y^2 \\ 1 & r_x & r_x^2+r_y^2 \end{vmatrix} + \epsilon^4 \begin{vmatrix} 1 & p_y & p_x^2+p_y^2 \\ 1 & q_y & q_x^2+q_y^2 \\ 1 & r_y & r_x^2+r_y^2 \end{vmatrix}$$

Perturbation pour Delaunay

perturber l'univers

si polynome nul

p, q, r alignés

$p^\star$, $q^\star$, $r^\star$ paralléle axe z

$p^\star$, $q^\star$, $r^\star$ paralléle axe y

$$(1-\epsilon^3)\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y \\ 1 & q_x & q_y \\ 1 & r_x & r_y \end{vmatrix} + \epsilon^3 \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_x^2+p_y^2 \\ 1 & q_x & q_x^2+q_y^2 \\ 1 & r_x & r_x^2+r_y^2 \end{vmatrix} + \epsilon^4 \begin{vmatrix} 1 & p_y & p_x^2+p_y^2 \\ 1 & q_y & q_x^2+q_y^2 \\ 1 & r_y & r_x^2+r_y^2 \end{vmatrix}$$

Perturbation pour Delaunay

perturber l'univers

si polynome nul

p, q, r alignés

$p^\star$, $q^\star$, $r^\star$ paralléle axe z

$p^\star$, $q^\star$, $r^\star$ paralléle axe y

$p^\star$, $q^\star$, $r^\star$ paralléle axe x

$$(1-\epsilon^3)\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y \\ 1 & q_x & q_y \\ 1 & r_x & r_y \end{vmatrix} + \epsilon^3 \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_x^2+p_y^2 \\ 1 & q_x & q_x^2+q_y^2 \\ 1 & r_x & r_x^2+r_y^2 \end{vmatrix} + \epsilon^4 \begin{vmatrix} 1 & p_y & p_x^2+p_y^2 \\ 1 & q_y & q_x^2+q_y^2 \\ 1 & r_y & r_x^2+r_y^2 \end{vmatrix}$$

Perturbation pour Delaunay

perturber l'univers

si polynome nul

p, q, r alignés

$p^\star$, $q^\star$, $r^\star$ paralléle axe z

$p^\star$, $q^\star$, $r^\star$ paralléle axe y

$p^\star$, $q^\star$, $r^\star$ paralléle axe x

$p^\star$, $q^\star$, $r^\star$ alignés

Perturbation pour Delaunay

perturber l'univers

si polynome nul

p, q, r alignés

$p^\star$, $q^\star$, $r^\star$ paralléle axe z

$p^\star$, $q^\star$, $r^\star$ paralléle axe y

$p^\star$, $q^\star$, $r^\star$ paralléle axe x

$p^\star$, $q^\star$, $r^\star$ alignés

2 parmi p, q, r confondus

Perturbation pour Delaunay perturber l'univers

$$(x, y) \qquad \left(x + \varepsilon y, y + \varepsilon^2 x + \varepsilon^3 (x^2 + y^2)\right)$$

cocyclique$= \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x^2 + p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_x^2 + q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_x^2 + r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_x^2 + s_y^2 \end{vmatrix}$

Perturbation pour Delaunay perturber l'univers

$$(x, y) \qquad \left(x + \varepsilon y, y + \varepsilon^2 x + \varepsilon^3 (x^2 + y^2)\right)$$

cocyclique$=\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x^2 + p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_x^2 + q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_x^2 + r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_x^2 + s_y^2 \end{vmatrix} + 2\epsilon \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix}$

Perturbation pour Delaunay perturber l'univers

$$(x, y) \qquad \left(x + \varepsilon y, y + \varepsilon^2 x + \varepsilon^3 (x^2 + y^2)\right)$$

cocyclique$= \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x^2 + p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_x^2 + q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_x^2 + r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_x^2 + s_y^2 \end{vmatrix} + 2\epsilon \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix}$

$$+\epsilon^2 \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_y^2 \end{vmatrix}$$

