Topics in Computational Geometry

Michel Pocchiola (Ens-Paris)
Michel.Pocchiola@ens.fr
http://www.di.ens.fr/ pocchiol/

1. Rappels d'algèbre et de topologie
2. Classification des surfaces (compactes)
3. Le groupe fondamental des lacets d'une surface
4. Calcul d'un schéma polygonal canonique
5. ...

THÉORIE DES ENSEMBLES - MONOIDES - GROUPES

Ensembles, ensemble des parties d'un ensemble, produit cartésien de deux ensembles, applications, relations d'équivalence, partitions, ensembles quotients, factorisation d'une application par une relation d'équivalence.

Monoides, groupes, isomorphismes, congruences, monoides et groupes quotients, sous-groupes distingués, homomorphismes, factorisations, groupe libre, somme (ou produit libre) de deux groupes, somme amalgamée de deux groupes.

[1] Nathan Jacobson. Basic Algebra I. Freeman, 1974.

[2] J. Berstel. Transductions and context-free languages. Teubner, 1979.

ESPACES TOPOLOGIQUES

Definition 1. *Un espace topologique est un ensemble X muni d'une topologie $\mathcal{U}$, i.e. une collection de parties de X appelées ensembles ouverts satisfaisant aux trois propriétés suivantes :*

1. *L'ensemble vide $\emptyset$ et l'ensemble X sont ouverts;*
2. *Toute réunion (finie ou non) d'ouverts est ouverte;*
3. *Toute intersection finie d'ouverts est ouverte.* $\square$

Topologie discrète, topologie grossière, topologie associée à un ensemble totalement ordonné.

Ensembles fermés, voisinages d'un point, bases de voisinages, bases d'ouverts.

Fermeture, intérieur, frontière.

Espaces séparés, espaces connexes, espaces compacts.

$\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ deux topologies sur X. On dit que $\mathcal{U}'$ est plus fine que $\mathcal{U}$ si $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}$.

Sous-espace topologique : $Y \subseteq X$ muni de la topologie *relative*, i.e. $\{Y \cap V \mid V \in \mathcal{U}\}$.

[1] G. Choquet. Cours d'Analyse - Topologie, volume 2. Masson, 1973.

FONCTIONS CONTINUES – HOMÉOMORPHISMES

Definition 2. *Une application $f : X \to Y$ d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est dite continue au point x de X si, pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage W de x dont l'image par f soit dans V, i.e. $f(W) \subseteq V$.* $\square$

Une application est dite continue si elle est continue en tout point.

Theorem 1. *Une application $f : X \to Y$ d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est continue ssi l'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X.* $\square$

Homéomorphismes, espaces homéomorphes $X \approx Y$.

ESPACES MÉTRIQUES

Definition 3. *Un espace métrique est un ensemble X muni d'une fonction distance (ou métrique) $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois propriétés suivantes:*

1. $\rho(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ *pour tout* $x, y \in X$;
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ *pour tout* $x, y, z \in X$.

La boule ouverte de centre $x \in X$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ est l'ensemble des $y \in X$ tel que $\rho(x, y) < r$.

La collection des unions quelconques de boules ouvertes d'un espace métrique est une topologie sur cet espace métrique.

$\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}$

$\mathbb{R}^n$, distance euclidienne: $d(x, y) = \|x - y\| = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$, boule unité ouverte $\mathbb{B}^n$ de $\mathbb{R}^n$, sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n \approx \mathbb{B}^n$ via par exemple $x \mapsto x/1 - \|x\|$

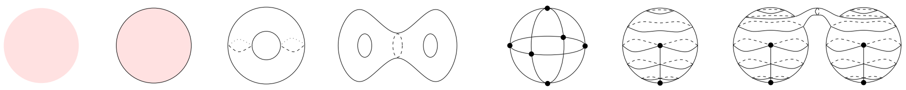
$\mathbb{R}^n \approx \mathbb{S}^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 1)\}$ via la projection stéréographique.

Une courbe est un espace topologique connexe localement homéomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$:

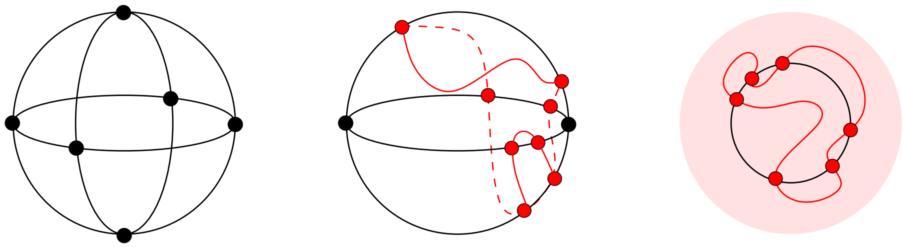
$$(0, 1), [0, 1), [0, 1], \mathbb{S}^1.$$

Une surface est un espace topologique connexe localement homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ ou à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$:

$$\mathbb{B}^2, \overline{\mathbb{B}}^2, \mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{T}_2, \mathbb{P}_2, \mathbb{U}_2, \ldots$$



THÉORÈME DE JORDAN-SCHÖNFLIES



$\mathbb{S}^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Theorem 2. *Soit $S \subseteq \mathbb{S}^2$ homéomorphe à $\mathbb{S}^1$. Alors S est l'image de $\mathbb{S}^1$ par un homéomorphisme de $\mathbb{S}^2$.* □

Theorem 3. *Toute surface compacte est homéomorphe à une surface triangulée.* □

[1] C. Thomassen. The jordan-schönflies theorem and the classification of surfaces. Amer. Math. Monthly, 99:116–130, 1992.

TOPOLOGIE PRODUIT, QUOTIENT – RECOLLEMENT

Soient X_1 et X_2 deux espaces topologiques. La *topologie produit* sur $X_1 \times X_2$ est la topologie la moins fine rendant continues les projections canoniques $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ et $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$.

Soit X un espace topologique et $f : X \to Y$ une application surjective. Alors

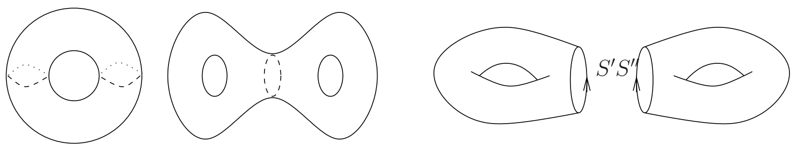
$$\{V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \text{ est un ouvert de } X\}$$

est une topologie sur Y, appelée la *topologie quotient*. La topologie quotient est la plus fine (i.e. celle qui contient le plus d'ouverts) rendant continue l'application f,

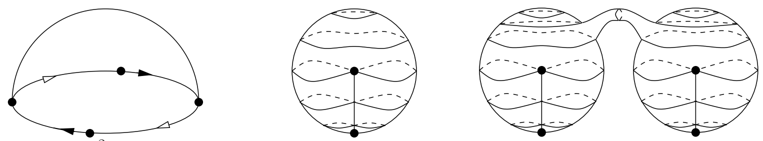
Soit X_α une famille d'espaces topologiques et soit $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$ la somme disjointe des X_α. La *topologie somme disjointe* sur X est la topologie la plus fine rendant continues les injections canoniques $i_\alpha : X_\alpha \to X$ (i.e. une partie U de X est ouverte si et seulement si $i_\alpha^{-1}(U)$ est un ouvert de X_α pour tout α).

Soient X et Y deux espaces topologiques, A un sous-espace de X et $f : A \to Y$ une application continue. On appelle *recollement de X sur Y par f* l'espace topologique $X \bigsqcup_f Y$ quotient de la somme disjointe $X \bigsqcup Y$ par la relation d'équivalence engendrée par la relation $x \sim y$ si $x \in A, y \in Y$ et $f(x) = y$.

