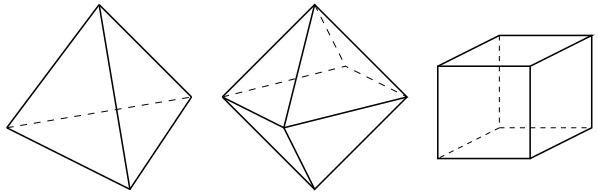
Cônes, Polyèdres et Polytopes



– Cônes, Polyèdres et Polytopes
– Lemmes de Farkas – Polarité – H- et V-présentations
– Treillis des faces d'un polytope – Graphe d'un polytope
– Théorème de la borne supérieure

Matrix notations

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times d}$ ..... matrix with m rows and d columns

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & \cdots & a_{2d} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{md} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1d} & \cdots & a_{md} \end{bmatrix}$$

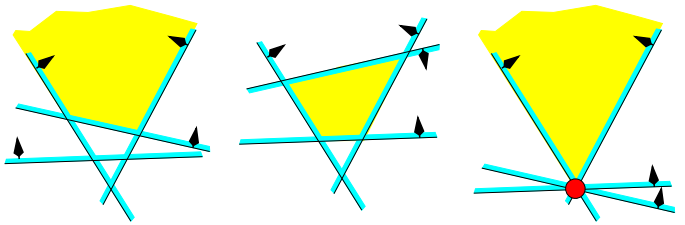
$$A \geq 0 \iff a_{ij} \geq 0 \quad \text{for any entry } a_{ij} \text{ of } A$$

$x \in \mathbb{R}^d \approx \mathbb{R}^{d\times 1}$ is considered as a column vector, i.e., $x = [x_1, \ldots, x_d]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}$

For $a, x \in \mathbb{R}^d$ we set

$$\langle a, x\rangle = a^T x = \sum_{i=1}^{i=d} a_i x_i.$$

Cônes, polyèdres, polytopes



– $C \subseteq \mathbb{R}^d$ est un convexe (ou est dit convexe) si pour tout $x, y \in C$ le segment

$$[x, y] = \{\lambda x + \mu y \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+, \lambda + \mu = 1\}$$

est inclus dans C. Une intersection de convexes est un convexe.

– Exemples : boules, sous-espaces affines (points, droites, ..., hyperplans), demi-espaces, polyèdres, polytopes, enveloppes convexes, convexes finiment engendrés, cônes, cônes polyèdriques, enveloppes côniques, cônes finiment engendrés, somme de deux convexes.

– Notations : $\mathrm{Conv}(K), \mathrm{Cone}(K), P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \leq b\}$ où $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times d}$ est une matrice à m lignes et d colonnes et où $b \in \mathbb{R}^m$.

$$\mathrm{Conv}(K) = \{\alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_k x_k \mid k \in \mathbb{N}, x_i \in K, \alpha_i \geq 0, \sum_i \alpha_i = 1\} \quad (1)$$

$$\mathrm{Cone}(K) = \{\alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_k x_k \mid k \in \mathbb{N}, x_i \in K, \alpha_i \geq 0\} \quad (2)$$

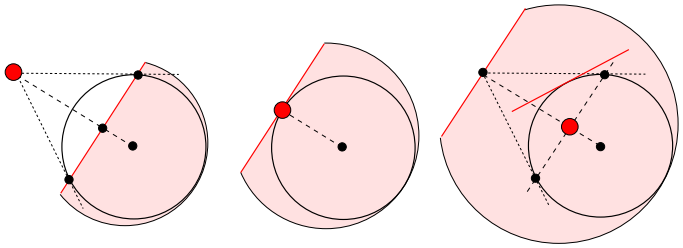
Théorèmes de séparation

Théorème 1 (Théorème de Hahn-Banach). *Soit A un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^d$ et soit L un sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$ tel que $A \cap L = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan de $\mathbb{R}^d$ qui contient L et ne rencontre pas A.* □

Théorème 2. *Soit A un fermé convexe non vide de $\mathbb{R}^d$ et soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^d$ tel que $A \cap K = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan de $\mathbb{R}^d$ séparant strictement A et K.* □

