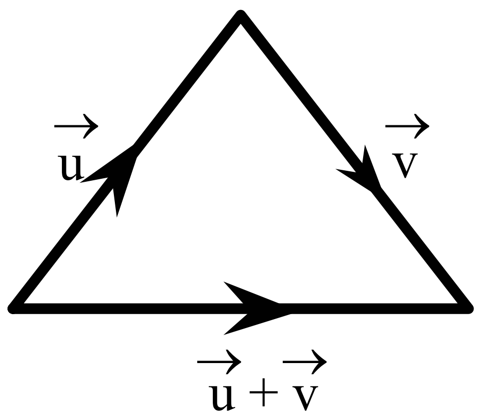
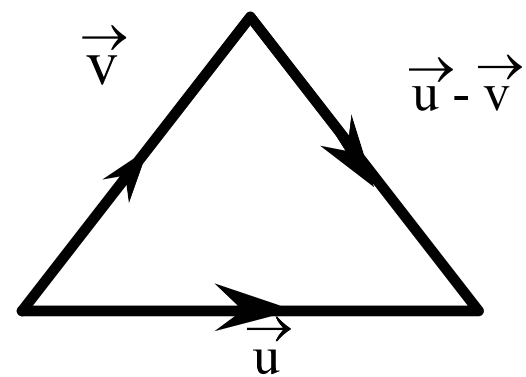
GEOMETRIE

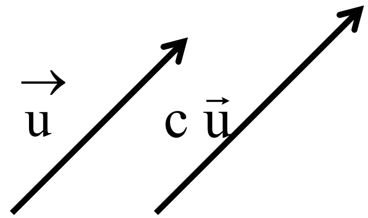
1. Espaces vectoriels et transformations linéaires

1.1. Définitions

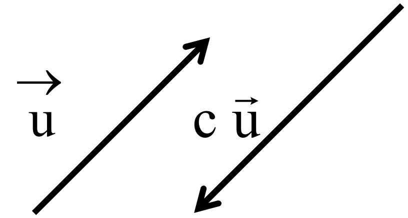
Un espace vectoriel est une collection d'objets, les **vecteurs**, pour lesquels les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication par un scalaire sont définies







$c > 0$



$c < 0$

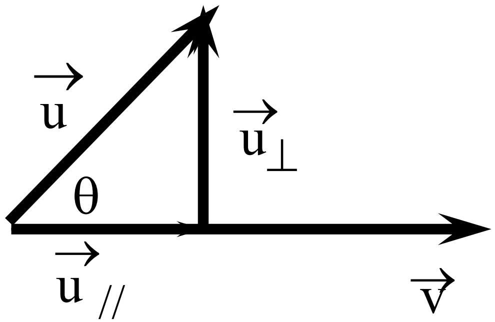
1.2. Transformations linéaires

Une transformation L est dite **linéaire** si

$$L(\vec{u} + \vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v})$$
$$L(c\vec{u}) = cL(\vec{u})$$

=> représentation par des matrices 3-3

1.3. Produit scalaire

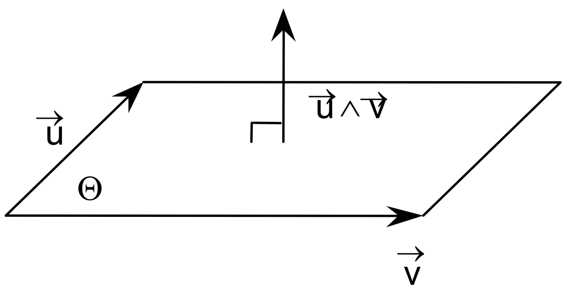


$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\| \cos\theta$$

$$\vec{u}_{//} = \frac{\left(\vec{u} \bullet \vec{u}\right) \quad \vec{v}}{\vec{v} \bullet \vec{v}}$$

$$\vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \frac{\left(\vec{u} \bullet \vec{u}\right) \quad \vec{v}}{\vec{v} \bullet \vec{v}}$$

1.5. Produit vectoriel



$$\left\| \vec{u} \wedge \vec{v} \right\| = \left\| \vec{u} \right\| \left\| \vec{v} \right\| \sin \theta$$

$$dir\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \text{ perpendiculaire au plan } \left(\vec{u}, \vec{v}\right)$$

$$signe\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\right) = 1$$

Propriétés :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$\vec{w} \wedge \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \bullet \vec{w}\right) \vec{v} - \left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right) \vec{w}$$

$$\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \wedge \vec{w} = \left(\vec{u} \bullet \vec{w}\right) \vec{v} - \left(\vec{v} \bullet \vec{w}\right) \vec{u}$$