SOMME CONNEXE DE TORES ET DE PLANS PROJECTIFS



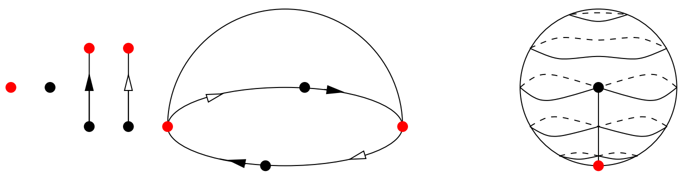
1. Le tore $\mathbb{T}_1$ est le produit de $\mathbb{S}^1$ par $\mathbb{S}^1$; Le tore $\mathbb{T}_n$, $n \geq 2$, est défini comme la somme connexe $\mathbb{T}_n = \underbrace{\mathbb{T}_1 \sharp \mathbb{T}_1 \sharp \cdots \sharp \mathbb{T}_1}_{n}$ de n exemplaires de $\mathbb{T}_1$; Le tore $\mathbb{T}_n$ percé d'un trou est noté $\mathbb{V}_n$.



$\overline{\mathbb{B}}^2$ $\qquad$ $\mathbb{P}_2$ $\qquad$ $\mathbb{P}_2 \sharp \mathbb{P}_2$

2. Le plan projectif $\mathbb{P}_2$ est défini comme le quotient de la sphère $\mathbb{S}^2$ par la relation d'équivalence $x \sim -x$. Le tore/bouteille de Klein $\mathbb{U}_2 = \mathbb{P}_2 \sharp \mathbb{P}_2$, et par récurrence $\mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n \sharp \mathbb{P}_2$. Le plan projectif percé d'un trou est un ruban de Möbius.
3. $\mathbb{T}_1 \sharp \mathbb{P}_2 = \mathbb{U}_2 \sharp \mathbb{P}_2$, $\mathbb{U}_{2n+1} = \mathbb{T}_n \sharp \mathbb{P}_2$, $\mathbb{U}_{2n+2} = \mathbb{T}_n \sharp \mathbb{U}_2$.

COMPLEXES CELLULAIRES



– Une n-cellule ouverte (fermée) est une copie de la boule unité ouverte (fermée) de $\mathbb{R}^n$. (Par convention une 0-cellule est un singleton et son bord est l'ensemble vide.)

– Recette des complexes cellulaires de dimension finie:

(a) Commencer par un ensemble discret X^0 de 0-cellules.

(b) Par récurrence construire le n-squelette X^n à partir de X^{n-1} en recollant des n-cellules fermées e^n_α sur X^{n-1} par des applications continues $\varphi_\alpha : \partial e^n_\alpha \to X^{n-1}$.

(c) Arrêter la récurrence après un nombre fini d'étapes.

GRAPHES

Un graphe est un complexe celullaire de dimension 1, arbres, arbres couvrants, parcours de graphes, algorithmique des graphes, etc.

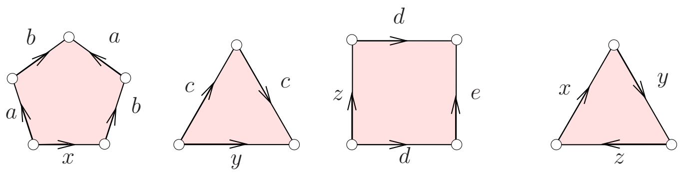
[1] R. E. Tarjan. Data Structures and Network Algorithms, volume 44 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1983

RECOLLEMENT D'ESPACES MÉTRIQUES

Recollement par isométrie. Soient X et Y deux espaces métriques, A une partie compacte de X et $f : A \to Y$ une isométrie. Sur $X \cup Y$, soit R la relation d'équivalence qui identifie a et $f(a)$ ($a \in A$). L'espace Z quotient de $X \cup Y$ par la relation R est muni de la distance définie par

$$\begin{aligned} d(\overline{x}, \overline{x}') &= d(x, x') && x, x' \in X \\ d(\overline{y}, \overline{y}') &= d(y, y') && y, y' \in Y \\ d(\overline{x}, \overline{y}) &= \inf_{a \in A} (d(x, a) + d(f(a), y)) && x \in X, y \in Y. \end{aligned}$$

SYSTÈME DE RELATIONS OU SCHÉMAS POLYGONAUX



Handle/Poignée:	$aba^{-1}b^{-1}x^{-1} = 1,$	$x = aba^{-1}b^{-1},$
Crosscap/Bonnet croisé:	$ccy^{-1} = 1,$	$y = cc,$
Cuff/Cylindre:	$ded^{-1}z^{-1} = 1,$	$z = ded^{-1},$
Remainder/Disque:	$xyz = 1.$	

- $S = \{a, b, c, \ldots\}$ un alphabet de symboles; l'inverse a^{-1} d'un symbole a; $(a^{-1})^{-1} = a$;
- Relation : $A = B$ où $A, B \in \hat{S}^* = (S \cup S^{-1})^*$; systèmes de relations; deux systèmes de relations sont dits équivalents si l'on peut passer d'un système à l'autre par substitution et transposition de symboles:

$$aX = Y \Leftrightarrow X = a^{-1}Y, \qquad Xa = Y \Leftrightarrow X = Ya^{-1}.$$

– Complexe cellulaire associé à un système de relations; sommets, arêtes, faces.

SURFACES COMPACTES DÉFINIES PAR UN SYSTÈME DE RELATIONS

Theorem 4. *Le complexe cellulaire associé à un système de relations est une surface si et seulement si le système de relations satisfait les propriétés suivantes*

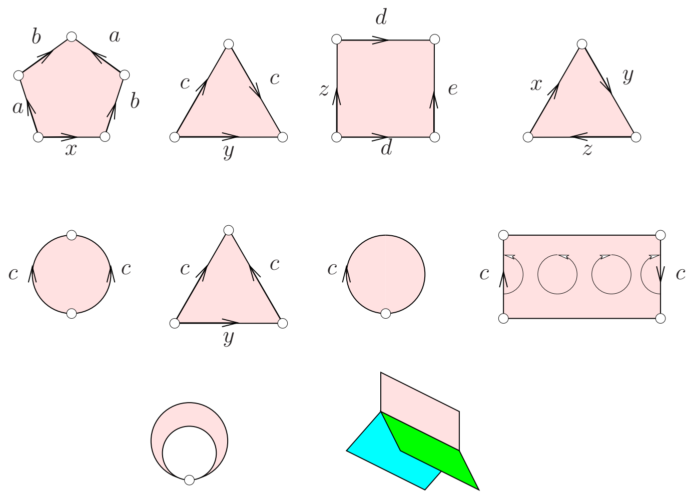
1. *aucun symbole n'apparait plus de deux fois;*
2. *toute partition du système de relations en deux systèmes de relations sépare les deux occurences (qui existent) d'au moins un symbole.* □

- Sommets (internes, frontaliers), arêtes (internes, frontalières) et faces;
- Bords: cycles d'arêtes frontalières pour la relation d'adjacence. Une surface sans bord est dite fermée.
- Caractéristique d'Euler:

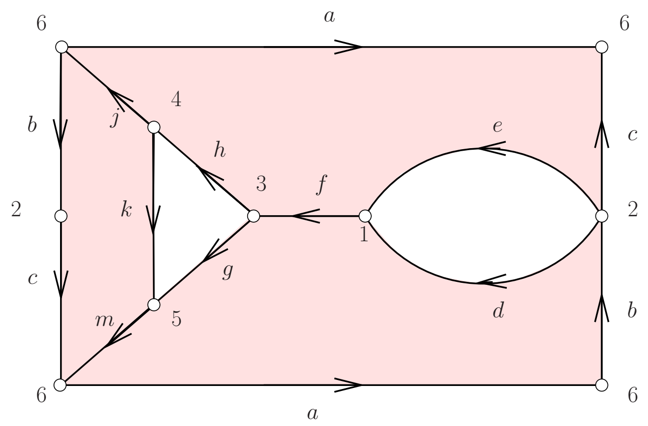
$$\boxed{\chi = \#\text{faces} - \#\text{arêtes} + \#\text{sommets}.}$$

- Une surface est dite orientable si elle est définissable par un système de relations de la forme $A = 1$ tel que tout symbole x apparaissant deux fois apparaisse une fois sous la forme x et une fois sous la forme x^{-1}.

EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

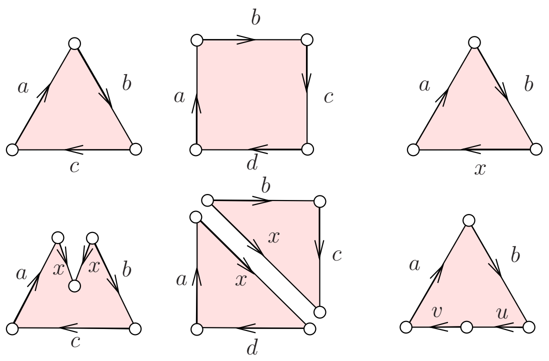


BOUTEILLE DE KLEIN À DEUX TROUS



$$\boxed{ac^{-1}efhj = 1, \qquad bcm^{-1}k^{-1}j = 1, \qquad abdfgm = 1.}$$

SUBDIVISER ET COMPOSER – INCISER



$$\begin{array}{|llcl|}\hline ABC & = D & \iff & AxC = D, B = x \\ Axx^{-1}B & = D & \iff & AB = D \\ AxBx^{*}C & = D & \iff & AuvB(uv)^{*}C = D \\ \hline\end{array}$$

FORME CANONIQUE

Theorem 5. *Toute surface (compacte) est homéomorphe à une surface définie par un système de relations de la forme*

$$\begin{cases} x_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}, & i = 1, \ldots, p; \\ y_i = c_i c_i, & i = 1, \ldots, q; \\ z_i = d_i e_i d_i^{-1}, & i = 1, \ldots, r; \\ x_1 \ldots x_p y_1 \ldots y_q z_1 \ldots z_r = 1. \end{cases}$$

avec $p = 0$ ou $q = 0$. De plus la surface est orientable si seulement si $q = 0$, son nombre de bords est r et sa caractéristique d'Euler est à $2 - 2p - q - r$. □

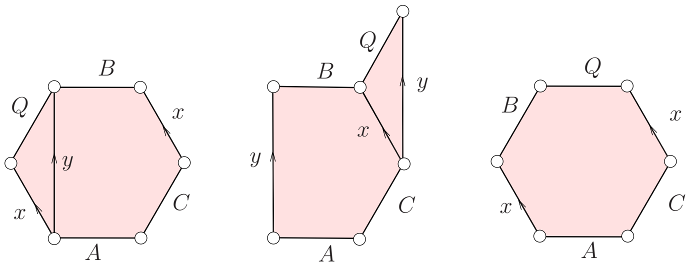
Une surface de caractéristique d'Euler égale à 2 est une sphère ($1 = 1$).

Une surface de caractéristique d'Euler égale à 0 est un tore, un cylindre, un ruban de Möbius ou une bouteille de Klein:

$$\begin{array}{lcllcl} aba^{-1}b^{-1} & = & 1 & ded^{-1}d'e'd'^{-1} & = & 1 \\ cded^{-1} & = & 1 & ccc'c' & = & 1. \end{array}$$

Une surface de caractéristique d'Euler égale à 1 est un disque ($ded^{-1} = 1$) ou un plan projectif ($cc = 1$).

DEUX RÈGLES DE CIRCULATION



$$\begin{array}{|rcl|}\hline AxQBxC = D & \iff & AxBxQ^{-1}C = D \\ AxQBx^{-1}C = D & \iff & AxBQx^{-1}C = D \\ \hline\end{array}$$

Rule I. If a symbol x occurs twice in the same relation, both times as x, then a block Q which is on one side of x in one position can be removed, provided Q^{-1} is put on the same side of x in the other position.

Rule II. If a symbol x occurs twice in the same relation, once as x and once as x^{-1}, then a block Q which is on one side of x in one position can be moved (without inversion) to the other side of x^{-1}.

PREUVE

Step 1. Réduire le système de relations à une seule relation.

Step 2. Assembler les "crosscaps".

$$\begin{cases} y_i = c_i c_i, & i = 1, \ldots, q; \\ y_1 \ldots y_q Q = 1. \end{cases}$$

Step 3. Assembler les anses.

$$\begin{cases} x_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}, & i = 1, \ldots, p; \\ y_i = c_i c_i, & i = 1, \ldots, q; \\ x_1 \ldots x_p y_1 \ldots y_q R = 1. \end{cases}$$

Step 4. Assembler les manches.

$$\begin{cases} x_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}, & i = 1, \ldots, p; \\ y_i = c_i c_i, & i = 1, \ldots, q; \\ z_i = d_i e_i d_i^{-1}, & i = 1, \ldots, r; \\ x_1 \ldots x_p y_1 \ldots y_q z_1 \ldots z_r = 1. \end{cases}$$

Step 5. Transformer les anses en crosscaps (s'il y a au moins un crosscap)

PREUVE DÉTAILLÉE

Step 1. Réduire le système de relations à une seule relation.

Step 2. Assembler les “crosscaps”.

$$A\boxed{B}cCcD \to Ac\boxed{CB^{-1}}cD \to AccBC^{-1}D \to \cdots$$

Step 3. Assembler les anses.

$$A\boxed{B}aCbDa^{-1}Eb^{-1}F \;\to\; AaCbDa^{-1}\boxed{BE}b^{-1}F \to Aa\boxed{Cb}BEDa^{-1}b^{-1}F \to$$
$$Aa\boxed{BEDC}ba^{-1}b^{-1}F \;\to\; Aaba^{-1}b^{-1}BEDCF \to \cdots$$

Step 4. Assembler les manches.

$$A\boxed{B}dEd^{-1}D \to AdEd^{-1}BD \to Aded^{-1}BD \to \cdots$$

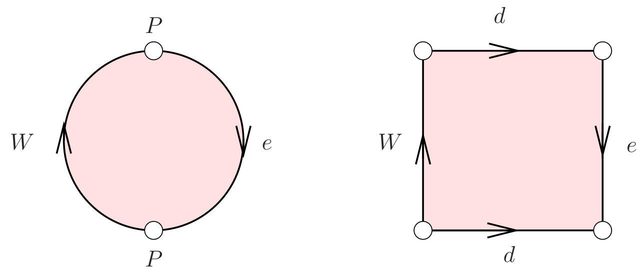
$$\begin{cases} x_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}, & i = 1, \dots, p; \\ y_i = c_i c_i, & i = 1, \dots, q; \\ z_i = d_i e_i d_i^{-1}, & i = 1, \dots, r; \\ x_1 \dots x_p y_1 \dots y_q z_1 \dots z_r S = 1 \end{cases}$$

où S est le mot vide ou un nouveau symbole e.

Step 5. Transformer les anses en crosscaps (s’il y a au moins un crosscap)

$$Aab\boxed{a^{-1}b^{-1}}ccF \mapsto Aa\boxed{bcb}acF \mapsto Aaab^{-1}\boxed{c^{-1}}b^{-1}cF \mapsto Aaab^{-1}b^{-1}ccF \mapsto \cdots$$

ASSEMBLER LES MANCHES



$$W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots c_1 c_1 \cdots d_1 e_1 d_1^{-1} \cdots d_r e_r d_r^{-1}$$

Insérons dd^{-1} à gauche de e et décalons d vers la gauche par application répétée des règles de circulation pour passer les crosscaps, les manches et les anses:

1. le bloc $d_i e d_i^{-1} d$ se réécrit en $dd_i e_i d_i^{-1}$;
2. le bloc $c_i c_i d$ se réécrit successivement en $c_i d^{-1} c_i$ et $dc_i c_i$;
3. le bloc $a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} d$ se reécrit successivement en $a_i d b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$, $a_i b_i d a_i^{-1} b_i^{-1}$, $a_i b_i a_i^{-1} d b_i^{-1}$, et $d a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$.