Perturbation pour Delaunay perturber l'univers

$$(x, y) \qquad (x + \varepsilon y, y + \varepsilon^2 x + \varepsilon^3 (x^2 + y^2))$$

$$\text{cocyclique} = \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x^2 + p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_x^2 + q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_x^2 + r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_x^2 + s_y^2 \end{vmatrix} + 2\epsilon \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix}$$

$$+\epsilon^2 \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_y^2 \end{vmatrix} + 2\epsilon^2 \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix}$$

Perturbation pour Delaunay perturber l'univers

$$(x, y) \qquad \left(x + \varepsilon y, y + \varepsilon^2 x + \varepsilon^3 (x^2 + y^2)\right)$$

$$\text{cocyclique}= \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x^2 + p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_x^2 + q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_x^2 + r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_x^2 + s_y^2 \end{vmatrix} \qquad +2\epsilon \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix}$$

$$+\epsilon^2 \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_y^2 \end{vmatrix} \qquad +2\epsilon^2 \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix} \qquad +\epsilon^3 D'$$

Perturbation pour Delaunay perturber l'univers

$$(x, y) \qquad \left(x + \varepsilon y, y + \varepsilon^2 x + \varepsilon^3 (x^2 + y^2)\right)$$

cocyclique$= \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x^2 + p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_x^2 + q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_x^2 + r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_x^2 + s_y^2 \end{vmatrix} \quad + 2\epsilon \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix}$

$$+\epsilon^2 \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_y^2 \end{vmatrix} \quad + 2\epsilon^2 \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix} \quad + \epsilon^3 D'$$

supposons polynome nul

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par p, q, et r

d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par p, q, et r

d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & C(p) \\ 1 & q_x & q_y & C(q) \\ 1 & r_x & r_y & C(r) \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix} = \text{?}$$

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par p, q, et r d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & C(p) \\ 1 & q_x & q_y & C(q) \\ 1 & r_x & r_y & C(r) \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix} =$$

$$a \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_x^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_x^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_x^2 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_y^2 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix}$$

$$+d \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x \\ 1 & q_x & q_y & q_x \\ 1 & r_x & r_y & r_x \\ 1 & s_x & s_y & s_x \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_y \end{vmatrix} + f \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & 1 \\ 1 & q_x & q_y & 1 \\ 1 & r_x & r_y & 1 \\ 1 & s_x & s_y & 1 \end{vmatrix}$$

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par p, q, et r d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & C(p) \\ 1 & q_x & q_y & C(q) \\ 1 & r_x & r_y & C(r) \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix} =$$

cocyclique = polynome nul

$$a \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_x^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_x^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_x^2 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_y^2 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix}$$

$$+d \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x \\ 1 & q_x & q_y & q_x \\ 1 & r_x & r_y & r_x \\ 1 & s_x & s_y & s_x \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_y \end{vmatrix} + f \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & 1 \\ 1 & q_x & q_y & 1 \\ 1 & r_x & r_y & 1 \\ 1 & s_x & s_y & 1 \end{vmatrix}$$

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par p, q, et r

d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & C(p) \\ 1 & q_x & q_y & C(q) \\ 1 & r_x & r_y & C(r) \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix} = \quad \textsf{cocyclique} = \textsf{polynome nul}$$

$$a \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_x^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_x^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_x^2 \end{vmatrix} + b \xcancel{\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_y^2 \end{vmatrix}} + c \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix}$$

$$+d \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x \\ 1 & q_x & q_y & q_x \\ 1 & r_x & r_y & r_x \\ 1 & s_x & s_y & s_x \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_y \end{vmatrix} + f \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & 1 \\ 1 & q_x & q_y & 1 \\ 1 & r_x & r_y & 1 \\ 1 & s_x & s_y & 1 \end{vmatrix}$$

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par p, q, et r

d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & C(p) \\ 1 & q_x & q_y & C(q) \\ 1 & r_x & r_y & C(r) \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix} = \quad \text{cocyclique} = \text{polynome nul}$$

$$a \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_x^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_x^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_x^2 \end{vmatrix} + b \cancel{\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_y^2 \end{vmatrix}} + c \cancel{\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix}}$$

$$+d \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x \\ 1 & q_x & q_y & q_x \\ 1 & r_x & r_y & r_x \\ 1 & s_x & s_y & s_x \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_y \end{vmatrix} + f \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & 1 \\ 1 & q_x & q_y & 1 \\ 1 & r_x & r_y & 1 \\ 1 & s_x & s_y & 1 \end{vmatrix}$$