2. Espaces affines

2.1. Points et vecteurs

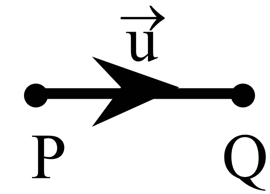
- un **point** a une position, ni direction, ni longueur
- un **vecteur** a une direction et une longueur, pas de position

Remarques :

- si une origine est spécifiée, un point peut-être représenté par un vecteur.
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \left\|\vec{u}\right\| = \left\|\vec{v}\right\| \ \ et \ \ dir\left(\vec{u}\right) = dir\left(\vec{v}\right)$$

2.2. Addition et soustraction



- $P + \vec{u}$ point
- $Q - P$ vecteur
- Si $\vec{u} = Q - P$, $Q = P + \vec{u}$, $P = Q - \vec{u}$

  $Q = P + (Q - P)$
- Remarque : $P + Q$ n'a pas de sens.

2.3. Multiplication scalaire

$$1 \cdot P = P$$
$$0 \cdot P = \vec{o}$$
$$c \cdot P \text{ indéfini si } c \neq 0 \text{ et } c \neq 1$$

Soient $P_0, \ldots, P_n$ des points, $c_0, \ldots, c_n$ des scalaires

$$\sum_{k=0}^{n} c_k P_k = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \right) P_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k \left(P_k - P_0 \right)$$

Le premier terme n'a de sens que si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = 0 \; ou \; 1$$

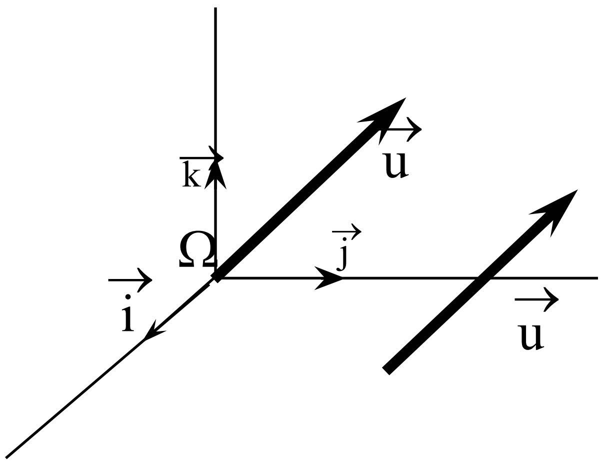
si $\sum_{k=0}^{n} c_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{n} c_k P_k = \sum_{k=1}^{n} c_k \left(P_k - P_0 \right)$ est un vecteur

si $\sum_{k=0}^{n} c_k = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} c_k P_k = P_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k \left(P_k - P_0 \right)$ est un point

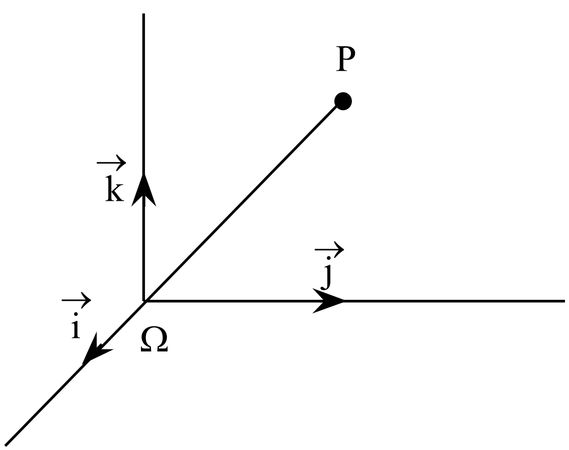
Exemples : milieu du segment PQ : $\dfrac{P+Q}{2}$

barycentre du triangle PQR : $\dfrac{P+Q+R}{3}$

2.4. Coordonnées cartésiennes



$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$
$$= \left(u_1, u_2, u_3\right)$$



$$P = \Omega + p_1\vec{i} + p_2\vec{j} + p_3\overline{k}$$
$$= \left(p_1, p_2, p_3\right)$$

Exemples d'applications :

$$P = (p_1, p_2, p_3)$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$\begin{aligned} P + \vec{u} &= \Omega + p_1\vec{i} + p_2\vec{j} + p_3\vec{k} + u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \\ &= \Omega + (p_1 + u_1)\vec{i} + (p_2 + u_2)\vec{j} + (p_3 + u_3)\vec{k} \\ &= (p_1 + u_1, p_2 + u_2, p_3 + u_3) \end{aligned}$$

$$\vec{i} \bullet \vec{i} = \vec{j} \bullet \vec{j} = \vec{k} \bullet \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \bullet \vec{j} = \vec{j} \bullet \vec{k} = \vec{k} \bullet \vec{i} = 0$$

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{o}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$
$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$
$$= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

3 - Transformations affines et coordonnées affines

définition : une transformation T est dite **affine** si :

- l'image par T d'un point est un point
- l'image par T d'un vecteur est un vecteur
- $T\left(\sum_k c_k P_k\right) = \sum_k c_k T(P_k)$ (si les expressions existent)

Remarque : comme Q=P+(Q-P), la connaissance de T pour les vecteurs et un point P suffit pour déterminer T pour tout point.