Au final nous obtenons la forme $dWd^{-1}e = 1$, équivalente à $Wd^{-1}ed = 1$ par application de deux transpositions.

NOTES

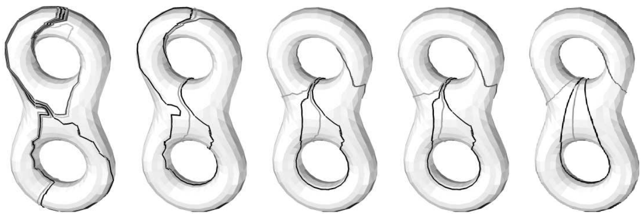
BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Brahana. Systems of circuits on 2-dimensional manifolds. Ann. Math., 23:144–168, 1921.

[2] W. S. Massey. A Basic Course in Algebraic Topology. Springer-Verlag, 1991.

[3] R. C. James. Combinatorial topology of surfaces. In A. K. Stehney, T. K. Milnor, J. E. D’Atri, and T. F. Banchoff, editors, Selected papers on geometry, volume 4 of The Raymond W. Brink Selected Mathematical Papers, pages 79–114. The Mathematical Association of America, 1979. Reprint from Mathematics Magazine, vol. 20 (1955), pp. 1–39.

CALCUL D'UN SCHÉMA POLYGONAL CANONIQUE



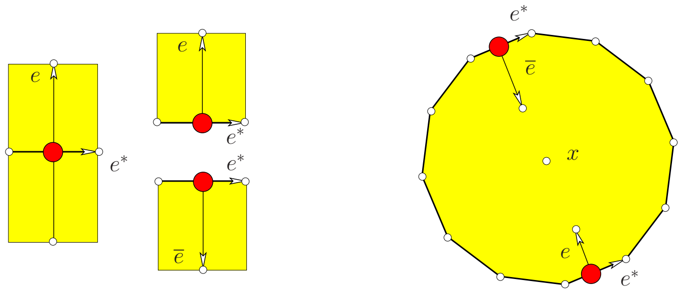
Pour toute surface $\mathcal{M}$ fermée orientable de genre g nous avons montré l'existence d'un bouquet de $2g$ lacets $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g$ plongé sur $\mathcal{M}$ dont le complémentaire est un disque et dont le shéma polygonal associé est en forme canonique, i.e. de la forme

$$[a_1, b_1][a_2, b_2] \ldots [a_g, b_g] = 1,$$

où $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$. Ces lacets sont des lacets générateurs du groupe fondamental de la surface. Un tel ensemble de lacets est appelé un ensemble canonique de générateurs du groupe fondamental de la surface.

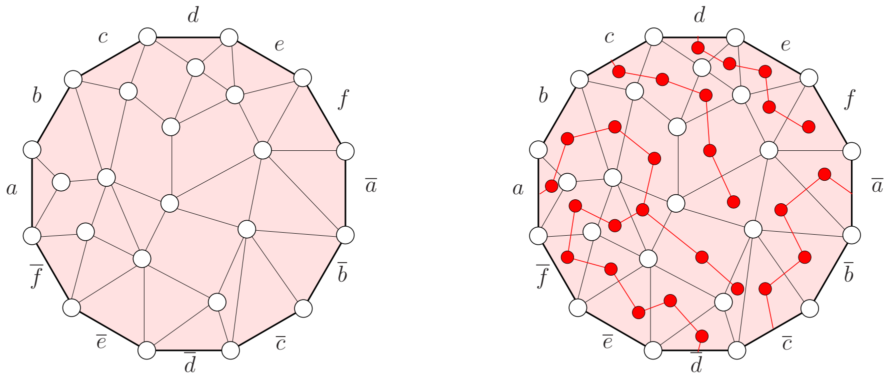
Theorem 6. *Un ensemble canonique de générateurs du groupe fondamental d'une surface orientable fermée triangulée de genre g à n triangles est calculable en temps $O(gn)$.* □

RÉDUCTION À UNE SEULE RELATION

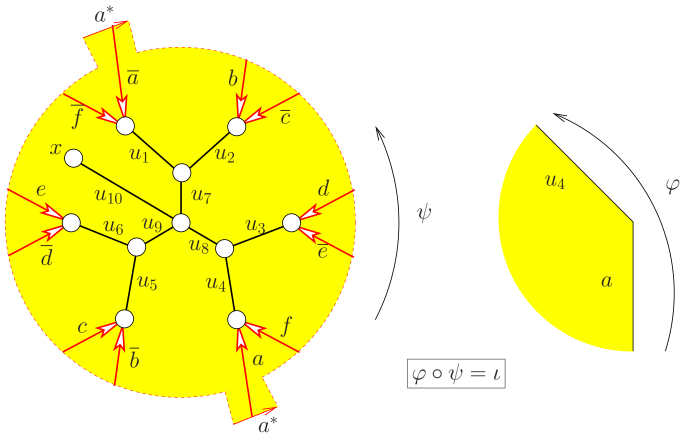


- $\mathcal{M} = (V, A, F)$ une surface triangulée fermée orientable de genre g;
  G un sous-graphe du graphe sommets-arêtes de la surface $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \setminus G$ soit un disque ouvert (par exemple $G = (V, A \setminus A')$ où (F, A') est un arbre couvrant de (F, A)).
- S un arbre couvrant de G de racine x, T l'ensemble des arêtes de S, E l'ensemble des arêtes de $G \setminus T$. les arêtes de T sont orientées vers la racine x et les arêtes de E sont orientées arbitrairement. Elimination récursive des arêtes de T de degré entrant nul.
- opérateurs ι, ψ et φ tel que $\varphi \circ \psi = \iota$. N_G un voisinage tubulaire de G.

EXEMPLE



EXEMPLE

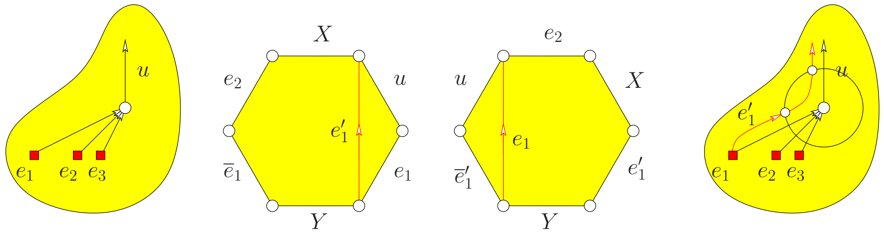


$\boxed{\varphi \circ \psi = \iota}$

- $E = \{a, b, c, d, e, f\}$, $T = \{u_1, u_2, \ldots, u_{10}\}$

$$\boxed{a u_4 u_8 \overline{u}_9 \overline{u}_5 b c u_5 \overline{u}_6 d e u_6 u_9 u_{10} x \overline{u}_{10} \overline{u}_7 \overline{u}_1 f \overline{a} u_1 \overline{u}_2 \overline{b} \overline{c} u_2 u_7 \overline{u}_8 \overline{u}_3 \overline{d} \overline{e} u_3 \overline{u}_4 \overline{f} = 1}$$

RÉDUCTION À UN SEUL SOMMET – BOUQUET DE CERCLES



Choose a minimal tree-edge u and let $e_1, e_2, \ldots, e_k$ be the sequence of its incoming paths in $\hat{E}$. Assume $k \geq 2$. Then we can write

$$M = e_1 u X e_2 \overline{e}_1 Y$$

and replace the path e_1 by a path $e_1' \sim e_1 u$ with $L(u) = e_1' u$ to get $M = e_1' X e_2 u \overline{e}_1' Y$. Now u is a minimal tree-edge whose sequence of incoming paths is $e_2, e_3, \ldots, e_k$. By a repeated application of this principle we arrive at the situation where the sequence of incoming paths of u reduced to e_k and where $L(u) = e_1' e_2' \ldots e_{k-1}' u$. In that case $M = e_k u X \overline{u} \overline{e}_k Y$ and replacing e_k by $e_k' \sim e_k u$ we get $M = e_k' X \overline{u} u \overline{e}_k' Y$ with $L(u) = e_1' e_2' e_3 \ldots e_k' u$. Now u is minimal but its sequence of incoming paths is reduced to the empty sequence. Then we can cancel $\overline{u} u$ to get $L(u) = e_1' e_2' \ldots e_k'$.