Théorème 3. *Soit A un polyèdre convexe non vide de $\mathbb{R}^d$ et soit L un sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$ tel que $A \cap L = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan de $\mathbb{R}^d$ qui contient L et ne rencontre pas A.* □

Polarité



Définition 1. *Le polaire A^* de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ est défini comme l'ensemble des $z \in \mathbb{R}^d$ tel que $\langle x, z\rangle \leq 1$ pour tout $x \in A$. En d'autres termes le polaire de A est l'intersection des demi-espaces fermés contenant l'origine $\langle z, x\rangle \leq 1$, $x \in A$. L'hyperplan $\langle z, x\rangle$ est appelé l'hyperplan polaire de x.*

Exemples: – $B(o,r)^* = B(o, 1/r)$
– $(\mathrm{Conv}(a_1, a_2, \ldots, a_n))^* = P(\{a_1, \ldots, a_n\}, 1)$
– $(P(\{a_1, \ldots, a_n\}, 1))^* = \mathrm{Conv}(a_1, a_2, \ldots, a_n, o)$.

Polarité (suite)

Théorème 4. *Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$. Alors*

1. *A^* est un fermé convexe contenant l'origine o de $\mathbb{R}^d$;*
2. *si $A \subset B$ alors $B^* \subset A^*$;*
3. *si $A \subset B^*$ alors $B \subset A^*$ – en particulier $A \subseteq A^{**}$;*
4. *A^{**} est l'adhérence de l'enveloppe convexe de $A \cup \{o\}$.* □

✎ — Preuve

Théorème 5. *Soit C un convexe fermé borné contenant le point o dans son intérieur. Alors C^* est un convexe fermé borné dont l'intérieur contient o, et $C^{**} = C$.* □

Lemmes de Farkas

Théorème 6 (Lemme de Farkas I). *Soit une matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times d}$ et un vecteur colonne $b \in \mathbb{R}^m$. Le polyèdre $\{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \leq b\}$ est vide si et seulement si le polyèdre $\{y \in \mathbb{R}^m \mid y \geq 0, y^T A = 0, y^T b < 0\}$ est non vide.*

Proof. Nous présentons deux preuves

– via un théorème de séparation;

– via la procédure d'élimination de Fourier-Motzkin;

□

Lemme 6.1 (Lemme de Farkas IIbis). *Soit il existe $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ tel que $Ax \leq b$ ou il existe $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$, tel que $y^T A \geq 0$ et $y^T b < 0$.* □

Proof. Nous présentons deux preuves

– via un théorème de séparation;

– via a variant of Bland's pivot rule to solve systems of inequalities.

□

Le polyèdre $P(A,b)$ est-il vide?

Théorème 7 (Procèdure de Fourier-Motzkin). *Soit P un polyèdre $P(A,b)$ de $\mathbb{R}^d$ où $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et soit L une droite vectorielle de $\mathbb{R}^d$. Alors la somme vectorielle $Q = P + L$ est un polyèdre $P(FA, Fb)$ où F est une matrice positive et où L est parallèle aux hyperplans frontières des demi-espaces définissant le polyèdre Q donnés par la matrice FA, i.e. $\langle FA, L\rangle = 0$.* □

Proof. Posons $L = \mathbb{R}a_0$. Le vecteur $x \in Q$ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que le point $\lambda a_0 + x \in P$, i.e.

$$\lambda\langle a_0, a\rangle + \langle x, a\rangle \le b_a \quad (a \in A).$$

Scindons l'ensemble A en trois classes A^+, A^-, A^0 selon que le produit scalaire $\langle a_0, a\rangle$ est positif, négatif ou nul. En combinant deux-à-deux les inégalités de A^+ et A^- nous éliminons la variable λ de notre système pour obtenir une description de Q sous la forme d'un système d'inéquations linéaires

$$\begin{cases} \langle -\langle a_0, a'\rangle a + \langle a_0, a\rangle a', x\rangle \le -\langle a_0, a'\rangle b_a + \langle a_0, a\rangle b_{a'} & (a, a') \in A^+ \times A^- \\ \langle a, x\rangle \le b_a & a \in A^0. \end{cases}$$

