

Le tracé de rayons

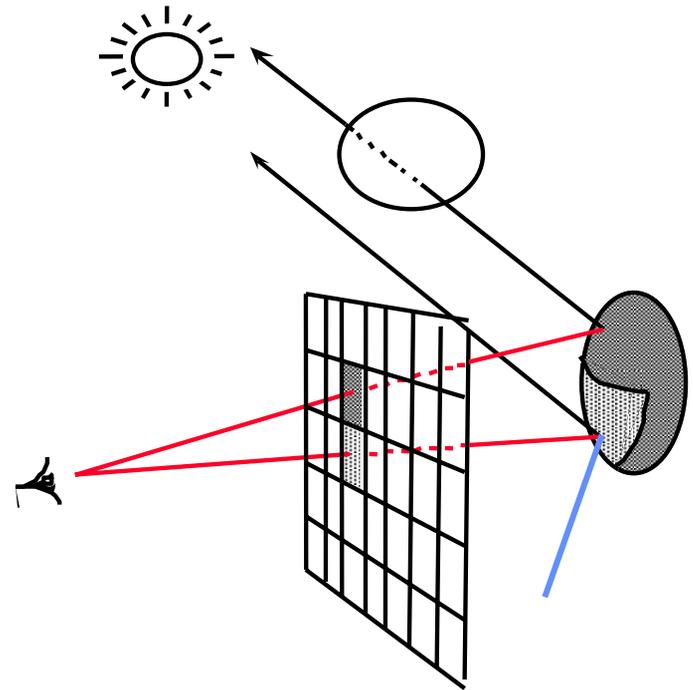
1 - Généralités

1.1 - Principe de l'algorithme :

simulation des lois de l'optique

=> rayons primaires

rayons secondaires



```

fonction calcul_couleur (rayon) → couleur
{ couleur_locale ← couleur_ambiante ;
  pour chaque objet faire
    {calculer_intersection (rayon, objet) ;
     garder_objet_le_plus_proche ;
    }
  si un objet a été gardé alors calculer_couleur_locale ;
  si réflexion alors couleur_r ← calcul_couleur(rayon_réfléchi) ;
  si transmission alors couleur_t ← calcul_couleur(rayon_transmis) ;
  retourner (couleur_locale+couleur_r+couleur_t) ;
}

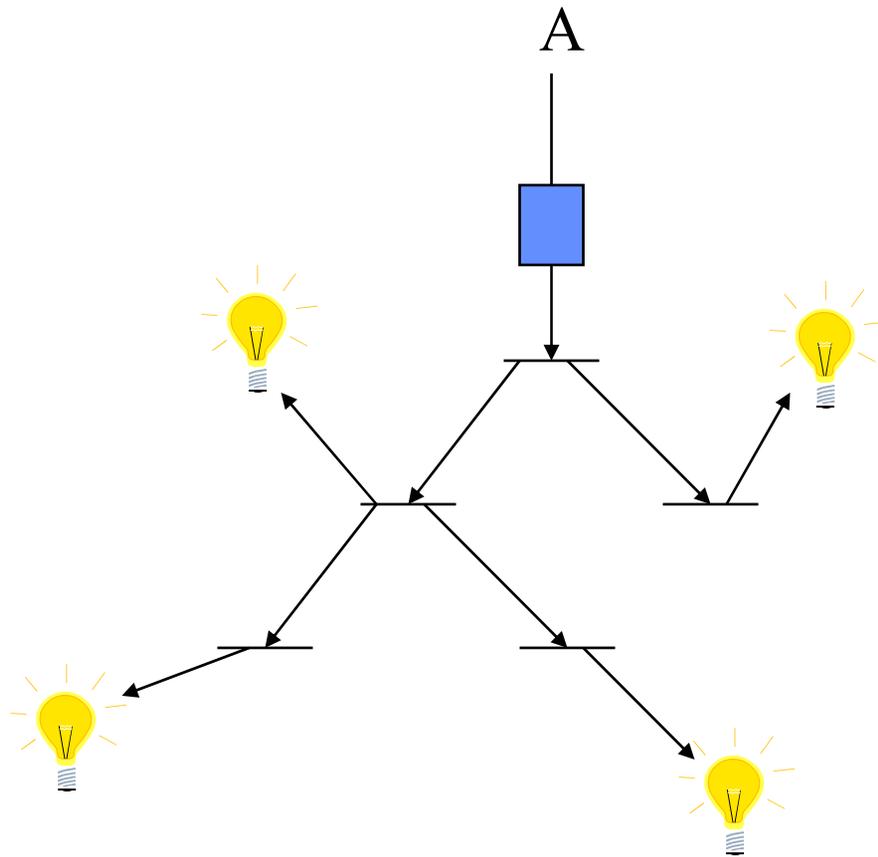
```