Corollaire :

Si T est affine, alors :

l'image d'une droite par T est une droite ou un point

Soit T une transformation affine

$$P = (p_1, p_2, p_3) = \Omega + p_1\vec{i} + p_2\vec{j} + p_3\vec{k}$$

$$T(P) = T(\Omega) + p_1 T(\vec{i}) + p_2 T(\vec{j}) + p_3 T(\vec{k})$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$

$$T(\vec{u}) = u_1 T(\vec{i}) + u_2 T(\vec{j}) + u_3 T(\vec{k})$$

Donc T est complètement déterminée par

$$T(\Omega), T(\vec{i}), T(\vec{j}), T(\vec{k})$$

$$T(P) = \begin{pmatrix} T(\vec{i}) & T(\vec{j}) & T(\vec{k}) & T(\Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} P & 1 \end{pmatrix}^t$$

$$T(\vec{u}) = \begin{pmatrix} T(\vec{i}) & T(\vec{j}) & T(\vec{k}) & T(\Omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \vec{u} & 0 \end{pmatrix}^t$$

Les notations $(P \quad 1)$ et $(\vec{u} \quad 0)$ sont appelées **coordonnées affines**.

Remarque : $\sum_k c_k (P_k, 1) = \left(\sum_k c_k P_k, 1 \right) \quad si \quad \sum_k c_k = 1$

$$\sum_k c_k (P_k, 1) = \left(\sum_k c_k P_k, 0 \right) \quad si \quad \sum_k c_k = 0$$

donc les coordonnées affines de $\sum_k c_k P_k$ gardent la trace du type de l'expression

Comme $T(\vec{i}), T(\vec{j})$ et $T(\vec{k})$ sont des vecteurs et $T(\Omega)$ un point, on peut écrire :

$$T = \begin{pmatrix} T(\vec{i}) & T(\vec{j}) & T(\vec{k}) & T(\Omega) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{i}) = t_{11}\vec{i} + t_{21}\vec{j} + t_{31}\vec{k}$$
$$T(\vec{j}) = t_{12}\vec{i} + t_{22}\vec{j} + t_{32}\vec{k}$$
$$T(\vec{k}) = t_{13}\vec{i} + t_{23}\vec{j} + t_{33}\vec{k}$$
$$T(\Omega) = \Omega + t_{14}\vec{i} + t_{24}\vec{j} + t_{34}\vec{k}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\quad T(P,1) = T \quad (P \quad 1)^t$

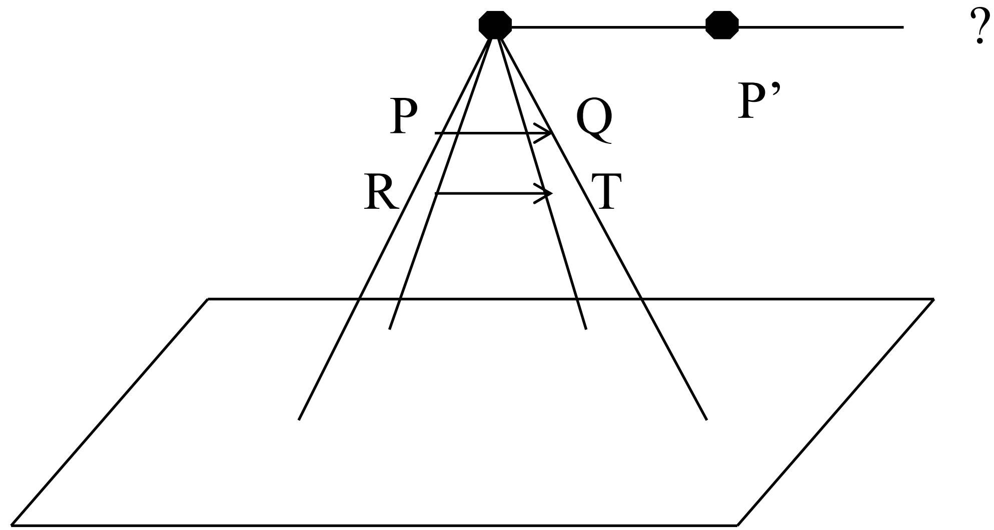
$$T(\vec{u},0) = T \quad (\vec{u} \quad 0)^t$$