□

Corolaire 7.1 (Lemme de Farkas I). *Il existe un $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $Ax \le b$ ou (exclusif) il existe un $y \in \mathbb{R}^m$, $y \ge 0$, tel que $y^TA = 0$ et $y^Tb < 0$.* □

Le polyèdre $P(A,b) \cap P(-I,0)$ est-il vide? Example I

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & +1 \\ +1 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & +2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} -1 \\ +2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \ge 0$$

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ +2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +1 & +2 & -1 \\ -1 & +3 & +1 \\ +1 & +2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & +1 & +1 \\ +5 & +0 & -1 \\ +0 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +2 \\ +1 \\ +0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & +2 & +1 \\ +0 & +1 & +1 \\ +5 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$x_1 = +2, x_2 = 0, x_3 = 0$ est solution.

Example II

$$\begin{bmatrix} -1 & +2 & +1 \\ +3 & -2 & +1 \\ -1 & -6 & -23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} +3 \\ -17 \\ +19 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \ge 0$$

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +3 \\ -17 \\ +19 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & +2 & +1 \\ +3 & -2 & +1 \\ -1 & -6 & -23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +17/2 \\ -14 \\ +70 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +3/2 & +1/2 & +1 \\ -2 & -2 & -1 \\ +10 & +26 & +3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{1}x_4 + \mathbf{1}x_5 + \mathbf{0}x_6 = -14 - \{2x_1 + 0x_2 + 2x_3\}$$

$$\begin{bmatrix} +1 & +1 & +0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +3 \\ -17 \\ +19 \end{bmatrix} = -14 < 0 \qquad \begin{bmatrix} +1 & +1 & +0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & +2 & +1 \\ +3 & -2 & +1 \\ -1 & -6 & -23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +2 & +0 & +2 \end{bmatrix} \ge 0$$

A variant of Bland's pivot rule

Étape 1. Introduire m variables $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ supplémentaires (dites variables *faibles*) et le *dictionnaire*

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{3}$$

L'ensemble des variables $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ est appelé la *base* du dictionnaire. L'ensemble des variables $x_1, \ldots, x_n$ est appelé la *cobase* du dictionnaire.

Étape 2. Assigner la valeur zéro aux variables de la cobase, et déterminer la variable de la base d'indice minimal à laquelle est ainsi assignée une valeur strictement négative. S'il n'y en a pas, le système admet une solution et le vecteur des valeurs assignées aux variables *fortes* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une solution du système.

Étape 3. Déterminer la variable de la cobase de l'équation qui correspond à la variable de la base choisie à l'étape 2 de plus petit indice parmi celles de coefficient strictement positif. S'il n'y en a pas, le système n'admet pas de solution et les coefficients des variables faibles forment un certificat de non faisabilité du système. Sinon, résoudre cette équation en la variable ainsi déterminée, et substituer le résultat dans les autres équations pour obtenir un nouveau dictionnaire. Retourner à l'étape 2.

Théorème 8. *L'algorithme décrit ci-dessus termine.* □

Corolaire 8.1 (Lemme de Farkas IIbis). *Il existe $x \in \mathbb{R}^n$, $x \ge 0$, tel que $Ax \le b$ ou (exclusif) il existe $y \in \mathbb{R}^m$, $y \ge 0$, tel que $y^TA \ge 0$ et $y^Tb < 0$.* □

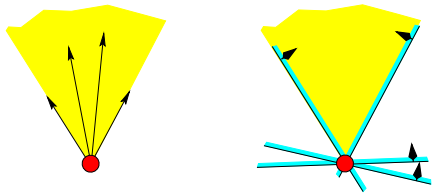
Notes

Notes

Notes

Notes

H-Présentations et V-Présentations



Théorème 9 (Minkowski-Weyl Theorems). *Soit $C \subseteq \mathbb{R}^d$.*

1. *C est un cône polyèdrique ssi C est un cône finiment engendré.*
2. *C est un polytope ssi C est un convexe finiment engendré.*
3. *C est un polyèdre ssi C est la somme d'un cône finiment engendré et d'un convexe finiment engendré.* □

