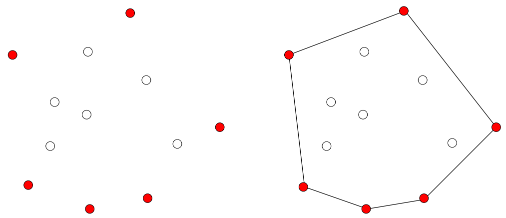
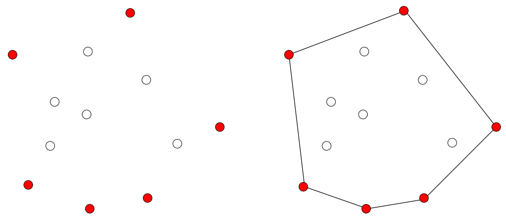
Topics in Computational Geometry

Michel Pocchiola (Ens-Paris, Michel.Pocchiola@ens.fr)
http://www.di.ens.fr/ pocchiol/

5. Enveloppe convexe 2D



POLYGONES

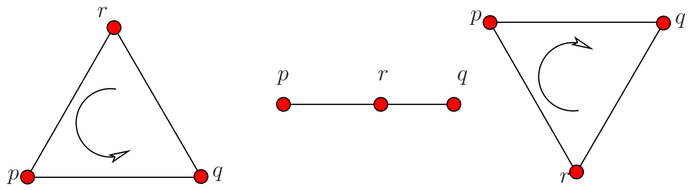


Un convexe est dit finiment engendré s'il coincide avec l'enveloppe convexe d'une famille finie de points.

Theorem 1. *La famille des convexes finiment engendrés coincide avec la famille des intersections finies et bornées de demi-plans fermés (les polygones).* □

Pour K fini les sommets de $\mathrm{conv}(K)$ sont ses points extremaux (i.e. les points x de K tels qu'il existe une droite passant par x telle que $K \setminus \{x\}$ soit inclus dans l'un des deux demi-plans ouverts définis par la droite), et ses arêtes sont les segments extremaux joignants deux points de K (i.e. les segments $[x, y]$, $x, y \in K$, tels que $K \setminus [x, y]$ soit inclus dans l'un des deux demi-plans ouverts définis par la droite xy).

ORIENTATION D'UN TRIPLET DE POINTS

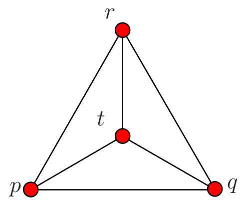


$$\boxed{\chi : (p, q, r) \in \mathbb{R}^{2\times 3} \mapsto \text{sign}\det\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \in \{+, 0, -\}}$$

1. $\det\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ = deux fois l'aire algébrique du triangle pqr

2. $\det\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} q & r & p \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\det\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} p & r & q \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

ORIENTATION D'UN TRIPLET DE POINTS



Lemma 1. *Soient $tpqr$ un quadruplet de points tels que les trois triplets tpq, tqr et trp aient des orientations positives. Alors il en est de même du triplet pqr.* □

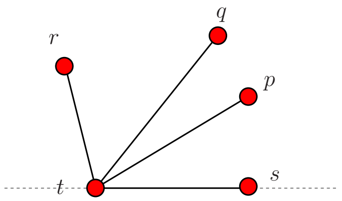
Se déduit de la relation

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} p & q & r & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} q & r & t \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} p & r & t \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} p & q & t \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = 0.}$$

Dans ce cas nous notons que le point t est combinaison convexe des points p, q et r (régle de Cramer):

$$\det\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} t = \det\begin{pmatrix} t & q & r \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} p + \det\begin{pmatrix} p & t & r \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} q + \det\begin{pmatrix} p & q & t \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} r.$$

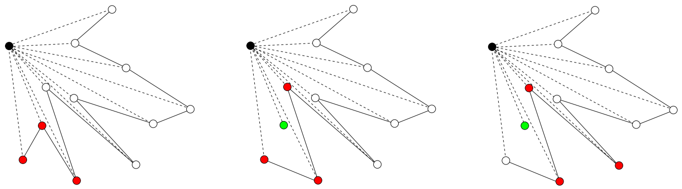
ORIENTATION D'UN TRIPLET DE POINTS



Lemma 2. *Si les triplets tsp, tsq, tsr, tpq et tqr ont des orientations positives alors il en est de même du triplet tpr. (En d'autres termes la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble des points x tels que le triplet tsx soit d'orientation positive par "$p\mathcal{R}q$ si le triplet tpq est d'orientation positive" est une relation transitive.)* □

Raisonnons par l'absurde. Si l'orientation du triplet tpr est négative alors t est combinaison convexe de p, q et r (cf. Lemma 1), et par suite $0 = \det\begin{pmatrix} t & s & t \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ est combinaison convexe des termes positifs $\det\begin{pmatrix} t & s & p \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} t & s & q \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et $\det\begin{pmatrix} t & s & r \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, contradiction.