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par p, q, et r

d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & C(p) \\ 1 & q_x & q_y & C(q) \\ 1 & r_x & r_y & C(r) \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix} =$$

cocyclique = polynome nul

$$\cancel{a \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_x^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_x^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_x^2 \end{vmatrix}} + \cancel{b \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_y^2 \end{vmatrix}} + \cancel{c \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix}}$$

$$+d \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x \\ 1 & q_x & q_y & q_x \\ 1 & r_x & r_y & r_x \\ 1 & s_x & s_y & s_x \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_y \end{vmatrix} + f \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & 1 \\ 1 & q_x & q_y & 1 \\ 1 & r_x & r_y & 1 \\ 1 & s_x & s_y & 1 \end{vmatrix}$$

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par p, q, et r

d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

linéarité

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & C(p) \\ 1 & q_x & q_y & C(q) \\ 1 & r_x & r_y & C(r) \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix} =$$

$$\cancel{a \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_x^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_x^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_x^2 \end{vmatrix}} + \cancel{b \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_y^2 \end{vmatrix}} + \cancel{c \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix}}$$

$$+d \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x \\ 1 & q_x & q_y & q_x \\ 1 & r_x & r_y & r_x \\ 1 & s_x & s_y & s_x \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_y \end{vmatrix} + f \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & 1 \\ 1 & q_x & q_y & 1 \\ 1 & r_x & r_y & 1 \\ 1 & s_x & s_y & 1 \end{vmatrix}$$

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par p, q, et r d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & C(p) \\ 1 & q_x & q_y & C(q) \\ 1 & r_x & r_y & C(r) \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix} =$$

linéarité

$$a \xcancel{\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_x^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_x^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_x^2 \end{vmatrix}} + b \xcancel{\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_y^2 \end{vmatrix}} + c \xcancel{\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix}}$$

$$+ d \xcancel{\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x \\ 1 & q_x & q_y & q_x \\ 1 & r_x & r_y & r_x \\ 1 & s_x & s_y & s_x \end{vmatrix}} + e \xcancel{\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_y \end{vmatrix}} + f \xcancel{\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & 1 \\ 1 & q_x & q_y & 1 \\ 1 & r_x & r_y & 1 \\ 1 & s_x & s_y & 1 \end{vmatrix}}$$

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par p, q, et r

d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & C(p) \\ 1 & q_x & q_y & C(q) \\ 1 & r_x & r_y & C(r) \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix} = \ 0$$

$$a \cancel{\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_x^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_x^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_x^2 \end{vmatrix}} + b \cancel{\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_y^2 \end{vmatrix}} + c \cancel{\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix}}$$

$$+d \cancel{\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x \\ 1 & q_x & q_y & q_x \\ 1 & r_x & r_y & r_x \\ 1 & s_x & s_y & s_x \end{vmatrix}} + e \cancel{\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_y \end{vmatrix}} + f \cancel{\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & 1 \\ 1 & q_x & q_y & 1 \\ 1 & r_x & r_y & 1 \\ 1 & s_x & s_y & 1 \end{vmatrix}}$$

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par p, q, et r d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & C(p) \\ 1 & q_x & q_y & C(q) \\ 1 & r_x & r_y & C(r) \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & 0 \\ 1 & q_x & q_y & 0 \\ 1 & r_x & r_y & 0 \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix}$$

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par p, q, et r d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & C(p) \\ 1 & q_x & q_y & C(q) \\ 1 & r_x & r_y & C(r) \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & 0 \\ 1 & q_x & q_y & 0 \\ 1 & r_x & r_y & 0 \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix} = C(s) \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y \\ 1 & q_x & q_y \\ 1 & r_x & r_y \end{vmatrix}$$

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par p, q, et r

d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & C(p) \\ 1 & q_x & q_y & C(q) \\ 1 & r_x & r_y & C(r) \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & 0 \\ 1 & q_x & q_y & 0 \\ 1 & r_x & r_y & 0 \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix} = C(s) \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y \\ 1 & q_x & q_y \\ 1 & r_x & r_y \end{vmatrix}$$