RÉDUCTION À UN SEUL SOMMET – BOUQUET DE CERCLES

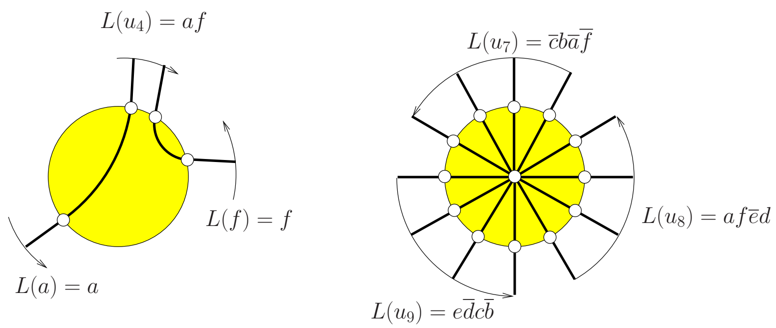
$$\begin{array}{rcll}
[au_4] u_8 \overline{u}_9 \overline{u}_5 b c u_5 \overline{u}_6 d e u_6 u_9 u_{10} x \overline{u}_{10} \overline{u}_7 \overline{u}_1 f \overline{a} u_1 \overline{u}_2 \overline{b} \overline{c} u_2 u_7 \overline{u}_8 \overline{u}_3 \overline{d} \overline{e} u_3 \overline{u}_4 \overline{f} & = & 1 & a \leftarrow a u_4 \\
a u_8 \overline{u}_9 \overline{u}_5 b c u_5 \overline{u}_6 d e u_6 u_9 u_{10} x \overline{u}_{10} \overline{u}_7 \overline{u}_1 [f u_4] \overline{a} u_1 \overline{u}_2 \overline{b} \overline{c} u_2 u_7 \overline{u}_8 \overline{u}_3 \overline{d} \overline{e} u_3 \overline{u}_4 \overline{f} & = & 1 & f \leftarrow f u_4 \\
a u_8 \overline{u}_9 \overline{u}_5 b c u_5 \overline{u}_6 d e u_6 u_9 u_{10} x \overline{u}_{10} \overline{u}_7 \overline{u}_1 f \overline{a} u_1 \overline{u}_2 \overline{b} \overline{c} u_2 u_7 \overline{u}_8 \overline{u}_3 \overline{d} \overline{e} u_3 [\overline{u}_4 u_4] \overline{f} & = & 1 & 1 \leftarrow \overline{u}_4 u_4 \\
a u_8 \overline{u}_9 \overline{u}_5 b c u_5 \overline{u}_6 d e u_6 u_9 u_{10} x \overline{u}_{10} \overline{u}_7 \overline{u}_1 f \overline{a} u_1 \overline{u}_2 \overline{b} \overline{c} u_2 u_7 \overline{u}_8 \overline{u}_3 \overline{d} \overline{e} u_3 \overline{f} & = & 1 & \\
\ldots & = & 1 &
\end{array}$$

$$\boxed{\ell(a)\ell(b)\ell(c)\ell(d)\ell(e)\ell(f)\ell(\overline{a})\ell(\overline{b})\ell(\overline{c})\ell(\overline{d})\ell(\overline{e})\ell(\overline{f}) = 1}$$

où $\ell(a)$ est homotope au plus court lacet $s(a)$ dans le graphe $S \cup a$ d'extrémité x passant par l'arête a :

$$\ell(a) \sim s(a) = \overline{u}_{10} \overline{u}_9 \overline{u}_7 \overline{u}_1 a u_4 u_8 u_{10}.$$

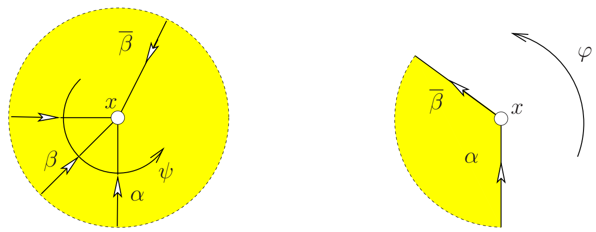
CODAGE DES LACETS



Comment coder les lacets $\ell(e)$, $e \in E$?

- $L(v)$ est la liste des lacets $\ell(e)$ $(e \in \hat{E})$ longeant l'arête orienté v de G.
- $L(\overline{v}) = \text{reversal}(\overline{L(v)})$;
- $L(e) = \ell(e)$ pour $e \in \hat{E}$;
- $L(u) = L(u_1)L(u_2)\ldots L(u_k)$ où $u \in T$ et $u_1 u_2 \ldots u_k$ est la liste des arêtes d'extrémités la source de u.

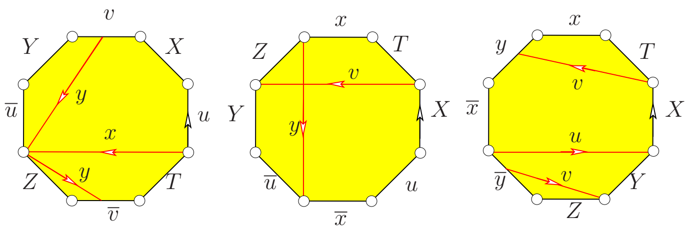
ASSEMBLER LES ANSES



- Cutgraph $\mathcal{G}$, disk $D(\mathcal{G})$, polygonal schemata $M(\mathcal{G})$, cyclic sequence $C(\mathcal{G})$
- $\mathcal{G} = \{\alpha, \ldots\}$, $D(\mathcal{G}) = \mathcal{M} \setminus \mathcal{G}$, $M(\mathcal{G}) = \alpha\varphi(\alpha)\varphi^2(\alpha)\ldots$, $C(\mathcal{G}) = \alpha\psi(\alpha)\psi^2(\alpha)\ldots$;
-

$$\boxed{\varphi \circ \psi = \iota}.$$

ASSEMBLER LES ANSES : TRANSFORMATION DE BRAHANA



1. choose an interlaced pair u, v and define X, Y, Z, and T by $M(\mathcal{G}) = uXvY\overline{u}Z\overline{v}T$;
2. replace the loop v by a loop $x \sim uXvY\overline{u}$ traced in the interior of the disk $D(G)$; replace the loop u by a loop $y \sim ZY\overline{u}$ traced in the interior of the disk $D(G \setminus \{v\} \cup \{x\})$.

Thus we obtain a sequence $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \setminus \{v\} \cup \{x\}$ and $\mathcal{G}'' = \mathcal{G}' \setminus \{u\} \cup \{y\}$ of 3 cutgraphs whose associated polygonal schemata are $uXvY\overline{u}Z\overline{v}T$, $ZY\overline{u}\overline{x}uXTx$, and $ZYXT[x, y]$, and whose associated cyclic sequences are $C\overline{u}$, $x\overline{u}\overline{x}C_v$, and $[\overline{x}, y]C_{\{u,v\}}$ where C_D is the result of the substitution of the empty word to the occurences of the loops of $\hat{D}$ in the sequence C. (If X, Y, Z are all empty, then we will simply set $x = u$ and $y = v$.)

