

Courbes et surfaces

1. Courbes

Problèmes : étant donnés n points (de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3), trouver une courbe passant

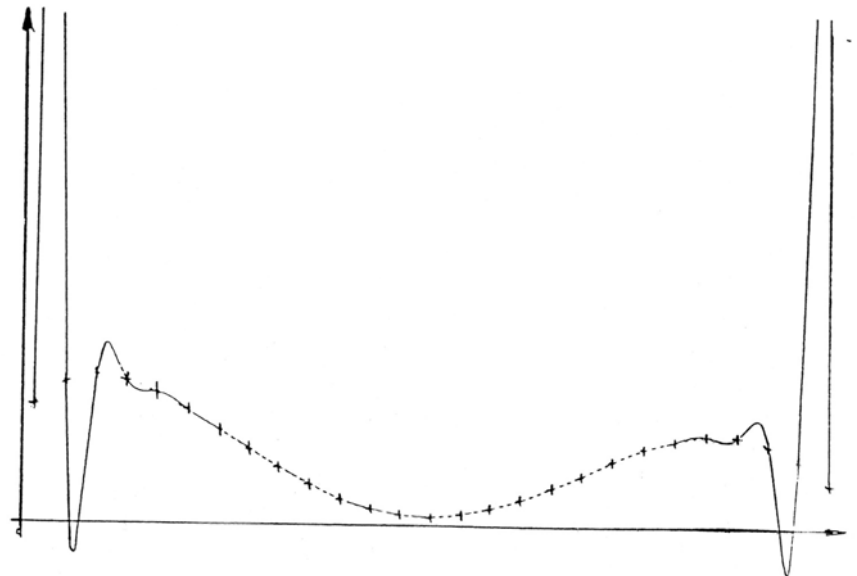
- par les points \Rightarrow **interpolation**
- « près des points » \Rightarrow **lissage** ou **approximation**

1.1. Interpolation

Problème P1 : étant donnés $(n+1)$ points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, trouver un polynôme de degré n $P_n(x) = \sum a_i x^i$ tel que $\forall i, P_n(x_i) = y_i$

Ce problème admet une solution unique (en utilisant la base canonique par exemple), mais cette solution donne lieu à des problèmes d'oscillation :

Figure 1 :



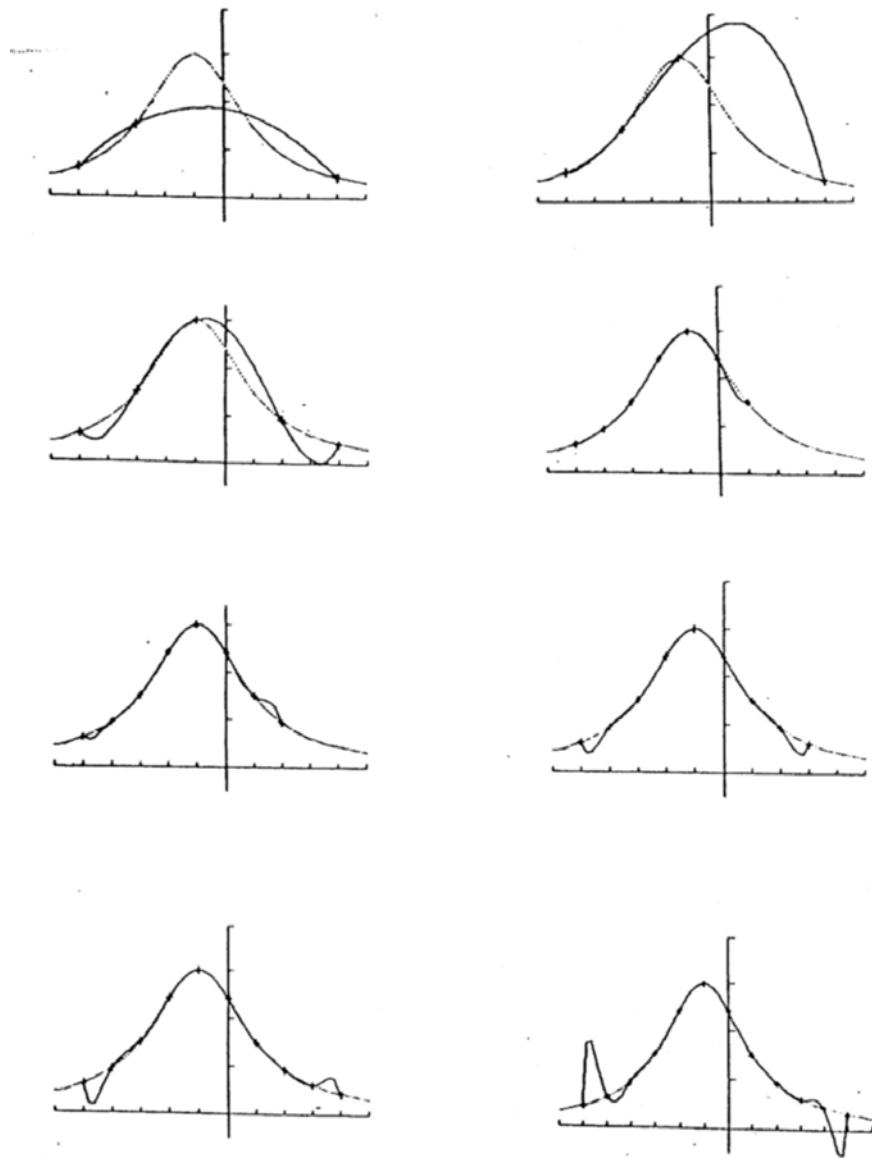


Figure 2 (d 'après R. DONY, MASSON)