Exemple : Translation de vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, 0)$

$$T(\vec{i}) = \vec{i}$$
$$T(\vec{j}) = \vec{j}$$
$$T(\vec{k}) = \vec{k}$$
$$T(\Omega) = \Omega + \vec{u}$$

donc $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque : une projection perspective n'est pas une transformation affine



$$A(Q) = A(P + \vec{v}) = A(P) + A(\vec{v})$$
$$A(T) = A(R + \vec{v}) = A(T) + A(\vec{v})$$

4. Changements de repère

4.1. Formule de changement de repère

Soient $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ et $\left(P,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ deux repères.

$$P = O + p_i\vec{i} + p_j\vec{j} + p_k\vec{k}$$

$$\vec{u} = u_i\vec{i} + u_j\vec{j} + u_k\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_i\vec{i} + v_j\vec{j} + v_k\vec{k}$$

$$\vec{w} = w_i\vec{i} + w_j\vec{j} + w_k\vec{k}$$

Soit M un point quelconque.

Dans $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$,

$$M = O + m_i\vec{i} + m_j\vec{j} + m_k\vec{k}$$

Dans $\left(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$

$$M = P + m_u \vec{u} + m_v \vec{v} + m_w \vec{w}$$

Cherchons la relation qui lie $\left(m_i, m_j, m_k\right)$ et $\left(m_u, m_v, m_w\right)$:

$$\begin{aligned}
M &= P + m_u \vec{u} + m_v \vec{v} + m_w \vec{w} \\
&= \left(O + p_i \vec{i} + p_j \vec{j} + p_k \vec{k}\right) + m_u \left(u_i \vec{i} + u_j \vec{j} + u_k \vec{k}\right) \\
&\quad + m_v \left(v_i \vec{i} + v_j \vec{j} + v_k \vec{k}\right) + m_w \left(w_i \vec{i} + w_j \vec{j} + w_k \vec{k}\right) \\
&= P + \left(p_i + m_u u_i + m_v v_i + m_w w_i\right)\vec{i} + \left(p_j + m_u u_j + m_v v_j + m_w w_j\right)\vec{j} \\
&\quad + \left(p_k + m_u u_k + m_v v_k + m_w w_k\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{pmatrix} m_i \\ m_j \\ m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_i & v_i & w_i \\ u_j & v_j & w_j \\ u_k & v_k & w_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_u \\ m_v \\ m_w \end{pmatrix}$$

Avec des matrices 4-4, on a :

$$\begin{pmatrix} m_i \\ m_j \\ m_k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i & v_i & w_i & p_i \\ u_j & v_j & w_j & p_j \\ u_k & v_k & w_k & p_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_u \\ m_v \\ m_w \\ 1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} m_u \\ m_v \\ m_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

d 'où

$$\begin{pmatrix} m_u \\ m_v \\ m_w \\ 1 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} m_i \\ m_j \\ m_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.2. Usage des changements de repère

Soit T une transformation géométrique qui s 'exprime facilement dans le repère $\left(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$

$$M = (m_u, m_v, m_w) \text{ dans le } \quad \text{repère } (P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \Rightarrow$$

$$M' = (m'_u, m'_v, m'_w) \text{ dans le } \quad \text{repère } (P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ avec}$$

$$\begin{pmatrix} m'_u \\ m'_v \\ m'_w \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} m_u \\ m_v \\ m_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

On effectue les calculs dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$M = (m_i, m_j, m_k)$$

Quelles sont les coordonnées de $M' = T(M)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$?

on exprime M dans $\left(P,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$

$$\begin{pmatrix} m_u \\ m_v \\ m_w \\ 1 \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} m_i \\ m_j \\ m_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

on calcule M ' dans le même repère

$$\begin{pmatrix} m_u^{'} \\ m_v^{'} \\ m_w^{'} \\ 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} m_i \\ m_j \\ m_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

on exprime M dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

$$\begin{pmatrix} m_i^{'} \\ m_j^{'} \\ m_k^{'} \\ 1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} m_u^{'} \\ m_v^{'} \\ m_w^{'} \\ 1 \end{pmatrix}$$

d 'où

$$\begin{pmatrix} m_i^{'} \\ m_j^{'} \\ m_k^{'} \\ 1 \end{pmatrix} = C\ T\ C^{-1} \begin{pmatrix} m_i \\ m_j \\ m_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Espaces projectifs et transformations projectives

5.1. Points affines et points à l'infini

Il existe deux types de points dans un espace projectif :

- un **point à l'infini** est représenté par un vecteur sans longueur, soit $\left[\vec{v},0\right]=\left[c\vec{v},0\right] \quad si \quad c \neq 0$
- un **point affine** vérifie $\left[P,1\right]=\left[cP,c\right] \quad si \quad c \neq 0$