AN EXAMPLE

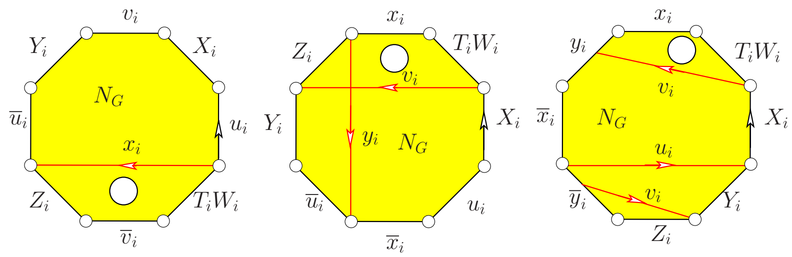
For example if $\mathcal{G} = \{a, b, c, d, e, f\}$ and $M(\mathcal{G}) = abcdef\overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}\overline{e}\overline{f}$ we replace successively the loops $d, a, e, \overline{b}$ by the loops $x_1 \sim abcdef\overline{a}$, $y_1 \sim \overline{b}\overline{c}ef\overline{a}$, $x_2 \sim \overline{b}\overline{c}efb$, $y_2 \sim cfb$ (traced in the appropriated disks), and simply set $x_3 = c$ and $y_3 = f$; the successive corresponding polygonal schemata are

$M(G)$			$M(G')$			$M(G'')$
$\overbrace{uXvY\overline{u}}^{x}$	$Z\overline{v}$	T	$\overbrace{ZY\overline{u}}^{y}$	$\overline{x}u$	XTx	$ZYXT[x, y]$
$abcdef\overline{a}$	$\overline{b}\overline{c}\overline{d}$	$\overline{e}\overline{f}$	$\overline{b}\overline{c}ef\overline{a}$	$\overline{x}_1a$	$bc\overline{e}\overline{f}x_1$	$\overline{b}\overline{c}efbc\overline{e}\overline{f}[x_1, y_1]$
$\overline{b}\overline{c}efb$	$c\overline{e}$	$\overline{f}[x_1, y_1]$	cfb	$\overline{x}_2\overline{b}$	$\overline{c}\overline{f}[x_1, y_1]x_2$	$cf\overline{c}\overline{f}[x_1, y_1][x_2, y_2]$

and the successive associated cyclic sequences are

$$\begin{aligned}
\overline{f}e\overline{d}c\overline{b}af\overline{e}d\overline{c}b\overline{a} &= C(G) &&= C \\
x_1\overline{a}\overline{x}_1\overline{f}e\ \ c\overline{b}af\overline{e}\ \ \overline{c}b &= C(G') &&= x_1\overline{a}\overline{x}_1C_d \\
[\overline{y}_1, x_1]\overline{f}e\ \ c\overline{b}\ \ f\overline{e}\ \ \overline{c}b &= C(G'') &&= [\overline{y}_1, x_1]C_{\{a,d\}} \\
x_2b\overline{x}_2[\overline{y}_1, x_1]\overline{f}\ \ c\overline{b}\ \ f\ \ \overline{c}b &= &&= x_2b\overline{x}_2[\overline{y}_1, x_1]C_{\{a,d,e\}} \\
[\overline{y}_2, x_2][\overline{y}_1, x_1]\overline{f}\ \ c\ \ f\ \ \overline{c} &= &&= [\overline{y}_2, x_2][\overline{y}_1, x_1]C_{\{a,d,e,b\}}.
\end{aligned}$$

MORE PRECISELY ...



We perform g Brahana transformations starting from G_0 to obtain a canonical cutgraph G_{2g}. Let $G_0, G_1, \ldots, G_{2g}$ be the sequence of cutgraphs associated with the Brahana transformations, let u_i, v_i be the interlaced pair of $G_{2(i-1)}$ chosen for the i-th Brahana transformation, and let x_i, y_i be the pair of G_{2i} that replaces the pair u_i, v_i. By definition $x_i \sim u_iX_iv_iY_i\overline{u}_i$ and $y_i \sim Z_iY_i\overline{u}_i$ (in the appropriated disks) where X_i, Y_i, Z_i, and T_i are defined by

$$M(G_{2(i-1)}) = u_iX_iv_iY_i\overline{u}_iZ_i\overline{v}_iT_i[x_1, y_1][x_2, y_2] \ldots [x_{i-1}, y_{i-1}]$$

(unless $X_i = Y_i = Z_i = \emptyset$, in which case $x_i = u_i$ and $y_i = v_i$). Our idea is to choose x_i in a tubular neighbourhood of ...

SUITE

- Let $(z_i, w_i) = (x_{\lceil i/2 \rceil}, v_{\lceil i/2 \rceil})$ if i is odd; $(y_{\lceil i/2 \rceil}, u_{\lceil i/2 \rceil})$ otherwise. Let $D_k = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$. z_i replace w_i and $z_i \sim c_i$ where $c_i = u_iX_iv_iY_i\overline{u}_i$ if i is odd; $Z_iY_i\overline{u}_i$ otherwise.
- For $\gamma \in \hat{E}_0$ let $\langle z_i, \gamma \rangle = z_i$ if γ occurs in c_i; otherwise let $\langle z_i, \gamma \rangle$ be the empty word. Similarly let $\langle \overline{z}_i, \gamma \rangle = \overline{z}_i$ if $\overline{\gamma}$ occurs in c_i; otherwise let $\langle \overline{z}_i, \gamma \rangle$ be the empty word. Then we define $L_k(\gamma)$ $(k = 1, \ldots, 2g)$ to be the word

$$\langle z_1, \gamma \rangle \langle z_2, \gamma \rangle \cdots \langle z_k, \gamma \rangle \gamma(k) \langle \overline{z}_k, \gamma \rangle \cdots \langle \overline{z}_2, \gamma \rangle \langle \overline{z}_1, \gamma \rangle \quad (1)$$

  where $\gamma(k) = \gamma$ if $\gamma \in \hat{E}_k$; the empty word otherwise.

Par construction $L_k(\gamma)$ est la liste des lacets de $\hat{E}_k$ longeant en parallèle le lacet γ et ordonnés de gauche à droite.

EXEMPLE

In our example $M = abcdef\overline{abcdef}$ we need three Brahana transformations, e.g.,

$$\begin{aligned}(a,d) &\mapsto (x_1 \sim abcdef\overline{a},\ y_1 \sim \overline{b}\overline{c}ef\overline{a}),\\ (\overline{b},e) &\mapsto (x_2 \sim \overline{b}\overline{c}efb,\ y_2 \sim cfb),\\ (c,f) &\mapsto (x_3 = c,\ y_3 = f)\end{aligned}$$

i	1	2	3	4
$L_i(a)$	$x_1a\overline{x}_1$	$x_1a^\circ\overline{y}_1\overline{x}_1$	$x_1\overline{y}_1\overline{x}_1$	$x_1\overline{y}_1\overline{x}_1$
$L_i(b)$	x_1b	$x_1b\overline{y}_1^*$	$x_1x_2^*b\overline{x}_2^*\overline{y}_1^*$	$x_1x_2^*y_2^*b^\circ\overline{x}_2^*\overline{y}_1^*$
$L_i(c)$	x_1c	$x_1c\overline{y}_1$	$x_1c\overline{x}_2\overline{y}_1$	$x_1y_2c\overline{x}_2\overline{y}_1$
$L_i(d)$	x_1d°	x_1	x_1	x_1
$L_i(e)$	x_1e	x_1y_1e	$x_1y_1x_2e^\circ$	$x_1y_1x_2$
$L_i(f)$	x_1f	x_1y_1f	$x_1y_1x_2f$	$x_1y_1x_2y_2f$

ROUTAGE DES LACETS

For $k = 0, 1, \ldots, 2g$ we define C_k to be the linear sequence of loops in $\hat{E}_k$ encountered when walking counterclockwise around the basepoint starting from the successor of $\overline{u}_1$ if $k = 0$; the successor of $\overline{x}_1$ otherwise.