Pour du code (cdd et lrs) voir la page de Komei Fukuda : `http://www.cs.mcgill.ca/~fukuda/`

Preuve : Double Description Method

- $C' = \mathrm{Cone}(R) \cap P(\{a\}, 0)$
- R^0, R^-, R^+ les ensembles des $r \in R$ tels que $\langle a, r\rangle = 0$, $\langle a, r\rangle < 0$, $\langle a, r\rangle > 0$, respectivement.
- Je dis que C' est le cône engendré par les vecteurs de R^0, R^- et $\phi_a(R^+, R^-)$ où $\phi_a(r, r') = \langle r, a\rangle r' - \langle r', a\rangle r$.
- ✎ —
- ✎ —

Preuve (suite)

- $C = P(A, 0)$, $r \in \mathbb{R}^d$ $C' = \mathrm{Cone}(C, r)$
- $x \in C'$ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $x - \lambda r \in C$, i.e. $\langle a, x\rangle \leq \lambda\langle a, r\rangle$ pour tout $a \in A$.
- Scindons l'ensemble A en trois classes A^+, A^-, A^0 selon que le produit scalaire $\langle a, r\rangle$ est positif, négatif ou nul.
- Je dis que $C' = P(B, 0)$ où $B = A^0 \cup A^- \cup \phi_r(A^+, A^-)$ où $\phi_r(a, a') = \langle a, r\rangle a' - \langle a', r\rangle a$.
- ✎ —

Cône de récession

Soit P un convexe non vide de $\mathbb{R}^d$.
La partie linéaire $\mathrm{Lineal}(P)$ de P est définie par

$$\mathrm{Lineal}(P) = \{z \in \mathbb{R}^d \mid P = P + \mathbb{R}z\}.$$

La partie linéaire du polyèdre $P(A, b)$ est l'ensemble des solutions du système $Ax = 0$.
P est dit pointé (dans $\mathbb{R}^d$) si sa partie linéaire est nulle ou de manière équivalente si la matrice A est de rang maximal (i.e. d).
Le cône de récession $\mathrm{Rec}(P)$ de P est définie par

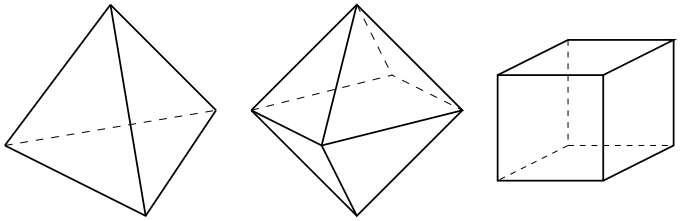
$$\mathrm{Rec}(P) = \{z \in \mathbb{R}^d \mid P = P + \mathbb{R}^+z\}.$$

Théorème 10. *We claim that*

1. $\mathrm{Rec}(P(A, b)) = P(A, 0)$*;*
2. *Si* $P = \mathrm{Conv}(V) + \mathrm{Cone}(Y)$ *alors* $\mathrm{Rec}(P) = \mathrm{Cone}(Y)$.

□

Simplexe, cube et cocube standards



- $S_d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \sum_1^{d+1} x_i = 1, x_i \geq 0\} = \mathrm{Conv}\{e_1, e_2, \ldots, e_{d+1}\}$
- $C_d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq +1\} = \mathrm{Conv}\{\{+1,-1\}^d\} = [-1,+1]^d$
- $C_d^* = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_i |x_i| \leq 1\} = \mathrm{Conv}\{e_1, -e_1, \ldots, e_d, -e_d\}$
- C_d et C_d^* sont polaires l'un de l'autre.