programme principal

```

{ pour chaque pixel de l'écran faire
  {calculer_rayon (œil, pixel) ;
   afficher (calcul_couleur (rayon)) ;
  }
}

```



=> évaluation d'un arbre des rayons

1.2 - Modèle d'éclairage : modèle de Whitted

$$I = I_a + k_d \sum_i \vec{N} \bullet \vec{L}_i + k_s \sum_i \left(\vec{N} \bullet \vec{H}_i \right)^n$$

1.3 - Cas des arbres de construction (CSG)

Intersection (R : rayon, A : arbre) → liste

{

si A est une primitive, retourner $L = R \cap A$

sinon /* A = G % D */

{

LG ← intersection (R,G) ;

LD ← intersection (R,D) ;

retourner (LG % LD) ;

}

}

1.4 - Problèmes d'aliassage

échantillonnage insuffisant

=> sur-échantillonnage adaptatif et filtrage

- ☐ par détection d'arête
- ☐ en utilisant un seuil de contraste
- ☐ en utilisant la structuration de la scène

1.5 - Ombres portées

- ☐ rayons d'ombrage ... si sources lumineuses ponctuelles
- ☐ méthodes des cônes
- ☐ méthode stochastique

1.6 - Temps de calcul

p = nombre de pixels

n = nombre d'objets

n_a = nombre de pixels nécessitant un calcul d'éclairage

nombre de calculs d'intersection :

□ si la scène est ombrée : $n(p+n_a)$ calculs d'intersection

□ si les objets sont réfléchissants et si le niveau de profondeur des réflexions est k : $n(p+(k+1)n_a)$ calculs d'intersections

exemple:

$$p = 10^6, n = 10^3, n_a = 4 \times 10^5, k = 2$$

$$10^3 (10^6 + 12 \times 10^5) = \mathbf{2,2 \times 10^9 \text{ calculs}}$$

2 - Calculs d 'intersection

2.1 - Principe du calcul dans un repère local

rayon $R(t) = P_0 + t D$ où P_0 : origine du rayon

$D = (dx, dy, dz)$: vecteur directeur du rayon

$t \geq 0$

scène décrite dans repère du monde R_M , chaque primitive décrite dans son repère local $R_L \Rightarrow$ 2 matrices de transformation connues

M : matrice de passage de R_M à R_L

M^{-1} : matrice de passage de R_L à R_M

procédure :

1 - calcul de l 'équation du rayon dans R_L : $R'(t) = M \bullet R(t)$

2 - calcul de l 'intersection rayon-objet dans R_L

3 - calcul de la normale dans R_L

4 - calcul de la normale dans R_M par changement de repère

2.2 - Cube unitaire

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$t_1 = (1 - x_0) / dx$$

$$t_2 = -x_0 / dx$$

$$[I_x, M_x] = [\min(t_1, t_2), \max(t_1, t_2)]$$

$$[I, M] = [\max(I_x, I_y, I_z), \min(M_x, M_y, M_z)]$$

si $I \geq M$ il y a intersection

sinon l'intersection n'existe pas

2.3 - Sphère unitaire

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

substitution de $R(t) \Rightarrow$

$$t^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2t(x_0 dx + y_0 dy + z_0 dz) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