Theorem 7. *Let $t = 4g - 2k$ if k is even; $4g - 2k - 1$ otherwise. We claim that*

1. *$C_k = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_t W_k$ where $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_t = C_{0|R_k}$, $R_k = \hat{D}_k$ or $\hat{D}_{k-1} \cup \{\overline{w}_k\}$ depending on whether k is even or odd, and where W_k is defined inductively by $W_0 = \epsilon$, $W_{2i+1} = x_{i+1}\overline{u}_{i+1}\overline{x}_{i+1}W_{2i}$, $W_{2i+2} = [\overline{y}_{i+1}, x_{i+1}]W_{2i}$.*
2. *$L_k(C_0) = T_1\gamma_1T_2\gamma_2T_3 \ldots \gamma_{t-1}T_t\gamma_tT_{t+1}$, $T_j \in A_k$ $(j = 1, \ldots, t)$, and $T_{t+1} \in B_k$ where A_k and B_k are defined inductively by ...*
3. *C_k is the unique terminal reduction of $L_k(C_0)$ modulo $\{\overline{z}_1z_1, \overline{z}_2z_2, \ldots, \overline{z}_kz_k\}$. Furthermore $L_k(C_0)$ contains no subword of type $\overline{z}_i\overline{z}_iz_iz_i$, for any i.* □

ROUTAGE DES LACETS

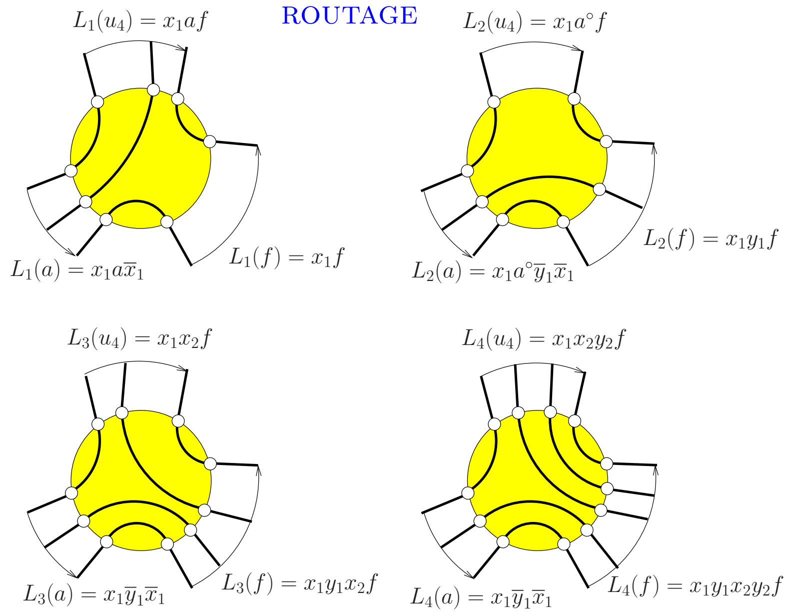
Pour tout $e \in \hat{E}$ on pose $L_k(e) = L_k(\ell(e))$, et pour $u \in T$ d'arêtes entrantes $u_1, u_2, \ldots, u_m$ on définit $L_k(u)$ comme l'unique reduction modulo

$$\{\overline{z}_1z_1, \overline{z}_2z_2, \overline{z}_3z_3, \ldots, \overline{z}_kz_k\}$$

de $L_k(u_1)L_k(u_2)\ldots L_k(u_m)$.

Theorem 8. *Every word $L_k(u)$ contains at most two occurences of a generator symbol.* □

ROUTAGE



Construction of the words $L_i(v)$. Bottom-up sweep of the tree ETC.

$L_i(e)$	$\overline{f}$	e	$\overline{d}$	c	$\overline{b}$	a	f	$\overline{e}$	d	$\overline{c}$	b	$\overline{a}$
init	$\overline{f}$	e	$\overline{d}$	c	$\overline{b}$	a	f	$\overline{e}$	d	$\overline{c}$	b	$\overline{a}$
$d \to x_1$	$\overline{f}\overline{x}_1$	x_1e	$\overline{d}^\circ\overline{x}_1$	x_1c	$\overline{b}\overline{x}_1$	$x_1a\overline{x}_1$	x_1f	$\overline{e}\overline{x}_1$	x_1d°	$\overline{c}\overline{x}_1$	x_1b	$x_1^*\overline{a}\overline{x}_1^*$
$a \to y_1$	$\overline{f}\overline{y}_1\overline{x}_1$	x_1y_1e	$\overline{x}_1$	$x_1c\overline{y}_1$	$y_1\overline{b}\overline{x}_1$	$x_1a^\circ\overline{y}_1\overline{x}_1$	x_1y_1f	$\overline{e}\overline{y}_1\overline{x}_1$	x_1	$y_1\overline{c}\overline{x}_1$	$x_1b\overline{y}_1^*$	$x_1^*y_1^*\overline{a}^\circ\overline{x}_1^*$
$e \to x_2$	$\overline{f}\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$	$x_1y_1x_2e^\circ$	$\overline{x}_1$	$x_1c\overline{x}_2\overline{y}_1$	$y_1x_2\overline{b}\overline{x}_2\overline{x}_1$	$x_1\overline{y}_1\overline{x}_1$	$x_1y_1x_2f$	$\overline{e}^\circ\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$	x_1	$y_1x_2\overline{c}\overline{x}_1$	$x_1x_2^*b\overline{x}_2^*\overline{y}_1^*$	$x_1^*y_1^*\overline{x}_1^*$
$\overline{b} \to y_2$	$\overline{f}\overline{y}_2\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$	$x_1y_1x_2$	$\overline{x}_1$	$x_1y_2c\overline{x}_2\overline{y}_1$	$y_1x_2\overline{b}^\circ\overline{y}_2\overline{x}_2\overline{x}_1$	$x_1\overline{y}_1\overline{x}_1$	$x_1y_1x_2y_2f$	$\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$	x_1	$y_1x_2\overline{c}\overline{y}_2^*\overline{x}_1$	$x_1x_2^*y_2^*b^\circ\overline{x}_2^*\overline{y}_1^*$	$x_1^*y_1^*\overline{x}_1^*$

$L_i(u_j)$	$u_6 = e \oplus \overline{d}$	$u_5 = c \oplus \overline{b}$	$u_4 = a \oplus f$	$u_3 = \overline{e} \oplus d$	$u_2 = \overline{c} \oplus b$	$u_1 = \overline{a} \oplus \overline{f}$
init	$e\overline{d}$	$c\overline{b}$	af	$\overline{e}d$	$\overline{c}b$	$\overline{a}\overline{f}$
$d \to x_1$	$x_1e\overline{d}^\circ\overline{x}_1$	$x_1c\overline{b}\overline{x}_1$	x_1af	$\overline{e}d^\circ$	$\overline{c}b$	$x_1^*\overline{a}\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{x}_1$
$a \to y_1$	$x_1y_1e\overline{x}_1$	$x_1c\overline{b}\overline{x}_1$	$x_1a^\circ f$	$\overline{e}\overline{y}_1$	$y_1\overline{c}b\overline{y}_1^*$	$x_1^*y_1^*\overline{a}^\circ\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{y}_1\overline{x}_1$
$e \to x_2$	$x_1y_1x_2e^\circ\overline{x}_1$	$x_1c\overline{b}\overline{x}_2\overline{x}_1$	x_1x_2f	$\overline{e}^\circ\overline{x}_2\overline{y}_1$	$y_1x_2\overline{c}x_2^*b\overline{x}_2^*\overline{y}_1^*$	$x_1^*y_1^*\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$
$\overline{b} \to y_2$	$x_1y_1x_2\overline{x}_1$	$x_1y_2c\overline{b}^\circ\overline{y}_2\overline{x}_2\overline{x}_1$	$x_1x_2y_2f$	$\overline{x}_2\overline{y}_1$	$y_1x_2\overline{c}\overline{y}_2^*x_2^*y_2^*b^\circ\overline{x}_2^*\overline{y}_1^*$	$x_1^*y_1^*\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{y}_2\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$