Pour éviter les oscillations, on va essayer de résoudre un autre problème :

Problème P2 : étant donnés $(n+1)$ points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, trouver une fonction s qui minimise

$$I(s) = \int_a^b [s^{(q)}(x)]^2 dx \quad \text{où}$$

$s^{(q)}$ est la dérivée $q^{\text{ième}}$ de s

$$a < x_0$$

$$x_n < b$$

et telle que $\forall i, s(x_i) = y_i$

Ceci conduit à la notion de **fonction spline** (qui provient de la latte de bois utilisée par les dessinateurs)

Théorème : pour $q \geq 2$ donné

(i) s est un polynôme de degré $(q-1)$ dans les intervalles $[a, x_0]$ et $[x_n, b]$

(ii) s est un polynôme de degré $(2q-1)$ sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$

(iii) la dérivée d'ordre $(2q-1)$ est continue en chaque x_i

On montre que l'on peut construire les fonctions splines par morceaux :

posons

$$(x - x_i)_+ = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_i \\ x - x_i & \text{si } x \geq x_i \end{cases}$$

et

$$P_i(x) = d_i \frac{(x - x_i)_+^{2q-1}}{(2q-1)!}$$

alors
$$s(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_j \mathbf{x}^j + \sum_{i=0}^n P_i(\mathbf{x})$$

$\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}, d_0, \dots, d_n$ sont inconnues. Pour les déterminer, on a les équations :

$$\begin{cases} s(\mathbf{x}_i) = y_i & i = 0, \dots, n \\ \sum_{i=0}^n d_i \mathbf{x}_i^k & k = 0, \dots, q-1 \end{cases}$$

Remarque : en résolvant le système précédent, on obtient la continuité d'ordre $(2q-2)$ en \mathbf{x}_i . La dérivée d'ordre $(2q-1)$ présente une discontinuité de valeur d_i en \mathbf{x}_i