Combinatoire polyèdrale (Polyhedral combinatorics)

- Birkhoff polytope, perfect matching polytope of $K_{n,n}$, transportation polytope, polytope of doubly stochastic matrices, etc.
- Traveling salesman polytope
-
- Order polytope

Théorème 11. *Soit $(X, \preceq)$ un ensemble fini partiellement ordonné mais non totalement ordonné. Alors il existe deux eléments $a, b \in X$ tels que le rapport entre le nombre d'extensions lineaires de l'ordre $\preceq$ augmenté de la paire (a,b) et le nombre d'extensions linéaires de l'ordre $\preceq$ est compris entre δ et $1-\delta$ où δ est une constante (par exemple $\delta = 1/2e \approx 0.184$).* □

On identifie X avec $\{1, 2, \ldots, n\}$ et on introduit le polytope

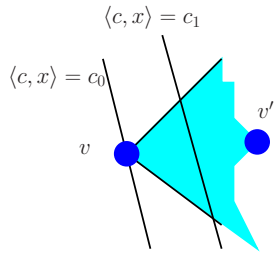
$$P(\preceq) = \{x \in [0,1]^n \mid x_v \leq x_w, \forall (v,w) \in X^2, v \prec w\}.$$

Faces d'un polytope

Définition 2. *Soit P un polytope. Une face de P est définie comme P lui-même ou comme l'intersection de P est d'un hyperplan h tel que P soit inclus dans l'un des deux demi-espaces définis par h. (En particulier l'ensemble vide est une face de P.)*

- Dimension d'une face, j-face. Sommets, arêtes, (ridges), facettes. L'ensemble des sommets de P est noté $\mathrm{Vert}(P)$. Faces et contraintes valides.
- Si $P = \mathrm{Conv}(V)$ alors $V \supseteq \mathrm{Vert}(P)$
- $P = \mathrm{Conv}(\mathrm{Vert}(P))$
- Toute intersection de faces de P est une face de P
- Soit F une face de P. Alors $F = P \cap \mathrm{aff}(F)$
- Soit F une face de P. Alors F est un polytope de sommets $\mathrm{Vert}(F) = \mathrm{Vert}(P) \cap F$ et plus généralement ses faces sont exactement les faces de P incluses dans F.

Étoile d'un polytope en un sommet



- P polytope, $v \in \mathrm{Vert}(P)$
-
- L'étoile de P en v est défini comme le polytope

$$P/v := P \cap \{x \mid \langle c, x\rangle = c_1\}.$$

Théorème 12. *L'application qui à une face F de P contenant v associe l'intersection de F est de l'hyperplan $\langle c, x\rangle = c_1$ réalise une bijection entre l'ensemble des k-faces de P contenant v et l'ensemble des $(k-1)$-faces de P/v. L'inverse est donné par $F' \mapsto P \cap \mathit{aff}(\{v\} \cup F')$.* □

Treillis des faces

Théorème 13. *Soit P un polytope (convexe) et soit $L(P)$ l'ensemble des faces de P partiellement ordonné par inclusion. Alors*

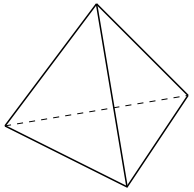
1. *$L(P)$ est un treillis (i.e. toute paire d'éléments admet un plus petit majorant et un plus grand minorant) gradué (i.e. les chaines maximales ont la même longueur) de longueur $\dim(P)+1$ et de fonction rang $rg(F) = \dim(F)+1$. Les sommets et les facettes sont appelés les atomes et les coatomes de $L(P)$.*
2. *Tout intervalle $[G,F]$ de $L(P)$ est le treillis des faces d'un polytope de dimension $rg(F)-rg(G)-1$. En particulier tout intervalle de longueur 2 admet 4 éléments, i.e. si $G \subset F$ avec $rg(F)-rg(G)=2$ alors il existe deux faces H telles que $G \subset H \subset F$ (the so-called Diamond property).*
3. *$L(P)$ est atomique (i.e. une face est le plus petit majorant de ses atomes) et coatomique (i.e. une face est le plus grand minorant de ses coatomes). En particulier $L(P)$ est déterminé par sa longueur et par les incidences atome-coatome (sommet-facette).*
4. *Le treillis opposé $L(P)^{op}$ est le treillis des faces d'un polytope (Polarité).* □