$\Rightarrow$ notion de **coordonnées homogènes**

toute paire $\left[X,\omega\right] \neq \left[0,0\right]$ a un sens. ω est appelée coordonnée homogène

5.2. transformations projectives

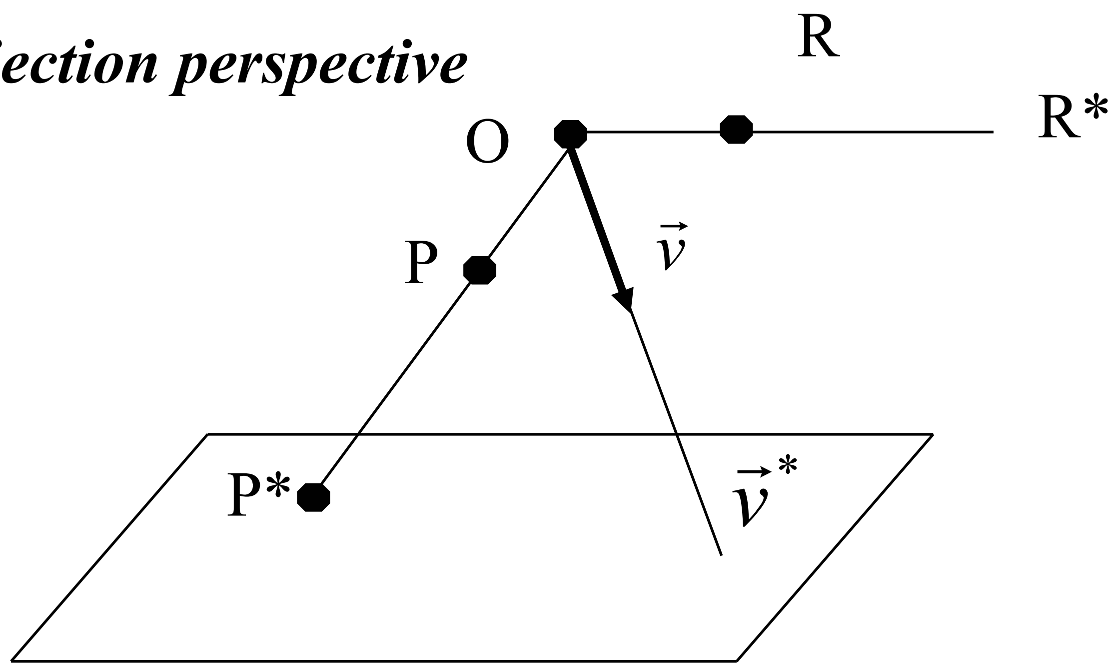
T est une transformation projective si

$$T\left[c\vec{v},0\right]=c'\,T\left[\vec{v},0\right]\text{avec c et c'}\neq 0$$

$$\mathrm{T}\left[\mathrm{cP},1\right]=\mathrm{c'}\,\mathrm{T}\left[\mathrm{P},1\right]\text{avec c et c'}\neq 0$$

donc toute matrice 4-4 représente une transformation projective (on peut remarquer que les transformations affines sont un cas particulier)

5.3. Projection perspective



un plan S dans un espace projectif a pour équation :

$$Ax + By + Cz + D\omega = 0$$

soit $M \bullet X = 0$ avec $M = [A, B, C, D]$

$$\mathrm{X} = [\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \omega]$$

Remarque : M.X=0 => M.cX=cM.X=0, donc M et cM représentent le même plan projectif

Pour tout point projectif X, l'intersection X* de la droite OX avec le plan S est donnée par :

$$X^* = \left[\left(X \bullet M\right)E - \left(E \bullet M\right)X\right]$$

en effet

$$\begin{aligned} M \bullet X^* &= M\left[\left(X \bullet M\right)E - \left(E \bullet M\right)X\right] \\ &= \left(X \bullet M\right)\left(M \bullet E\right) - \left(E \bullet M\right)\left(M \bullet X\right) = 0 \end{aligned}$$

donc $X^* \in S$

si $M'\bullet E=0$ et $M'\bullet X=0$ (1), alors $M'\bullet X^*=0$:

$$M'\bullet X^*=\left(X\bullet M\right)\left(M'\bullet E\right)-\left(E\bullet M\right)\left(M'\bullet X\right)=0$$

or (1) $\Leftrightarrow$ M' plan passant par E et X, donc contient EX

X* n'est pas défini si X=E : X*=[0,0,0,0] n'est pas un point projectif

Remarques :