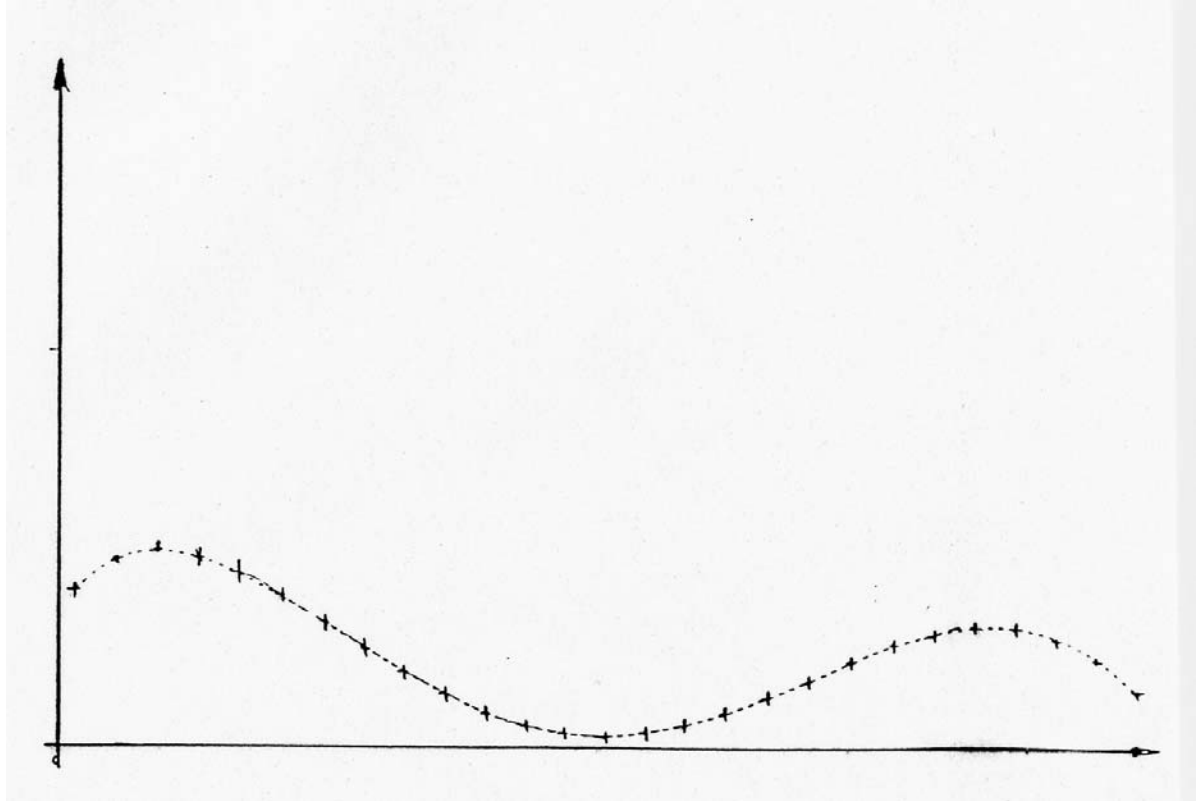


Figure 3

1.2. Lissage

Problème P3 : étant donnés $(n+1)$ points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$, trouver une courbe passant « près » de ces points

1.2.1. Approche de Ferguson

Il s'agit de chercher un polynôme

$$P(\vec{u}) = \vec{\alpha}_0 + \vec{\alpha}_1 u + \vec{\alpha}_2 u^2 + \vec{\alpha}_3 u^3, \quad u \in [0, 1]$$

\Rightarrow

la position de la courbe à l'origine donnée par $\vec{\alpha}_0$

la position de la courbe à l'extrémité donnée par $\vec{\alpha}_0 + \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3$

la direction de la tangente à l'origine donnée par $\vec{\alpha}_1$

la direction de la tangente à l'extrémité donnée par $\vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2 + 3\vec{\alpha}_3$

1.2.2. Courbes de Bézier

1.2.2.1. Définitions

On cherche une courbe définie par :

$$\vec{P}(u) = \sum_{i=0}^n f_i(u) \vec{\alpha}_i, \quad u \in [0,1], \text{ telle que}$$

à l'origine ($u = 0$)

la position de la courbe est donnée par $\vec{\alpha}_0$

la dérivée $k^{\text{ième}}$ ($k \geq 1$) ne dépend que de $\vec{\alpha}_0, \vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k$

à l'extrémité ($u = 1$)

la position de la courbe est donnée par $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \dots + \vec{\alpha}_n$

la dérivée $k^{\text{ième}}$ ($k \geq 1$) ne dépend que de $\vec{\alpha}_n, \vec{\alpha}_{n-1}, \dots, \vec{\alpha}_{n-k+1}$

on peut montrer que

$$f_i(u) = \sum x_{k,i} u^k, \text{ avec } x_{k,i} = (-1)^{k-1} C_{k-1}^{k-i} C_n^k$$

Les $f_i(u)$ s'appellent des **polynômes de Bézier**

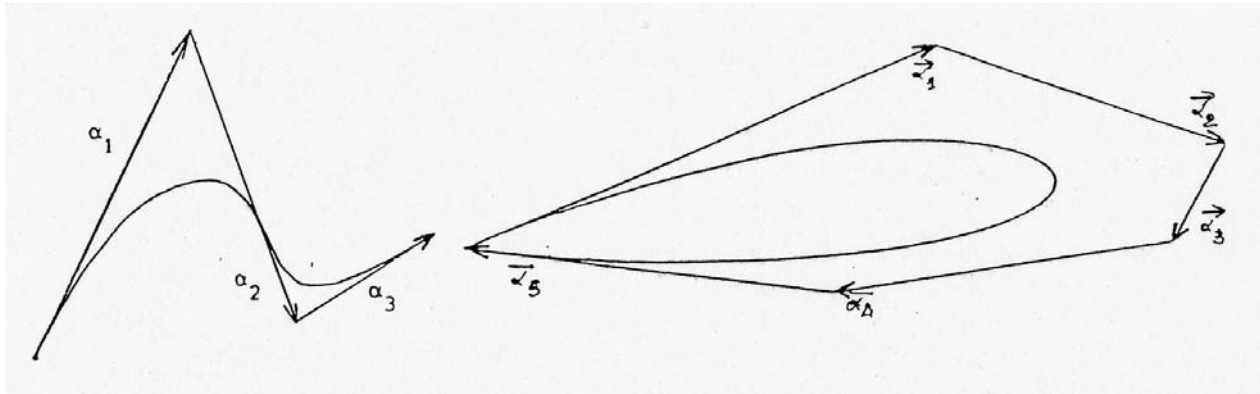
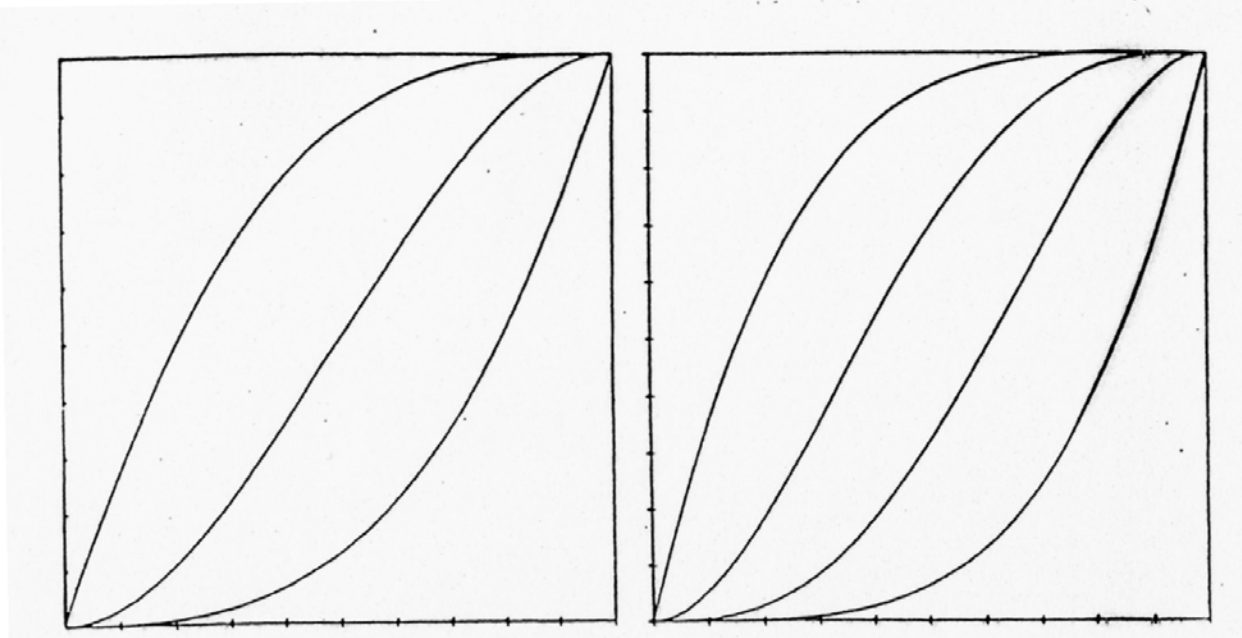