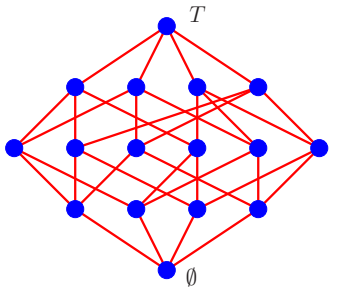
Faces et polarité

Soit P un d-polytope contenant l'origine en son intérieur. Pour tout $F \in L(P)$ on note $F^\diamond$ l'ensemble des d-vecteur z tels que $\langle z, x\rangle \leq 1$ pour tout $x \in P$ avec égalité pour $x \in F$.

Théorème 14. *L'application $F \mapsto F^\diamond$ realise une bijection de $L(P)$ sur $L(P^*)$ qui inverse les inclusions. De plus $F^{\diamond\diamond} = F$.* □

Simplexe





faces

arêtes

sommets

– Un d-simplexe est l'enveloppe convexe de $d+1$ points affinement libre.

– Les faces du simplexe S sont exactement les $\mathrm{Conv}(B)$, $B \subseteq \mathrm{Vert}(S)$.

– Le treillis d'un d-simplexe est un treillis booléen, i.e. isomorphe au treillis de l'ensemble des parties d'un ensemble à $d+1$ éléments ordonné par inclusion.

Polytopes simpliciaux/simples – Polytopes cycliques

Définition 3. *Un polytope est dit simplicial si ses facettes sont des simplexes (c'est le cas de l'enveloppe convexe de points en position générale). Un polytope est dit simple si l'étoile de chaque sommet est un simplexe (c'est le cas de l'intersection de demi-espaces définis par des hyperplans en position générale).*

Le polytope polaire d'un polytope simplicial, contenant l'origine en son intérieur, est simple (et vice versa).

Théorème 15. *L'enveloppe convexe de $n \geq d+1$ points de la courbe des moments $\gamma = \{(t, t^2, \ldots, t^d) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est un d-polytope simplicial à n sommets et $\binom{n}{i+1}$ i-faces pour tout $i < \lfloor d/2 \rfloor$. (Ce polytope est appelé "le" d-polytope cyclique à n sommets.)* □

Upper bound theorem

Théorème 16 (MacMullen 1970). *Soit P un d-polytope à n facettes. Alors le nombre de i-faces de P est borné par le nombre $\gamma_i(d,n)$ de i-faces du dual du d-polytope cyclique à n sommets. De plus*

$$\gamma_i(d,n) = \sum_{0\le j\le d} \binom{j}{i}\binom{n-1-\max\{j,d-j\}}{\min\{j,d-j\}}.$$

En particulier $\gamma_i(d,n) = \Theta(n^{\lfloor d/2\rfloor})$ pour $d = O(1)$. □

Orientations acycliques et h-vecteur

Théorème 17. *Soit P un d-polytope simple à n facettes, f_i le nombre de i-faces de P, et h_i le nombre de sommets de degré entrant i d'une bonne orientation acyclique du graphe sommet-arête $G(P)$ de P. Alors pour tout $i = 0,\dots,d$*

1. $$f_i = \sum_{0\le j\le d}\binom{j}{i}h_j, \qquad h_i = \sum_{0\le j\le d}(-1)^{i+j}\binom{j}{i}f_j$$
2. *h_i est independant de l'orientation choisie;*
3. *$h_i = h_{d-i}$* *Relations de Dehn-Sommerville*
4. $$\boxed{h_i \le \binom{n-1-\max\{i,d-i\}}{\min\{i,d-i\}}}$$

Polytopes cycliques

Théorème 18. *Soit P le dual de l'enveloppe convexe de $n \ge d+1$ points de la courbe des moments $\gamma = \{(t,t^2,\dots,t^d) \mid t\in\mathbb{R}\}$. Alors*