- l'image d'un point à l'infini est un point affine

$$\vec{v}^*=\left[\left(\vec{v}\bullet M\right)E-\left(E\bullet M\right)\vec{v}\right]$$

mais si $\vec{v}\in S, \vec{v}\bullet M=0\Rightarrow$

$\vec{v}^*=-\left(E\bullet M\right)\vec{v}$ est un point à l'infini

• l'image d'un point affine est un point affine

$$P^* = \left[\left(P \bullet M\right)E - \left(E \bullet M\right)P\right]$$

mais si

$P \in$ plan // à S passant par E

$P \bullet M = E \bullet M$, donc $P^* = \left(E \bullet M\right)\left(E - P\right)$ est le point à l'infini dans la direction E - P

La matrice de projection est donnée par :

$$Persp = E^t * M - (E \bullet M)I$$

6. Visualisation 2D

Consiste, à partir d'une vue 2D (provenant par exemple, d'une application) définie dans le repère du monde, à obtenir une vue dans les coordonnées normalisées de l'écran.

La vue dans le monde sera appelée clôture et celle dans l'écran fenêtre .

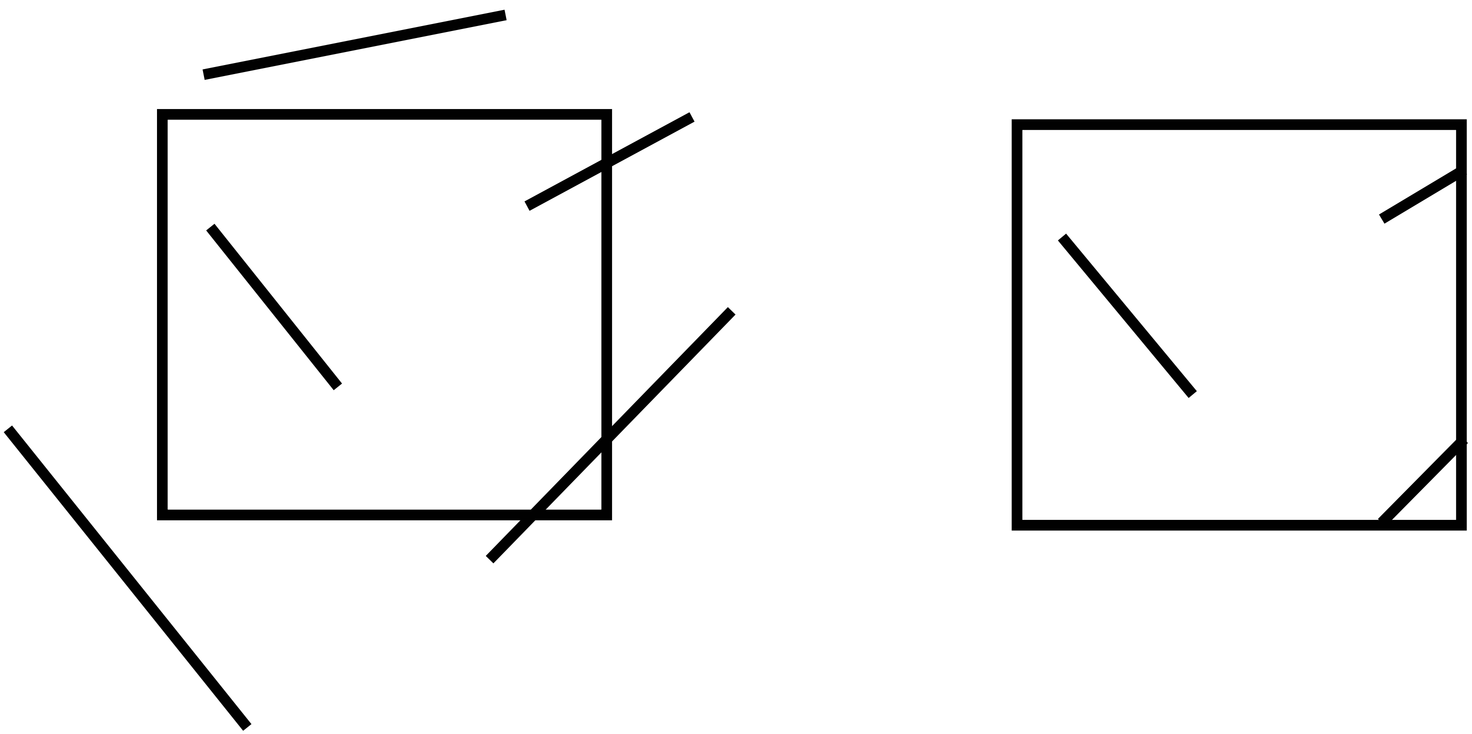
=> 2 opérations : la coupe et la transformation clôture - fenêtre .