Figure 4



$$n = 3 : f_0 = 1$$

$$f_1 = u^3 - 3u^2 + u$$

$$f_2 = -2u^3 + 3u^2$$

$$f_3 = u^3$$

$$n = 4 : f_0 = 1$$

$$f_1 = -u^4 + 4u^3 - 6u^2 + 4u$$

$$f_2 = 3u^4 - 8u^3 + 6u^2$$

$$f_3 = -3u^4 + 4u^3$$

$$f_4 = u^4$$

Figure 5

Propriétés :

$$f_i(u) - f_{i+1}(u) = C_n^i u^i (1-u)^{n-i} = B_i(u)$$

$$f_i(u) = 1 - f_{n-i+1}(1-u)$$

$$1 > f_1(u) > f_2(u) > \dots > f_n(u) \text{ pour } u \in]0,1[$$

1.2.2.2. Forme de Bernstein

$$\vec{P}(u) = \sum_{i=0}^n f_i(u) \vec{\alpha}_i$$

posons $\vec{S}_{-1} = \vec{0}$

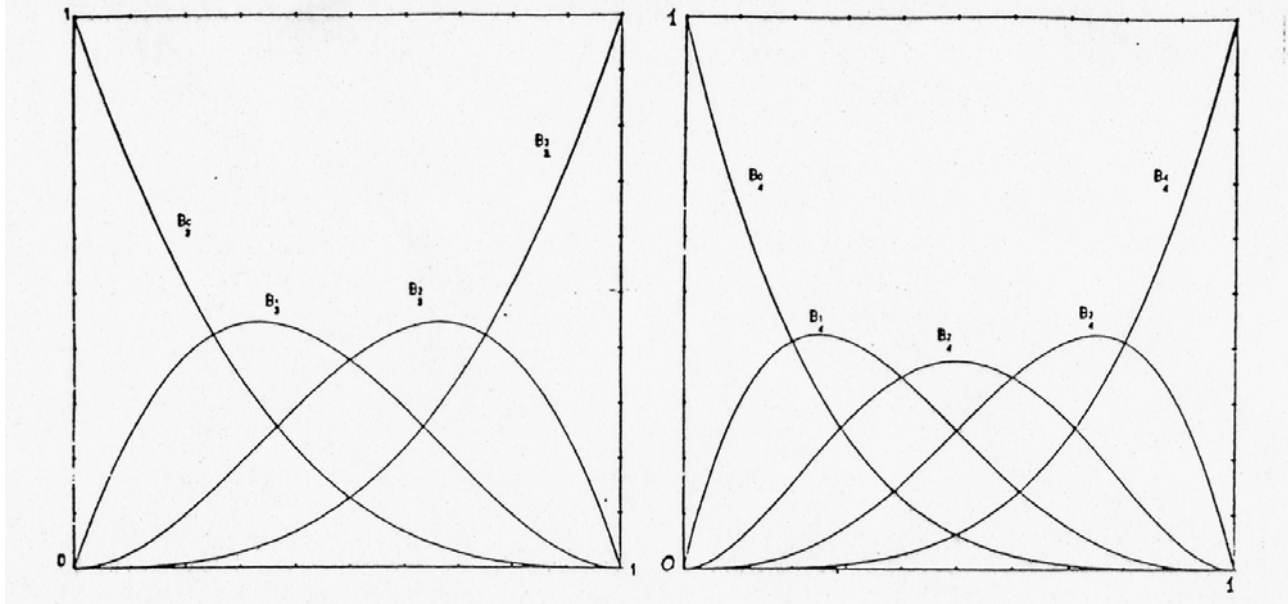
$$\vec{\alpha}_i = \vec{S}_i - \vec{S}_{i-1}, \text{ pour } i \geq 0$$