$L_i(u_j)$	$u_9 = u_6 \oplus u_5$	$u_8 = u_4 \oplus u_3$	$u_7 = u_2 \oplus u_1$
init	$e\overline{d}c\overline{b}$	$af\overline{e}d$	$\overline{c}b\overline{a}\overline{f}$
$d \to x_1$	$x_1e\overline{d}^\circ c\overline{b}\overline{x}_1$	$x_1af\overline{e}d^\circ$	$\overline{c}bx_1^*\overline{a}\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{x}_1$
$a \to y_1$	$x_1y_1ec\overline{b}\overline{x}_1$	$x_1a^\circ f\overline{e}\overline{y}_1$	$y_1\overline{c}b\overline{y}_1^*x_1^*y_1^*\overline{a}^\circ\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{y}_1\overline{x}_1$
$e \to x_2$	$x_1y_1x_2e^\circ c\overline{b}\overline{x}_2\overline{x}_1$	$x_1x_2f\overline{e}^\circ\overline{x}_2\overline{y}_1$	$y_1x_2\overline{c}x_2^*b\overline{x}_2^*\overline{y}_1^*x_1^*y_1^*\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$
$\overline{b} \to y_2$	$x_1y_1x_2y_2c\overline{b}^\circ\overline{y}_2\overline{x}_2\overline{x}_1$	$x_1x_2y_2f\overline{x}_2\overline{y}_1$	$y_1x_2\overline{c}\overline{y}_2^*x_2^*y_2^*b^\circ\overline{x}_2^*\overline{y}_1^*x_1^*y_1^*\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{y}_2\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$

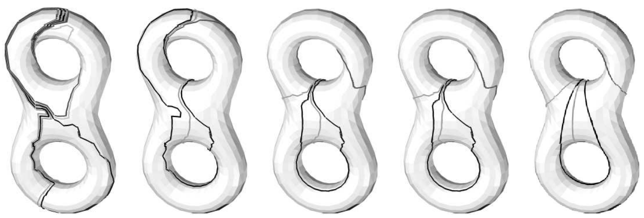
$L_i(u_j)$	$u_{10} = u_9 \oplus u_8 \oplus u_7$
init	$e\overline{d}c\overline{b}af\overline{e}d\overline{c}b\overline{a}\overline{f}$
$d \to x_1$	$x_1e\overline{d}^\circ c\overline{b}af\overline{e}d^\circ\overline{c}bx_1^*\overline{a}\overline{x}_1^*\overline{f}\overline{x}_1$
$a \to y_1$	$x_1y_1ec\overline{b}a^\circ f\overline{e}\overline{c}b\overline{y}_1^*x_1^*y_1^*\overline{a}^\circ\overline{x}_1^*\overline{f}y_1^*x_1^*$
$e \to x_2$	$x_1y_1x_2e^\circ c\overline{b}f\overline{e}^\circ\overline{c}x_2^*b\overline{x}_2^*[\overline{y}_1^*, x_1^*]\overline{f}\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$
$\overline{b} \to y_2$	$x_1y_1x_2y_2c\overline{b}^\circ f\overline{c}\overline{y}_2^*x_2^*y_2^*b^\circ\overline{x}_2^*[\overline{y}_1^*, x_1^*]\overline{f}\overline{y}_2\overline{x}_2\overline{y}_1\overline{x}_1$

$L_i(x)$	$x = u_{10} \oplus u_{10} \cdots$
init	$e\overline{d}c\overline{b}af\overline{e}d\overline{c}b\overline{a}\overline{f}$
$d \to x_1$	$e\overline{d}^\circ c\overline{b}af\overline{e}d^\circ\overline{c}bx_1\overline{a}\overline{x}_1\overline{f}$
$a \to y_1$	$ec\overline{b}a^\circ f\overline{e}\overline{c}b\overline{y}_1^*x_1^*y_1^*\overline{a}^\circ\overline{x}_1^*\overline{f}$
$e \to x_2$	$e^\circ c\overline{b}f\overline{e}^\circ\overline{c}x_2^*b\overline{x}_2^*[\overline{y}_1^*, x_1^*]\overline{f}$
$\overline{b} \to y_2$	$c\overline{b}^\circ f\overline{c}\overline{y}_2^*x_2^*y_2^*b^\circ\overline{x}_2^*[\overline{y}_1^*, x_1^*]\overline{f}$
	$cf\overline{c}[\overline{y}_2^*, x_2^*][\overline{y}_1^*, x_1^*]\overline{f}$

EXAMPLE

$$
\begin{aligned}
x_1 &\sim x\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_1au_4u_8\overline{u}_9\overline{u}_5bcu_5\overline{u}_6deu_6u_9u_{10}\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_1f\overline{a}u_1u_7u_{10}x \\
y_1 &\sim x\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_2\overline{b}\overline{c}u_2u_7\overline{u}_8\overline{u}_3eu_6u_9u_{10}\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_1\overline{a}u_1u_7u_{10}x \\
x_2 &\sim x\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_2\overline{b}\overline{c}u_2u_7\overline{u}_8\overline{u}_3eu_6u_9u_{10}\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_1fu_4u_8\overline{u}_9\overline{u}_5bu_2u_7u_{10}x \\
y_2 &\sim x\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_2cu_5u_9u_{10}\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_1fu_4u_8\overline{u}_9\overline{u}_5bu_2u_7u_{10}x \\
x_3 &\sim x\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_2cu_5u_9u_{10}x \\
y_3 &\sim x\overline{u}_{10}\overline{u}_7\overline{u}_1fu_4u_8u_{10}x
\end{aligned}
$$

CALCUL, OPTIMISATION ET LISSAGE D'UN SCHÉMA POLYGONAL CANONIQUE



[1] F. Lazarus, M. Pocchiola, G. Vegter, and A. Verroust. Computing a canonical polygonal scheme of an orientable triangulated surface. In Proc. 17th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom., pages 80–89, 2001. Full version in preparation.

[2] É. Colin de Verdière and F. Lazarus. – Optimal system of loops on an orientable surface. Discrete Comput. Geom. – 33(3), March 2005. A preliminary version appeared in the Proc. 43rd Annu. IEEE Sympo. Found. Comput. Science (FOCS'02).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Éric Colin de Verdière and Jeff Erickson. Tightening non-simple paths and cycles on surfaces. In Proceedings of the 17th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), pages 192–201, January 2006.

[2] Jeff Erickson and Sariel Har-Peled. Optimally cutting a surface into a disk. Discrete Comput. Geom., 31:37–59, 2004. SoCG'02.

[3] É. Colin de Verdière and F. Lazarus. Optimal pants decompositions and shortest homotopic cycles on an orientable surface. In Proceedings of the 11th Symposium on Graph Drawing (GD'03), pages 478–490, 2003.

[4] E. Colin. de Verdière. – Raccourcissement de courbes et décomposition de surfaces. – Thèse, Ecole Normale Supérieure (Paris), December 2003.

[5] T. K. Dey and H. Schipper. A new technique to compute polygonal schema for 2-manifolds with application to null-homotopy detection. Discrete Comput. Geom., 14:93–110, 1995.

NOTES

NOTES

NOTES

NOTES