2.4 - Cylindre unitaire

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1) \\ 0 \leq z \leq 1 & (2) \end{cases}$$

substitution de $R(t)$ dans (1) \Rightarrow

$$t^2(dx^2 + dy^2) + 2t(x_0 dx + y_0 dy) + x_0^2 + y_0^2 - 1$$

\Rightarrow intervalle $[t_1, t_2]$

substitution de $R(t)$ dans (2) \Rightarrow

$$B = \frac{(1 - z_0)}{dx}$$

$$A = \frac{-z_0}{dx}$$

$$t_3 = \min(A, B)$$

$$t_4 = \max(A, B)$$

$$[I, M] = [\max(t_1, t_3), \min(t_2, t_4)]$$

2.5 - Cône unitaire

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

2.6 - Polygone : 2 étapes

- ☐ intersection entre le rayon et le plan du polygone
- ☐ test pour savoir si le point trouvé est intérieur au polygone

méthode de Snyder et Badouel pour un triangle P_0, P_1, P_2

1ère étape :

$$\text{normale : } \vec{N} = \overrightarrow{P_0P_1} \wedge \overrightarrow{P_0P_2}$$

équation du plan du triangle :

$$P \bullet \vec{N} + d = 0, \text{ avec } d = -P_0 \bullet \vec{N} \quad (1)$$

$$\text{équation du rayon : } R(t) = O + \vec{D}t \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow t = (d - \vec{N} \bullet O) / \vec{N} \bullet \vec{D}$$

si $\vec{N} \bullet \vec{D} = 0$, pas d'intersection

si $t \leq 0$, intersection rejetée

2ème étape :

$$P \in \text{triangle si } P_0P = \alpha P_0P_1 + \beta P_0P_2 \quad (3)$$

$$\text{avec } \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq 1$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_P - x_0 = \alpha (x_1 - x_0) + \beta (x_2 - x_0) \\ y_P - y_0 = \alpha (y_1 - y_0) + \beta (y_2 - y_0) \\ z_P - z_0 = \alpha (z_1 - z_0) + \beta (z_2 - z_0) \end{cases}$$

pour réduire ce système à 2 équations à 2 inconnues, on projette ce triangle suivant un des axes, celui de plus grande projection

\Rightarrow choix de i_0

$i_0 = 0$ si $|N_x|$ maximum

$i_0 = 1$ si $|N_y|$ maximum

$i_0 = 2$ si $|N_z|$ maximum

soient $i_1 \neq i_2 \in \{0,1,2\} - i_0$

posons

$$u_0 = P_{i_1} - P_{0i_1}, u_1 = P_{1i_1} - P_{0i_1}, u_2 = P_{2i_1} - P_{0i_1}$$

$$v_0 = P_{i_2} - P_{0i_2}, v_1 = P_{1i_2} - P_{0i_2}, v_2 = P_{2i_2} - P_{0i_2}$$

(3) devient :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha u_1 + \beta u_2 \\ v_0 = \alpha v_1 + \beta v_2 \end{cases}$$

d' où

$$\alpha = \frac{\det \begin{pmatrix} u_0 & u_2 \\ v_0 & v_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}} \quad \beta = \frac{\det \begin{pmatrix} u_1 & u_0 \\ v_1 & v_0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}}$$

2.7 - Tore

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + 1 - r^2\right)^2 - 4\left(x^2 + y^2\right) = 0$$

substitution de R(t) => équation 4ème degré

2.8 - Surface algébrique

$$\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{ijk} x^i y^j z^k$$

substitution => équation de degré l+m+n

résolution par Newton, Laguerre ou Bairstow

MAIS le choix de la valeur initiale est important (par exemple, méthode des intervalles)