alors

$$\begin{aligned}
\vec{P}(u) &= \sum_{i=0}^n f_i(u) (\vec{S}_i - \vec{S}_{i-1}) \\
&= \sum_{i=0}^n (f_i(u) - f_{i+1}(u)) \vec{S}_i \\
&= \sum_{i=0}^n B_i(u) \vec{S}_i
\end{aligned}$$

$B_i(u)$ est appelée **fonction de Bernstein** ou **fonction de mélange**

=> points de contrôle et polygone de contrôle



$$n = 3 : B_0 = -u^3 + 3u^2 - 3u + 1$$

$$B_1 = 3u^3 - 6u^2 + 3u$$

$$B_2 = -3u^3 + 3u^2$$

$$B_3 = u^3$$

$$n = 4 : B_0 = u^4 - 4u^3 + 6u^2 - 4u + 1$$

$$B_1 = -4u^4 + 12u^3 - 12u^2 + 4u$$

$$B_2 = 6u^4 - 12u^3 + 6u^2$$

$$B_3 = -3u^4 + 4u^3$$

$$B_4 = u^4$$

Figure 6

Propriétés :

- de l'enveloppe convexe
- de l'invariance par les transformations affines

Avantages :

- la courbe passe par les points de contrôle P_0 et P_n

Inconvénients :

- le degré du polynôme dépend du nombre de points de contrôle
- le contrôle de la courbe est global

1.2.3. Courbes B-splines

1.2.3.1. Définitions

Soit $t = (t_i)$, $1 \leq i \leq n$ une suite de nombres réels tels que $\forall i, t_i \leq t_{i+1}$ Chaque t_i est un **noeud** et t est appelé **vecteur nodal**

On appelle **B-spline de base** les fonctions $N_{i,k}$ définies par

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq u \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(u) = \omega_{i,k}(u)N_{i,k-1}(u) + (1 - \omega_{i+1,k}(u))N_{i+1,k-1}(u)$$

avec
$$\omega_{i,k}(u) = \begin{cases} \frac{u - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} & \text{si } t_{i+k-1} \neq t_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

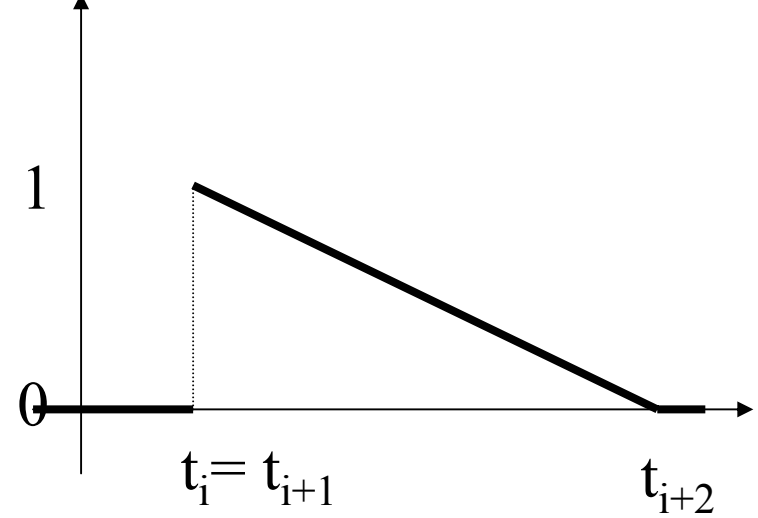
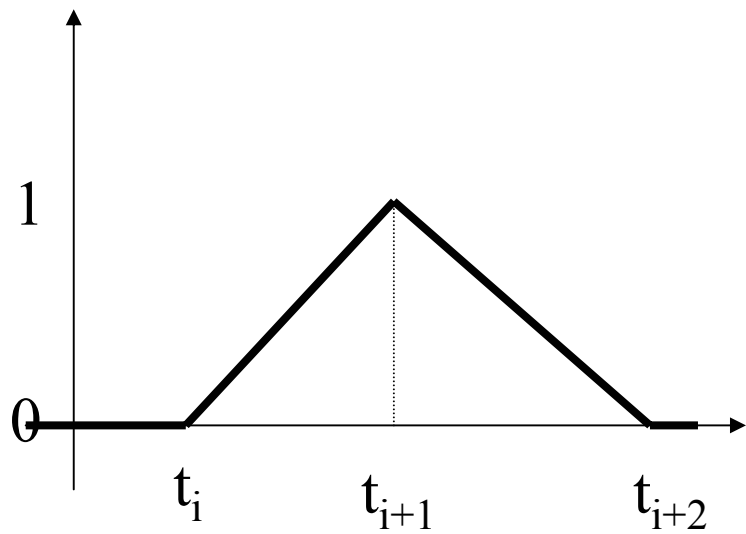