6.1. Coupe (clipping)

on veut couper une image 2D contre une fenêtre [x_min .. x_max, y_min .. y_max]

cas des points : évident

cas des lignes :



- **Méthode brutale**
- **Algorithme de Cohen - Sutherland**

On code chaque extrémité M d’un segment par un mot c(M) sur 4 bits :

bit 0 = 1 <=> M au dessus de la fenêtre

bit 1 = 1 <=> M au dessous de la fenêtre

bit 2 = 1 <=> M à droite de la fenêtre

bit 3 = 1 <=> M à gauche de la fenêtre.

Remarque : En fait,

bit 0 = signe de $(y\_max - y_M)$

bit 1 = signe de $(y_M - y\_min)$

bit 2 = signe de $(x\_max - x_M)$

bit 3 = signe de $(x_M - x\_min)$

Proposition : M est intérieur à la fenêtre <=> $C(M) = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$

Corollaire : Un segment M_0M_1 est accepté <=>

$C(M_0) = C(M_1) = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$

$C(M_0)$ AND $C(M_1) \neq (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$ => le segment M_0M_1 est rejeté

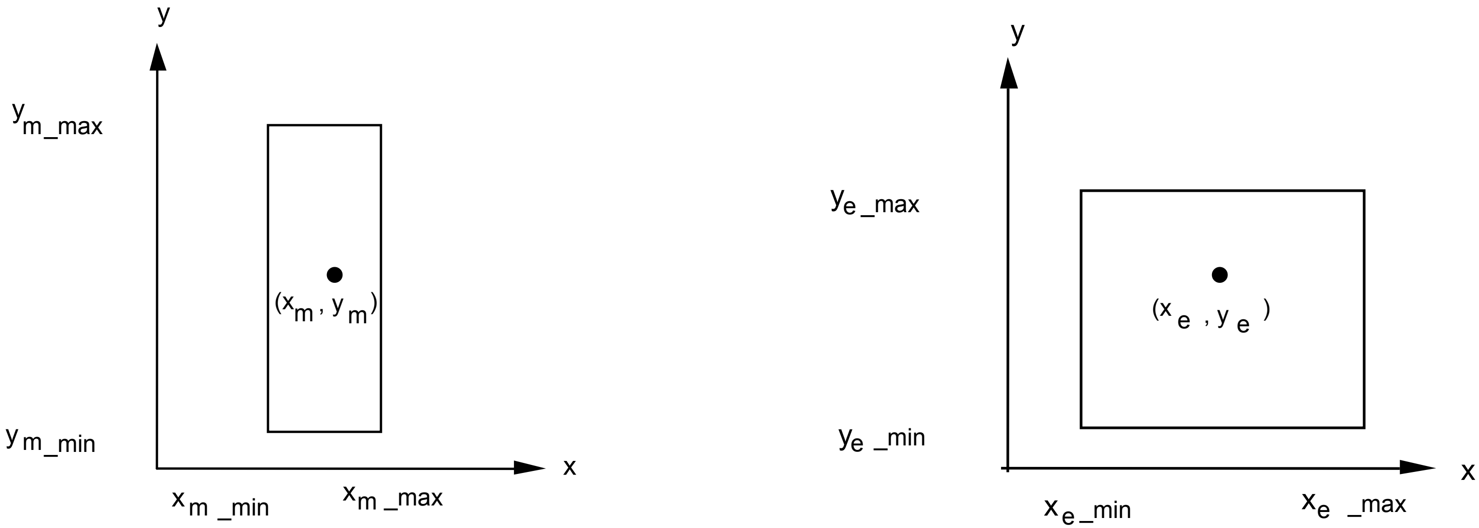
Dans les autres cas, il faut poursuivre la procédure :

- soit en cherchant l'intersection du segment avec les côtés de la fenêtre, en rejetant ce qui ne convient pas et en re-testant ;

- soit par dichotomie.

6.2. Transformation clôture - fenêtre

On veut appliquer le contenu d'une clôture sur une fenêtre de l'écran de telle sorte que l'on conserve les proportions :



$$\frac{x_m - x_{m\_\min}}{x_{m\_\max} - x_{m\_\min}} = \frac{x_e - x_{e\_\min}}{x_{e\_\max} - x_{e\_\min}}$$

donc

$$\mathrm{x_e} = s_x\left(x_m - x_{m\_\min}\right) + x_{e\_\min}$$

7. Visualisation 3D

écran 2D => il faut une projection 3D $\rightarrow$2D en plus de ce que l'on a vu pour la visualisation 2D.