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par p, q, et r

d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & C(p) \\ 1 & q_x & q_y & C(q) \\ 1 & r_x & r_y & C(r) \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix} = 0 \qquad s \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & 0 \\ 1 & q_x & q_y & 0 \\ 1 & r_x & r_y & 0 \\ 1 & s_x & s_y & C(s) \end{vmatrix} = C(s) \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y \\ 1 & q_x & q_y \\ 1 & r_x & r_y \end{vmatrix}$$

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par p, q, et r d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

$$s \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C})$$

p, q, r et s alignés

Soit $\mathcal{C}$ une conique passant par p, q, et r

d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

$$s \in \mathcal{C} (\forall \mathcal{C})$$

p, q, r et s alignés

on va voir plus loin

cocyclique$=\begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x^2+p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_x^2+q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_x^2+r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_x^2+s_y^2 \end{vmatrix} + 2\epsilon \begin{vmatrix} 1 & p & p & p\,p \\ 1 & & & \\ 1 & & & \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix}$

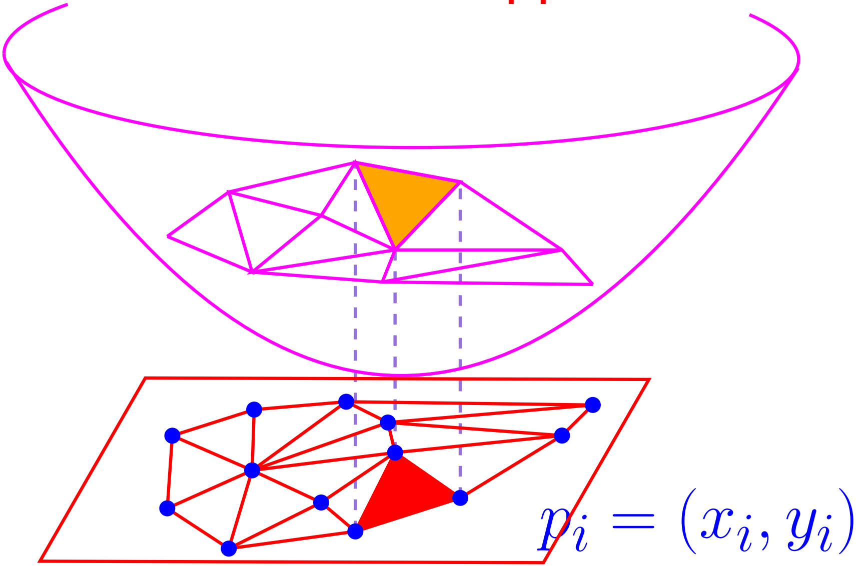
$$+\epsilon^2 \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_y^2 \\ 1 & q_x & q_y & q_y^2 \\ 1 & r_x & r_y & r_y^2 \\ 1 & s_x & s_y & s_y^2 \end{vmatrix} + 2\epsilon^2 \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_x p_y \\ 1 & q_x & q_y & q_x q_y \\ 1 & r_x & r_y & r_x r_y \\ 1 & s_x & s_y & s_x s_y \end{vmatrix} +\epsilon^3 D'$$