Figure 7 : $N_{i,1}$

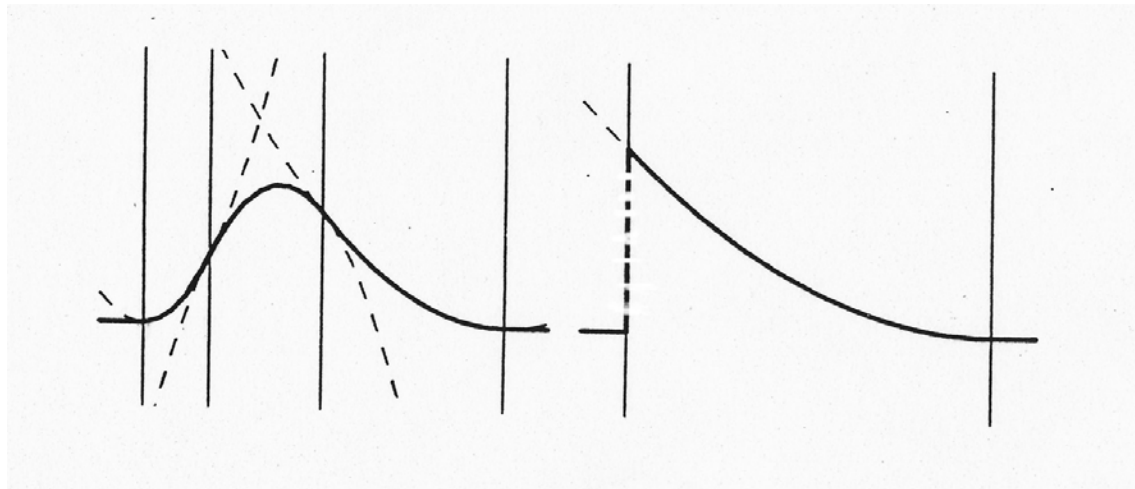


Figure 8 : $N_{i,2}$

Propriétés :

- $N_{i,k}$ est un polynôme de degré k par morceaux, nul hors de $[t_i, t_{i+k}]$. Les t_i sont les points de jonction entre les divers morceaux de la courbe
- si $\forall i, t_i \neq t_{i+1}$, alors $N_{i,k}$ est C^{k-1} . Sinon, chaque doublement d'un point de contrôle diminue de 1 la continuité en t_i

1.2.3.1. B-splines

Soit $t = (t_i)$, $1 \leq i \leq n$ une suite nodale. Une **B-spline** d'ordre k associée à t est définie par :