GRAHAM'S SCAN IN TEXTBOOKS

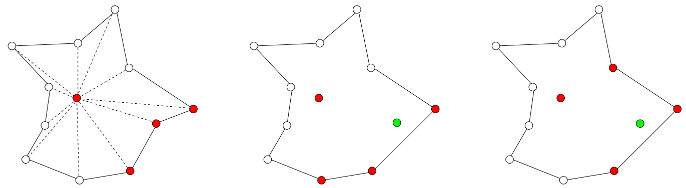


Algorithm GRAHAMHULL2D(P) where $P \subset \mathbb{R}^2$

1. Choose an extreme point p_1 of P, sort the points of P ccw around p_1, and store the points in a linear list $L = p_1 p_2 \ldots p_n p_1$
2. $(p, q, r) \leftarrow p_1 p_2 p_3$
3. **Repeat**
4. **if** pqr **then** $(p, q, r) \leftarrow (q, r, \mathrm{succ}(r))$
5. **else** delete q from L and $(p, q, r) \leftarrow (\mathrm{succ}^{-1}(p), p, r)$
6. **until** $r = p_1$
7. **return** the list L

✎ — CORRECTION & ANALYSE DE COMPLEXITÉ? ✎ — *Demo : foo -random 100*

GRAHAM'S SCAN BY GRAHAM

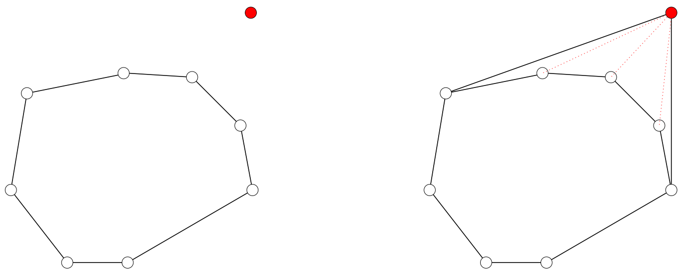


Algorithm GRAHAMHULL2D(P) where $P \subset \mathbb{R}^2$

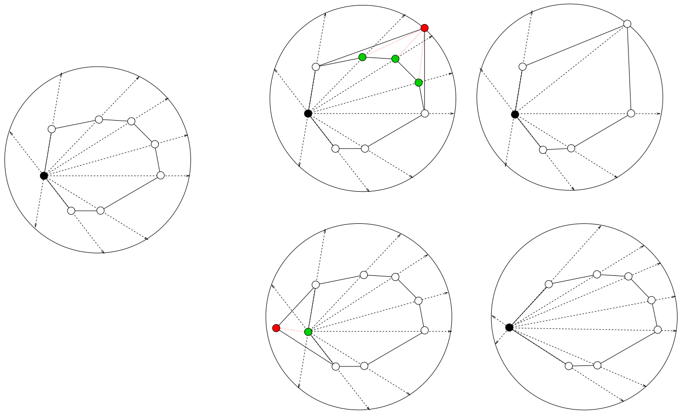
1. Choose a point p inside the convex hull of P, sort circularly the points of P ccw around p, and store the points in a circular list $L = \ldots \mathrm{succ}^{-1}(p) p \, \mathrm{succ}(p) \ldots$
2. $(p, q, r) \leftarrow$ three consecutive points of L
3. **Repeat**
4. **if** pqr **then** $(p, q, r) \leftarrow (q, r, \mathrm{succ}(r))$
5. **else** delete q from L and $(p, q, r) \leftarrow (\mathrm{succ}^{-1}(p), p, r)$
6. **until** TO BE FILLED
7. **return** the list L