Remarque : L'écran est plat => projections planes,

mais il en existe d'autres (cf. cartographie)

2 classes de projections :

- ☛ projections perspectives : le centre de projection est à distance finie du plan de projection

- ☛ projections parallèles

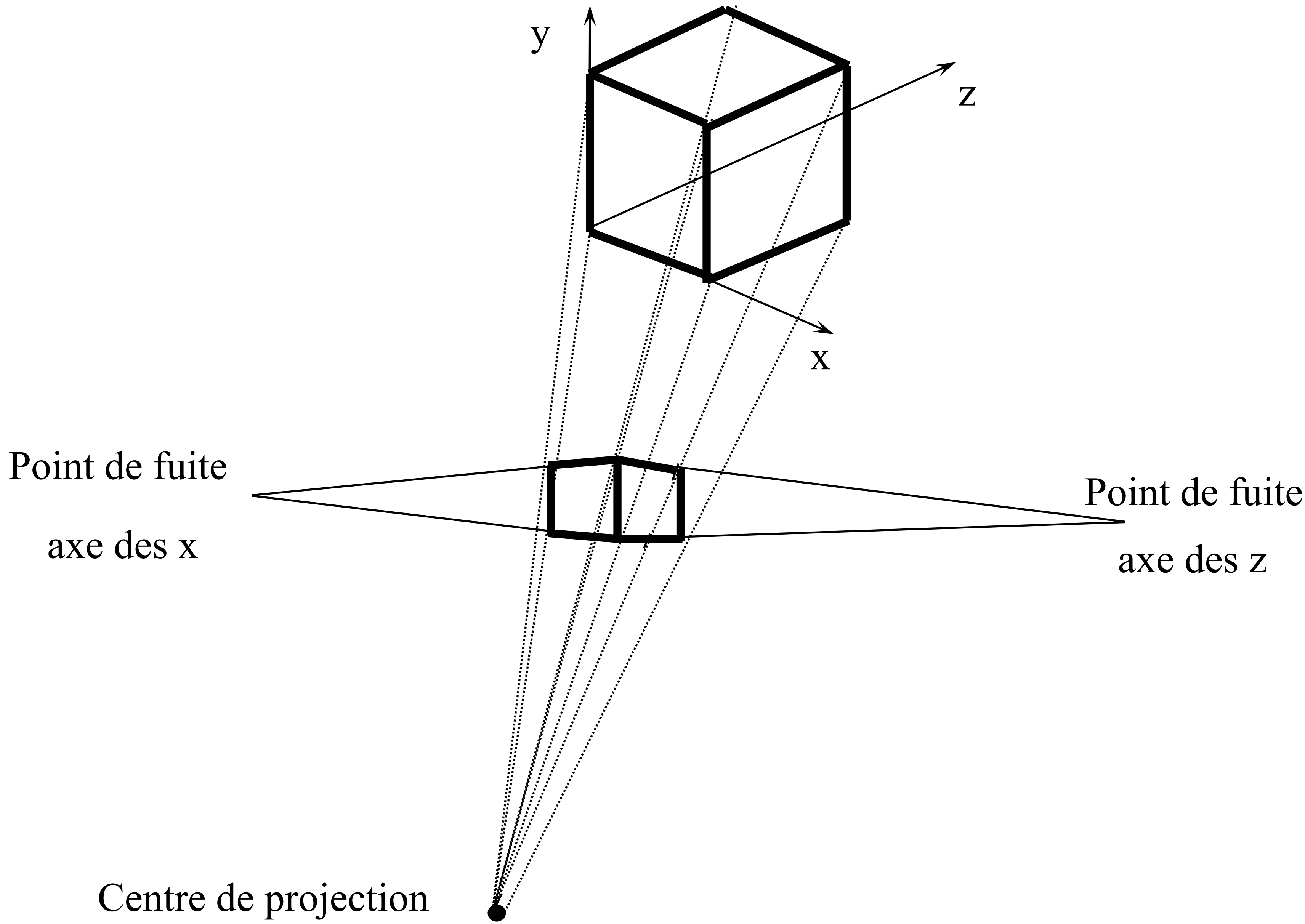
7.1 - Projections perspectives

Tout ensemble de droites en 3D qui ne sont pas parallèles au plan de projection convergeront en un point de fuite.

Si l'ensemble des lignes est parallèle à un des axes du repère

=> point de fuite principal

=> distinction suivant nombre de points de fuite principaux.


y
z
x
Point de fuite
axe des x
Point de fuite
axe des z
Centre de projection

Calls de projection

On suppose le plan de projection normal à l'axe des z en z = d avec le centre de projection à l'origine.

triangles semblables $\Rightarrow$

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z}$$

$$\frac{y_p}{d} = \frac{y}{z} \quad \text{, donc}$$

$$x_p = \frac{x}{z/d}, \quad y_p = \frac{y}{z/d}, \quad \text{donc}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X/W \\ Y/W \\ Z/W \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ d \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : En général, on définit une pyramide de vision coupée par un plan près et un plan loin.