$$B_{k,t}(u) = \sum N_{i,k}(u) V_i$$

où les V_i sont les points de contrôle de la B-spline

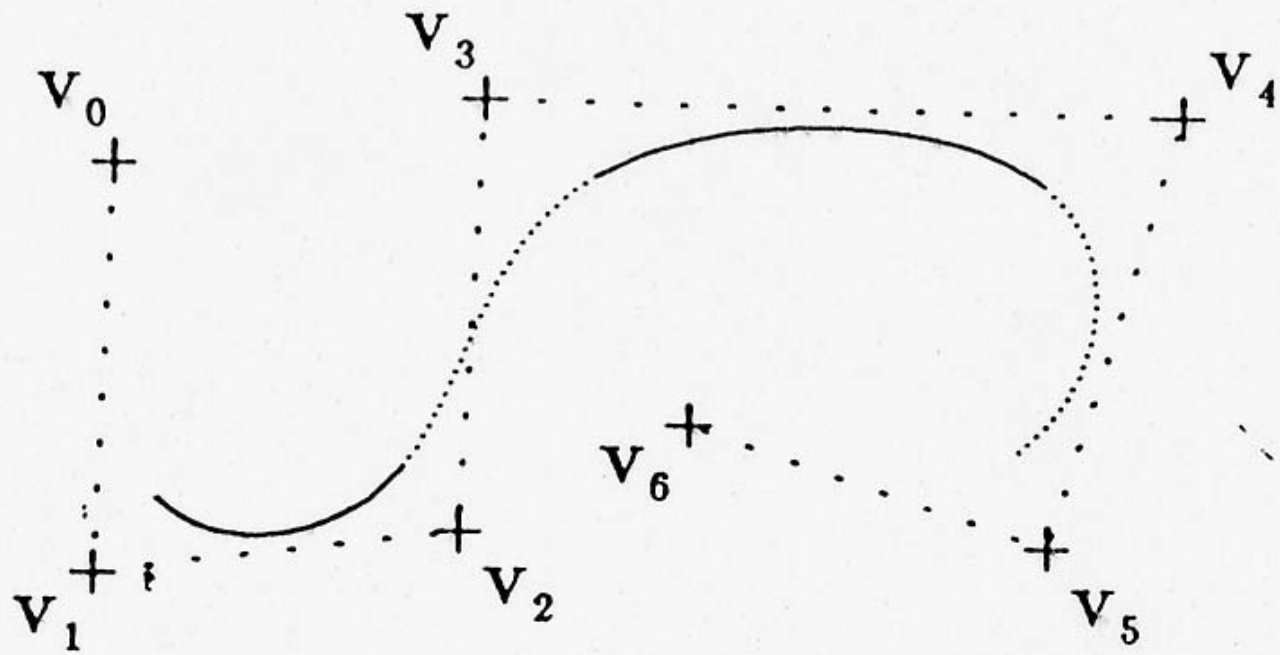


Figure 9 : une B-spline

Cas particuliers :

- $t = Z = (\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$
=> splines cardinal ou uniformes

- $t = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$
 $\mu+1$ $\nu+1$

La récurrence définissant les $N_{i,k}$ devient

$$N_{\mu,\nu}(u) = u N_{\mu,\nu-1} + (1-u)N_{\mu-1,\nu}$$

$$\Rightarrow N_{\mu,\nu}(u) = C_{\mu+\nu}^{\mu} (1-u)^{\mu} u^{\nu}$$

Propriétés :

- de l'enveloppe convexe
- de l'invariance par les transformations affines

Avantages :

- le degré du polynôme est indépendant du nombre de points de contrôle
- le contrôle de la courbe est local

Inconvénients :

1.2.4. Forme rationnelle (NURBS)

On appelle H la fonction $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z, t) \mapsto \left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t} \right)$$

et T l'application $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z, 1)$$

On note $M_i(t)$ les fonctions de mélange des courbes de Bézier ou des B-splines définies par les points de contrôle P_i .
A chaque point P_i , on associe un poids $\beta_i > 0$

On définit

$$S : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$u \mapsto \sum_{i=0}^n \beta_i T(P_i) M_i(u)$$

La forme rationnelle d'une courbe (Bézier ou B-spline) est alors définie par $\sigma : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$u \mapsto \sigma(u) = H(S(u))$$

en fait

$$\sigma(u) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \beta_i M_i(u)} \sum \beta_i P_i M_i(u)$$

Avantages :

- quadriques
- influence d'un point de contrôle grâce à β_i

Inconvénients :

- augmentation des temps de calcul

2. Surfaces

On distingue deux méthodes de représentation d'une surface : les carreaux de surface d'interpolation et le produit tensoriel

2.1. Carreaux de surface d'interpolation

Cette méthode est basée sur la définition des courbes délimitant un carreau suivi du remplissage de ce carreau par interpolation entre les courbes constituant le bord du carreau

Dans la méthode de Coons, le carreau est défini par 4 courbes $P(u,0)$, $P(u,1)$, $P(0,v)$ et $P(v,1)$

Avec les fonctions d'interpolation

$$f_0(t) = 2t^3 - 2t^2 + 1$$

$$0 \leq t \leq 1$$

$$f_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

un point P du carreau est défini par

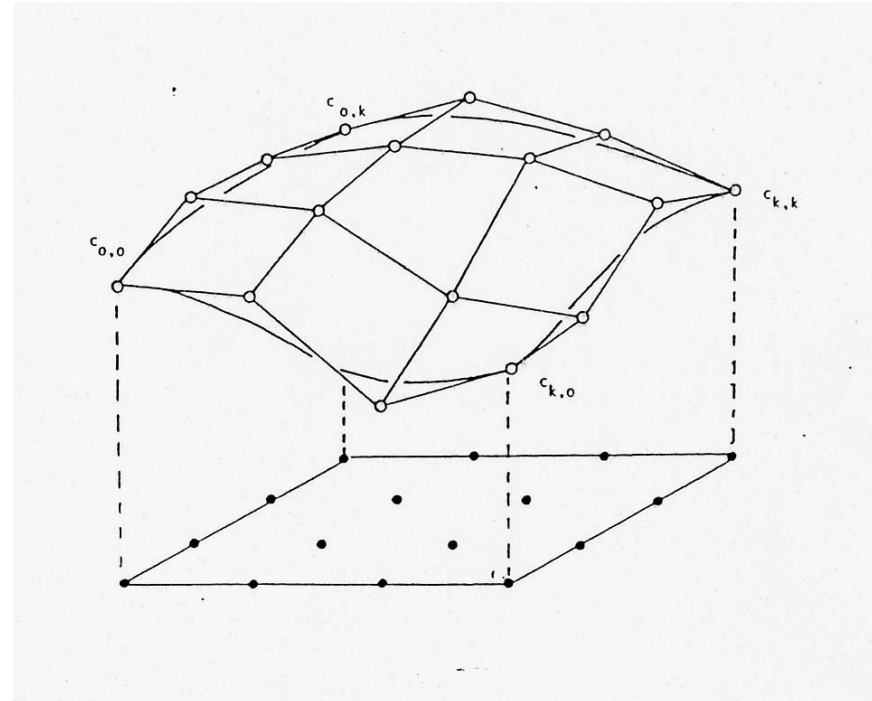
$$\begin{aligned} P(u, v) = & P(u, 0)f_0(v) + P(u, 1)f_1(v) + P(0, v)f_0(u) + P(1, v)f_1(u) \\ & - P(0, 0)f_0(u)f_0(v) - P(0, 1)f_0(u)f_1(v) \\ & - P(1, 0)f_1(u)f_0(v) - P(1, 1)f_1(u)f_1(v) \end{aligned}$$