✎ — CORRECTION & ANALYSE DE COMPLEXITÉ? ✎ — *Demo : foo -random 100*

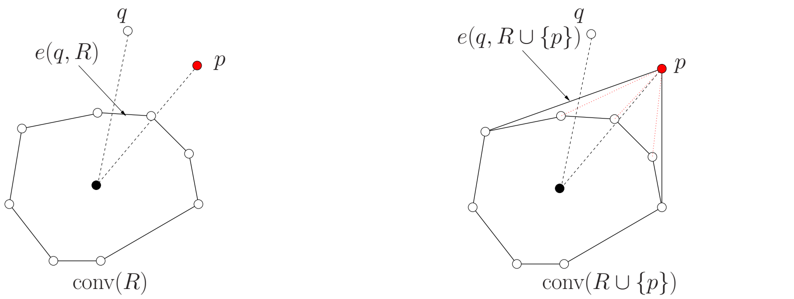
ALGORITHMES INCRÉMENTAUX



Knuth incremental algorithm



randomized incremental algorithm



1. Choisir une permutation aléatoire $p_1 p_2 p_3 \ldots p_n$ des n points de P et poser $R_k = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$
2. $\mathrm{conv}(R_3) \to \mathrm{conv}(R_4) \to \cdots \to \mathrm{conv}(R_n)$
3. Maintenir une arête visible de chaque point
4. Coût de l'insertion de p est le cardinal de l'ensemble des $q \in P$ tels que $e(q, R) \neq e(q, R \cup \{p\})$
5. Le coût moyen de l'algorithme est donc $\sum_{q \in P} \sum_{k=1}^{k=n} \mathrm{Prob}[e(q, R_{k-1}) \neq e(q, R_k)]$

rand. incr. alg. : backward analysis

Pour évaluer $\mathrm{Prob}[e(q, R_{k-1}) \neq e(q, R_k)]$ nous observons que

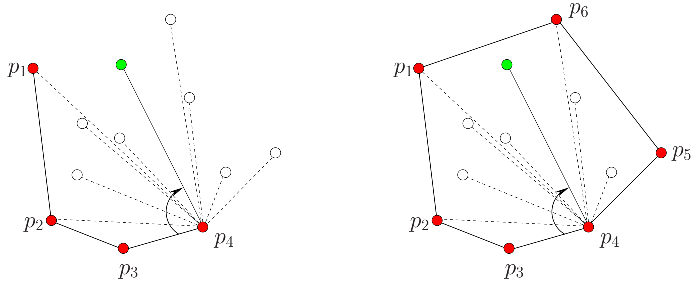
$$\mathrm{Prob}[e(q, R_{k-1}) \neq e(q, R_k) \mid R_k = R] \leq \frac{2}{k}.$$

Il suit que

$$\mathrm{Prob}[e(q, R_{k-1}) \neq e(q, R_k)] \leq \frac{2}{k}.$$

Il suit que le nombre moyen de changement de $e(q, R)$ est $\sum_{k=1}^{n} 2/k = O(\log n)$, et la complexité moyenne de l'algorithme est un $O(n \log n)$.

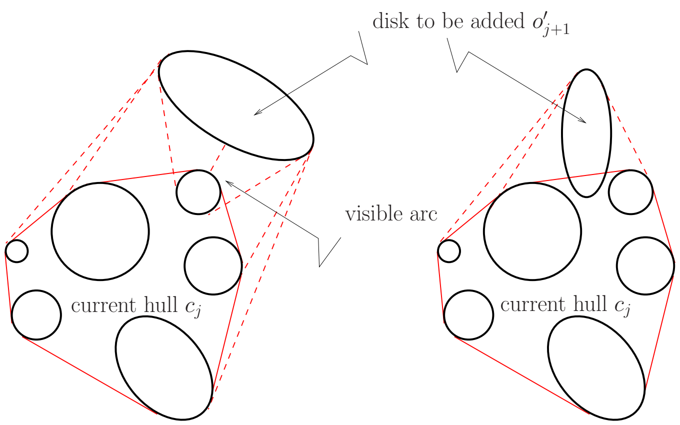
marche de Jarvis (Jarvis's march)



Algorithm JarvisHull2D(P) where $P \subset \mathbb{R}^2$

1. $p_0 \leftarrow (0, +\infty)$
2. $p_1 \leftarrow$ the leftmost point of P
3. **for** $k = 1, 2, \ldots$ **do**
4. $p_{k+1} \leftarrow$ the point q from P that maximizes $\angle p_{k-1} p_k q$
5. **if** $p_{k+1} = p_1$ **then return** the list $p_1, \ldots p_k$

UN PROBLÈME D'ENVELOPPE CONVEXE 2D



Soit à calculer l'enveloppe convexe d'une famille fini o_i de corps convexes disjoints deux-à-deux du plan affine standard en utilisant pour unique primitive géométrique l'évaluation du chirotope de la famille de corps convexes.

UNE IDÉE ET SA MISE EN ŒUVRE

Trouver un ordre linéaire des corps convexes tel que l'ensemble des points du bord de l'enveloppe convexe des j premiers corps visibles du $j+1$-ième soit connexe.