Perturbation pour Delaunay

Perturbation de l'enveloppe convexe 3D

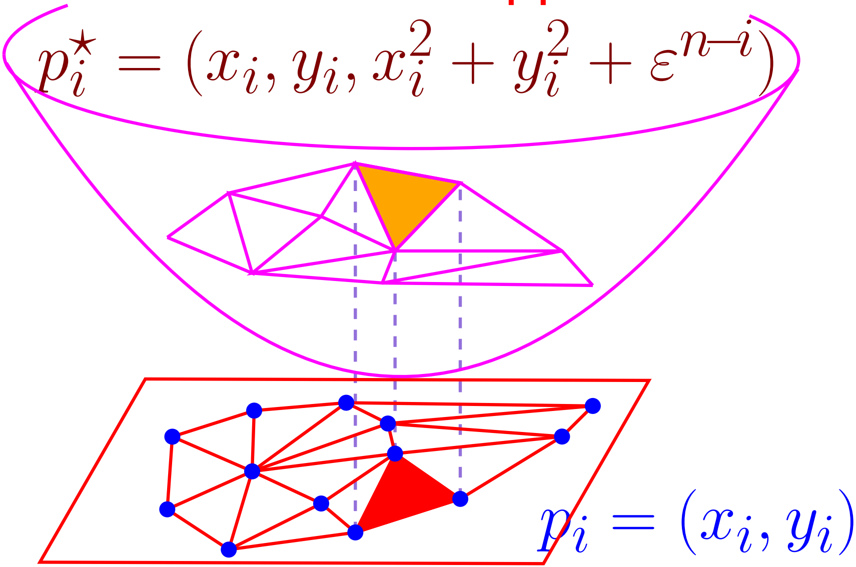
Perturbation pour Delaunay

Perturbation de l'enveloppe convexe 3D



Perturbation pour Delaunay

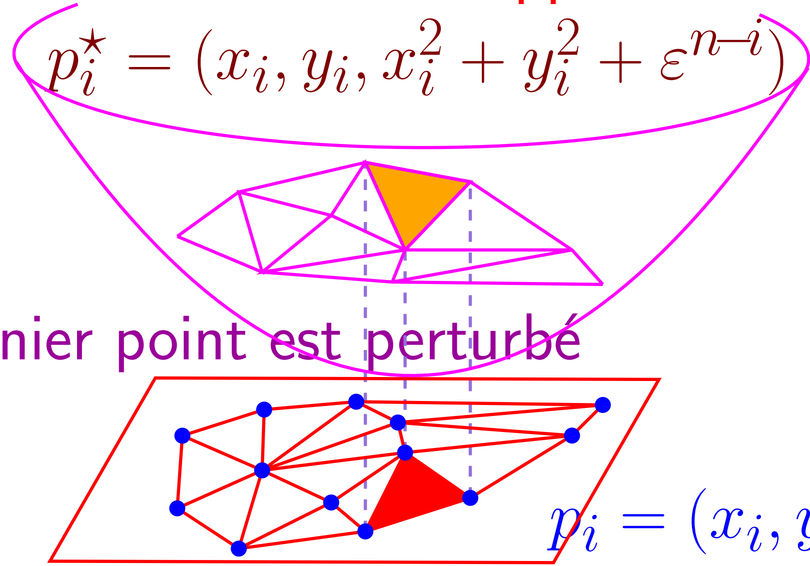
Perturbation de l'enveloppe convexe 3D



Perturbation pour Delaunay

Perturbation de l'enveloppe convexe 3D

$$p_i^\star = (x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2 + \varepsilon^{n-i})$$