2.2. Produit tensoriel

Un carreau est généré par le déplacement et la déformation d'une courbe initiale, la **génératrice**, le déplacement étant défini par des trajectoires appelées **directrices**

Cette méthode est une généralisation des méthodes de lissage vues pour les courbes : on part d'un réseau polygonal de sommets

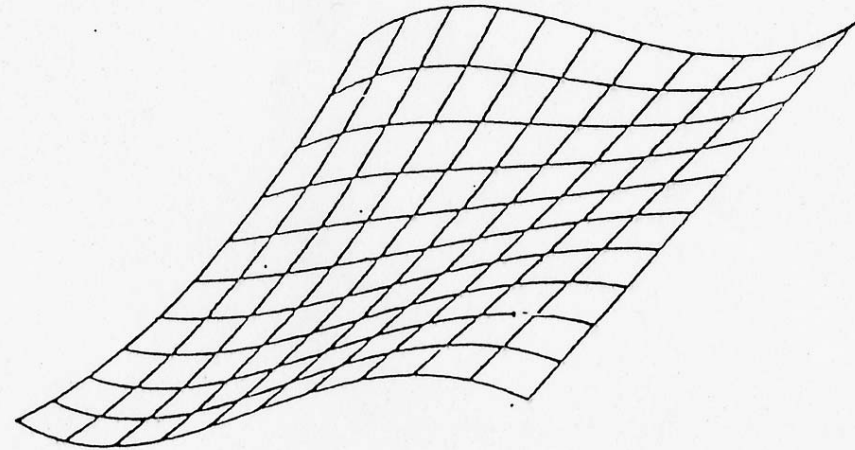
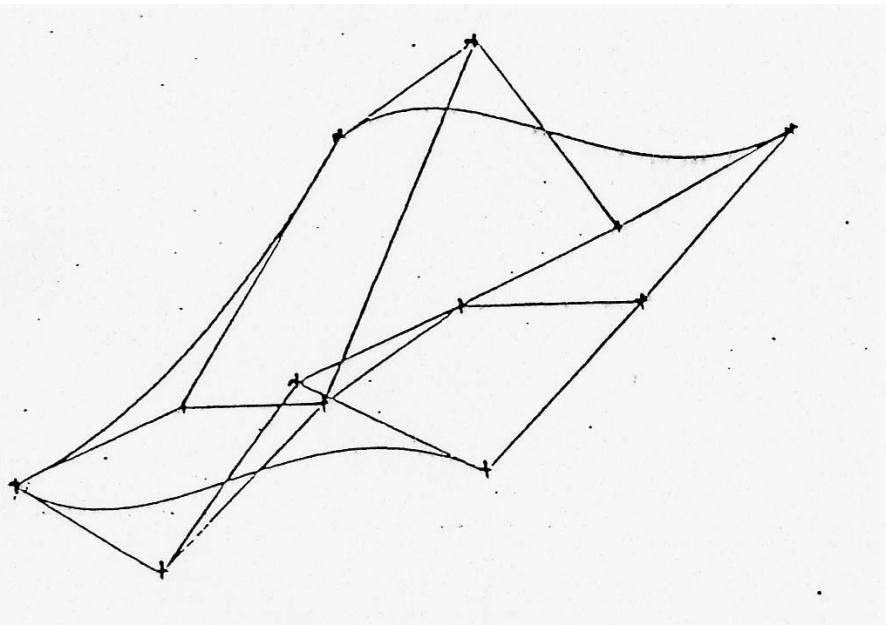
$$P_{i,j}, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$$



2.2.1. Surfaces de Bézier

On utilise les polynômes de Bézier comme fonctions de mélange :

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{j,m}(u) P_{i,j} B_{i,n}(v), \quad 0 \leq u, v \leq 1$$



Avantages :

- interprétation aisée des points de contrôle
- bon contrôle de la surface

Inconvénients :

- le degré du polynôme est dépendant du nombre de points de contrôle
- le contrôle de la courbe est global

2.2.1. Surfaces B-splines

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{j,m}(u) P_{i,j} N_{i,n}(v), \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

Avantages :

- le degré du polynôme est indépendant du nombre de points de contrôle
- le contrôle de la courbe est local

Inconvénients :

- la surface ne passe par aucun point de contrôle