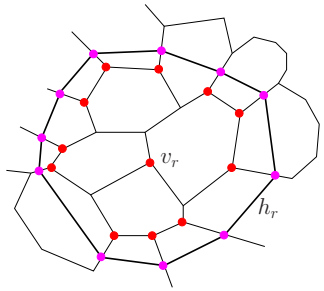
1. *P est un d-polytope simple à n facettes;*
2. *$f_i(P) = \binom{n}{d-i}$ et $h_i(P) = \binom{n-i-1}{d-i}$ pour tout $i > \lfloor d/2\rfloor$;*
3. *$f_i(P) = \gamma_i(d,n)$ pour tout i.* □

Exemple en dimension 4:

$$h_0 = h_4 = \binom{n-5}{0}, h_1 = h_3 = \binom{n-4}{1}, h_2 = \binom{n-3}{2}$$

$$\begin{pmatrix} f_0\\ f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&1&2&3&4\\ 0&0&1&3&6\\ 0&0&0&1&4\\ 0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_0\\ h_1\\ h_2\\ h_3\\ h_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}n(n-3)\\ n(n-3)\\ \frac{1}{2}n(n-1)\\ n\\ 1\end{pmatrix}$$

Calcul d'une enveloppe convexe



Le treillis des faces du polytope (polyèdre) enveloppe convexe d'une collection de n points (intersection d'une famille de n demi-espaces) de $\mathbb{R}^d$ avec $d = O(1)$ est constructible en temps

1. $O(n^{\lfloor d/2\rfloor} + n\log n)$ (B. Chazelle 1993)
2. $O(n\log f + (nf)^{1-1/(\lfloor d/2\rfloor+1)}\log^{c(d)} n)$ (T. Chan 1996).

Graphe d'un polytope

Le graphe $G(P)$ du polytope P est son 1-squelette, i.e., l'union de ses sommets et de ses arêtes.

- (Steinitz Theorem) Un graphe est le graphe d'un 3-polytope ssi il est simple, planaire et 3-connexe.
- (Balinski Theorem) Le graphe d'un d-polytope est d-connexe.
- (Blind & Manni et Kalai Theorem) Le graphe d'un polytope simple détermine le treillis de ses faces. ✐ — Preuve
- Diamètre du graphe d'un polytope. Pour $n > d \geq 2$ soit $\Delta(d,n)$ le plus grand diamètre possible du graphe d'un d-polytope à n facettes. La conjecture de Hirsh affirme que $\Delta(d,n) \leq n-d$.

  Théorème 19. *Soit P un polyèdre convexe de dimension d à n facettes et soit cx une forme linéaire générique qui atteint son maximum sur P en le sommet w. Alors de tout sommet v de P il existe un chemin monotone de v à w dont la longueur est bornée par*

$$H_u(d,n) \leq 2n\binom{d+\lfloor \log_2 n \rfloor - 1}{d-1} \leq 2n^{\log_2(d)+1} = 2(2d)^{\log_2(n)}.$$

  □

- Programmation linéaire en temps $d^2n + 2^{O(\sqrt{d \log d})}$

Bibliographie

[1] David Avis and Bohdan Kaluzny. Solving inequalities and proving farkas's lemma made easy. *American Mathematical Monthly*, 111:152–157, February 2004.

[2] Timothy M. Chan. Optimal output-sensitive convex hull algorithms in two and three dimensions. *Discrete Comput. Geom.*, 16:361–368, 1996.

[3] Timothy M. Chan. Output-sensitive results on convex hulls, extreme points, and related problems. *Discrete Comput. Geom.*, 16:369–387, 1996.

[4] J. Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*. Number 212 in Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2002.

[5] J. Richter-Gebert. *Realization Spaces of Polytopes*. Number 1643 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1996.

[6] Günter M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Number 152 in Graduate texts in Mathematics. Springer, 1995.

[7] B. Grünbaum. *Convex Polytopes*, volume 221 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2nd edition, 2003.

[8] Kalai and Ziegler. *Polytopes - Combinatorics and Computation*. Birkhäuser, 2000.

Notes

Notes