2.9 - Surfaces bicubiques

$$Q(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i(u) B_j(v) P_{ij}$$

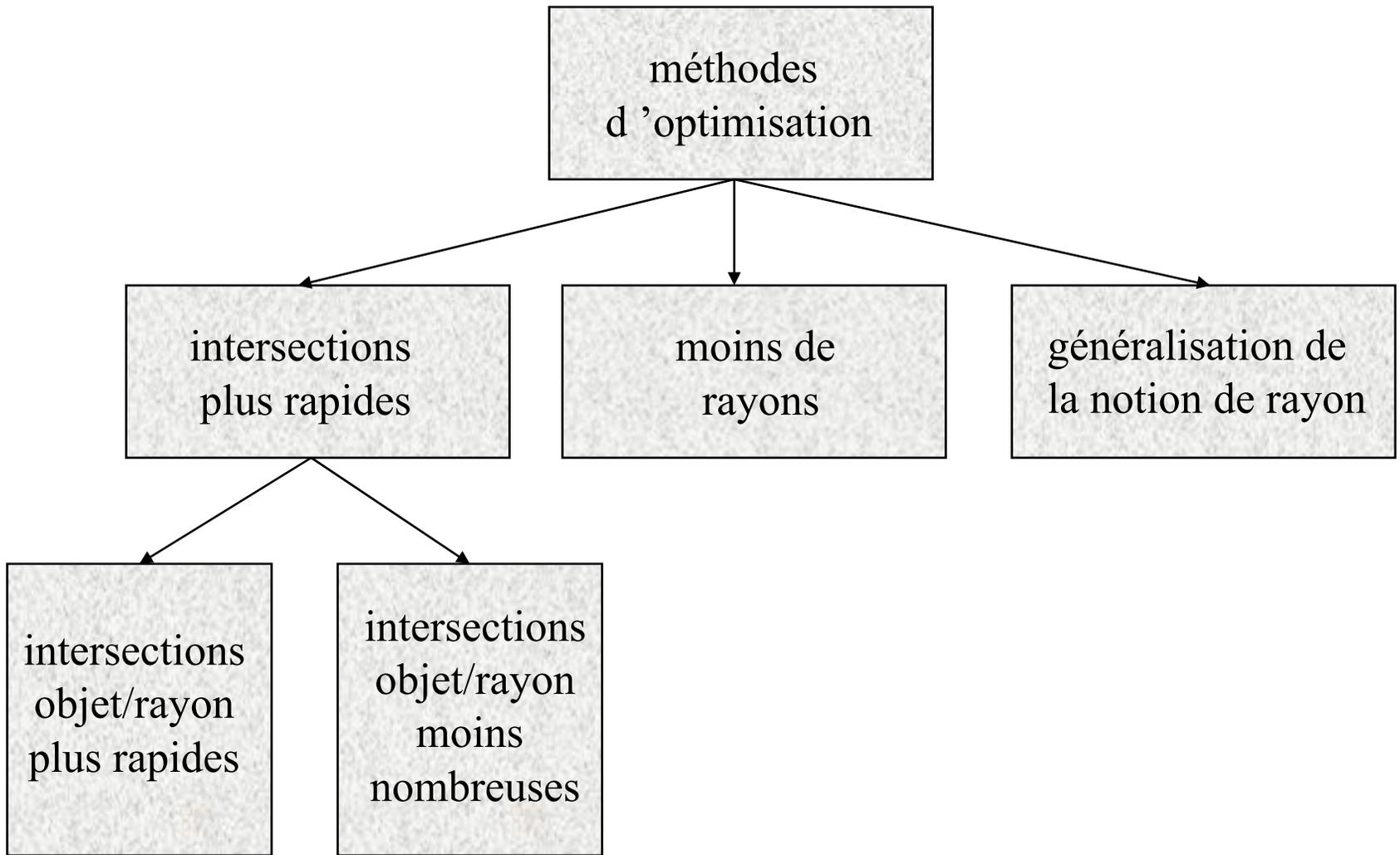
où P_{ij} : points de contrôle de la surface
 $B_i(u)$, $B_j(v)$: fonctions de mélange

- ☐ décomposition en polygones plans
- ☐ subdivision récursive en sous-carreaux
- ☐ méthodes numériques : utilisation de résultants

3 - OPTIMISATIONS

On peut chercher à diminuer :

- ☐ le temps de calcul
- ☐ le nombre de pixels à étudier
- ☐ le nombre d'intersections à tester