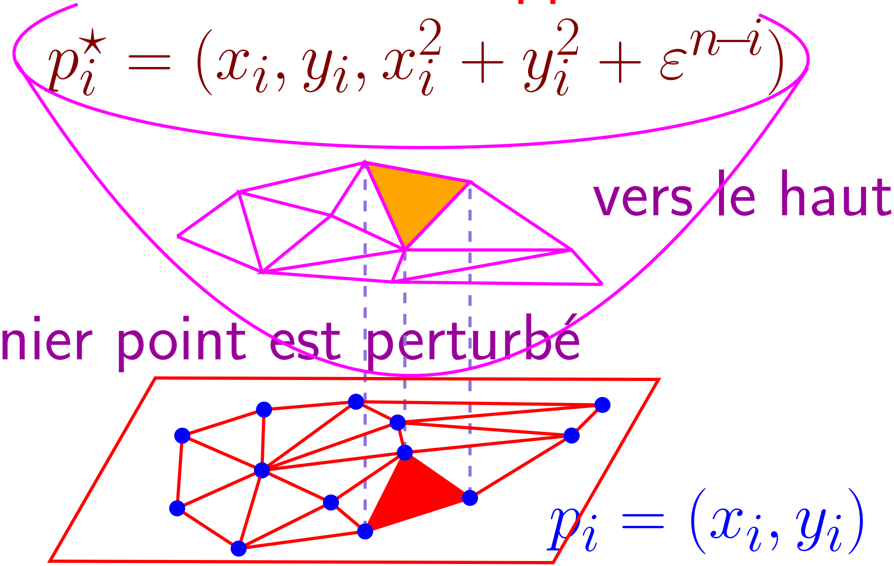


Le dernier point est perturbé

$$p_i = (x_i, y_i)$$

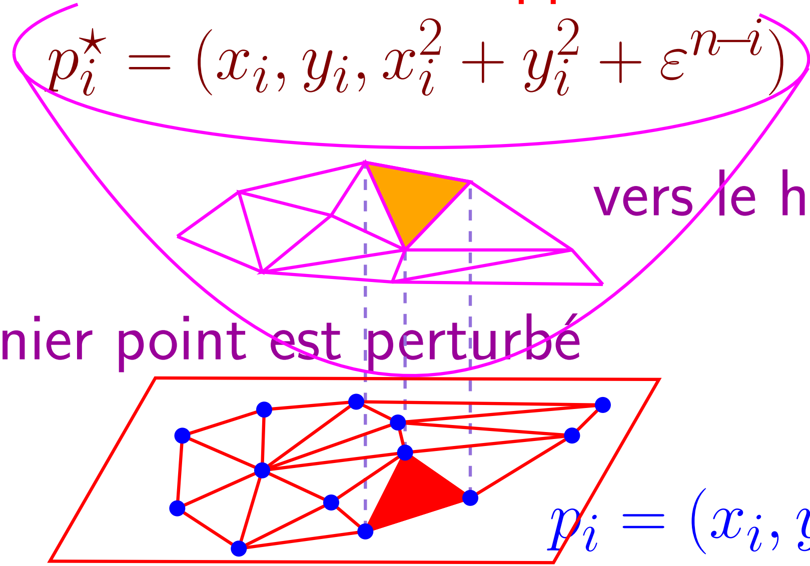
Perturbation pour Delaunay

Perturbation de l'enveloppe convexe 3D

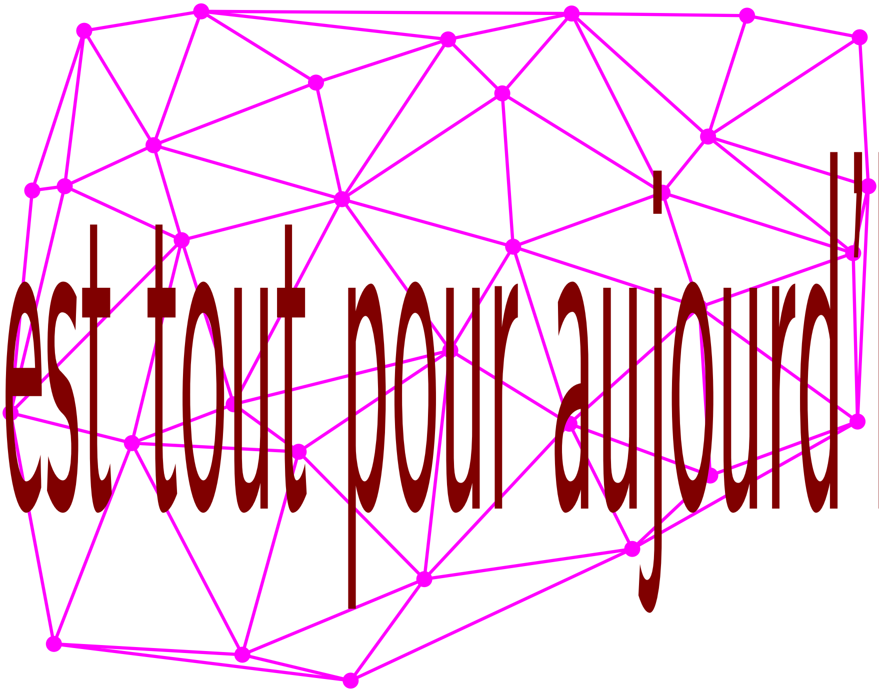


Perturbation pour Delaunay

Perturbation de l'enveloppe convexe 3D



vers l'extérieur du cercle



C'est tout pour aujourd'hui