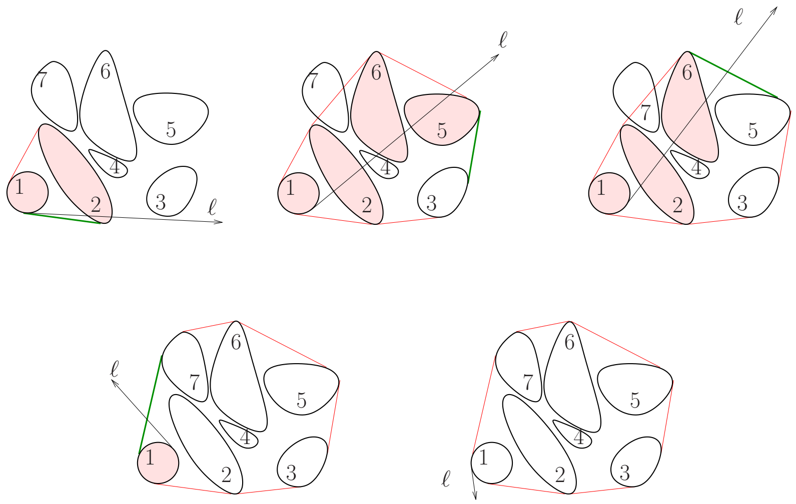
Le tri angulaire des corps autour d'un corps extremal c founit un tel ordre.

Demi-droite de balayage, ordre de balayage, événements $l_{\pm i}, l^{\pm i}$, événement mort.

Soit l la position courante de la demi-droite de balayage.

1. la liste $B(l) = v_1 v_2 \dots v_k$ ordonnée dans le sens positif des bitangentes du bord de l'env. convexe des corps atteints par la demi-droite de balayage l où v_1 est la bitangente gauche-gauche joignant les deux premiers corps; soit o'_j le corps contenant l'extrémité de v_j.
2. $v_*(l)$ la bitangente $v_{j'}$ où j' est le plus petit indice $1 \leq j \leq k$ tel que l^+ intersecte les corps convexes o'_i $(j \leq i \leq k)$ dans l'ordre $o'_k, o'_{k-1}, \dots, o'_j$; par construction la demi-droite l intersecte $v_*(l)$ ou l'arc suivant ou la bitangent suivante.
3. la liste $Q(l)$ des corps convexes $o'_k o'_{k-1} \dots o'_{j'}$;

ILLUSTRATION



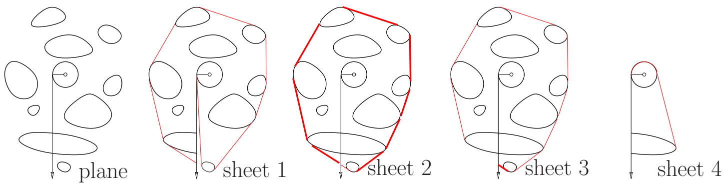
TRAITEMENT DES ÉVÉNEMENTS

Soit à traiter l'événement l' concernant le coprs convexe o successeur de l'événement l. On note r le corps convexe le plus à droite de $Q(l)$, r_* son prédecesseur sur le bord de l'env. convexe courante et r^* son successeur (s'il existe, i.e. $r \neq c$).

On localise o dans la liste $Q(l)$.

1. Supposons que o se situe à gauche de r entre α et α'. Alors o est inclus dans l'enveloppe convexe de α et α' ou les arcs aux extremités de $v_{\alpha'\alpha}$ sont visibles de o;
2. Supposons que o apparaît à droite de r. Alors o est inclus dans l'enveloppe convexe de r, r_* et r^* ou l'arc à l'extremité de $v_*(l)$ est visible de o.

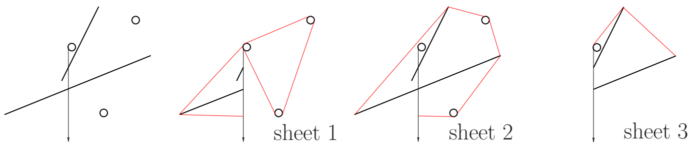
COMMENT TROUVER UN CORPS EXTRÉMAL?



1. Considérer un revêtement à 4 feuillets du plan privé d'un corps convexe;
2. Calculer (comment?) l'env. convexe des relevés des corps convexes situés entièrement dans les feuillets 1, 2 ou 3 ou à cheval sur les feuillets 1 et 2, 2 et 3 ou 3 et 4;
3. Extraire (comment?) de l'enveloppe convexe calculée dans le revêtement celle des corps convexes du plan.

[1] L. Habert et M. Pocchiola. – Computing the convex hull of disks using only their chirotope. In : Abstracts 10th European Workshop Comput. Geom., pp. 111–114. – 2004.

TROIS FEUILLETS NE SONT PAS SUFFISANTS



NOTES

NOTES

NOTES

NOTES

NOTES

NOTES