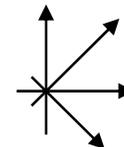
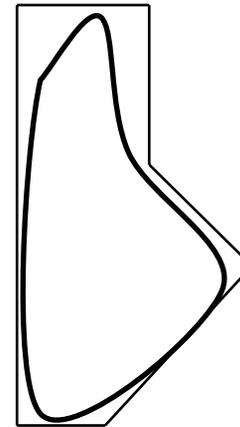
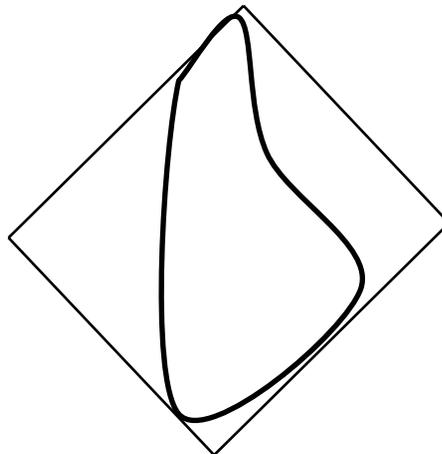
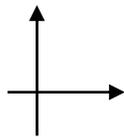
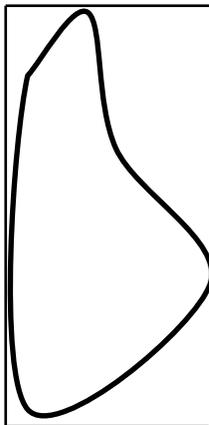


3.1 - Utilisation de boîtes englobantes

=> structuration des données

3.1.1 Dans l'espace

- ☐ parallélépipèdes
- ☐ sphères ou ellipsoïdes
- ☐ polyèdres



 tranches d'espace

avantages :

s'applique à tous les types de rayons

inconvénients :

choix du type d'englobant (surtout pour les arbres de construction)

3.1.2 En projection sur l'écran

avantages :

simplicité

inconvénients :

rayons secondaires englobants imprécis

3.2 - Recherche d'une partition

=> algorithmes de suivi de rayon

3.2.1 de \mathbb{R}^3

- ☐ par des cubes
- ☐ par des arbres octaux
- ☐ par des tranches d'espace
- ☐ par des arbres de partition binaire

3.2.2 de \mathbb{R}^2

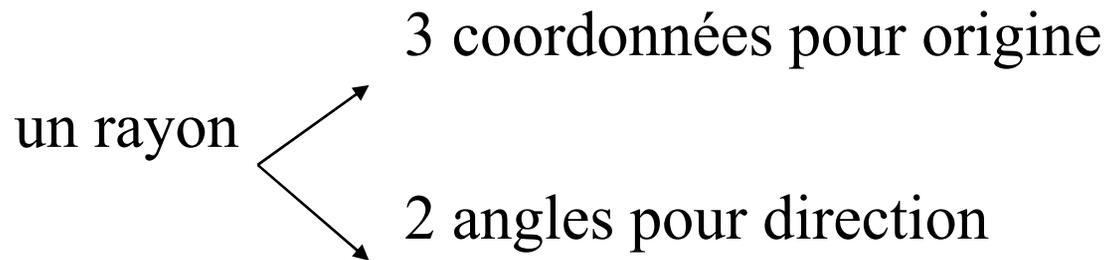
- ☐ par une grille
- ☐ par un arbre quaternaire

3.2.3 Méthodes directionnelles

☐ cube directionnel

☐ tampon de lumière

☐ partition de \mathbb{R}^5



3.2.4 Cas particuliers

☐ B-splines

☐ champs de vecteurs ☐

3.3 Diminution du nombre de rayons lancés

 exploitation de la cohérence

-  des objets
-  de l 'image
-  des rayons
-  des données

 méthodes statistiques

-  échantillonnage de l 'écran

3.4 Généralisation de la notion de rayon

☐ lancer de cônes

uniquement plans et sphères

☐ lancer de faisceaux

uniquement facettes polygonales

☐ tracé de crayons

☐ lancer de rayons discret