Le tracé de rayons

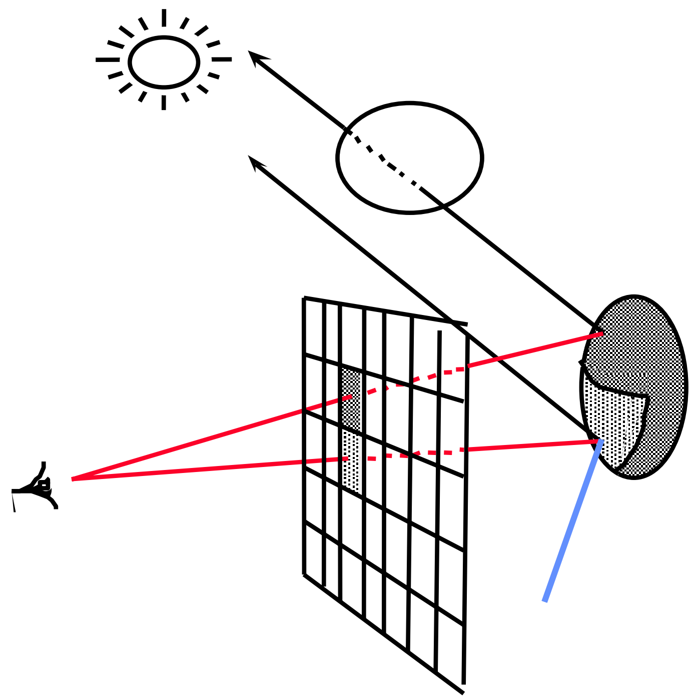
1 - Généralités

1.1 - Principe de l'algorithme :

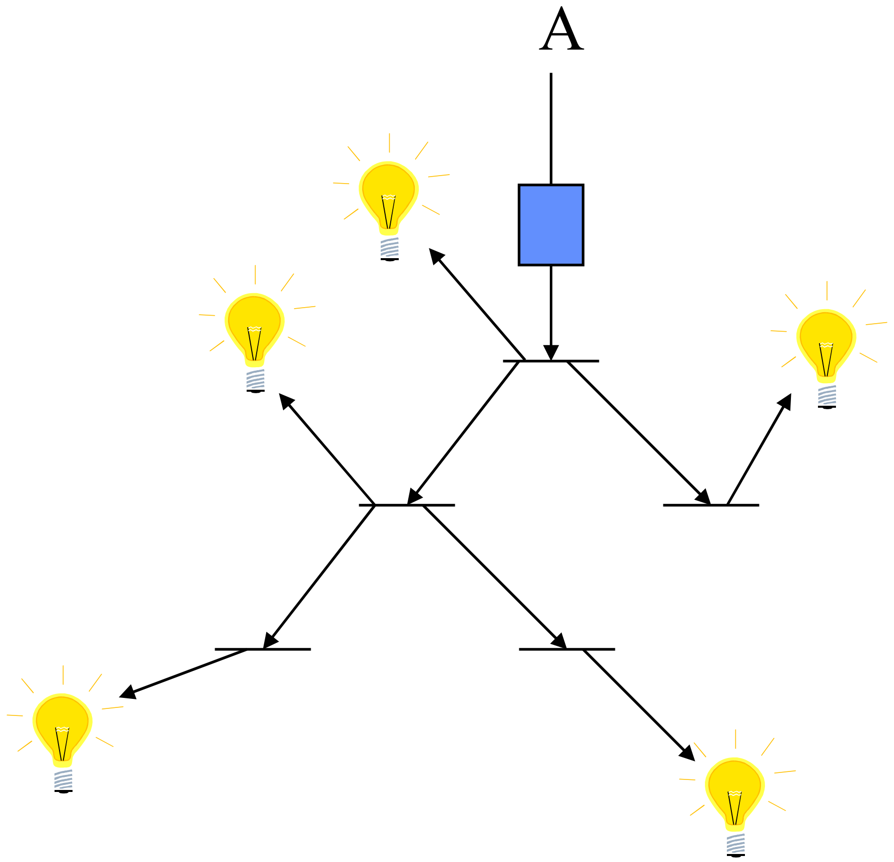
simulation des lois de l'optique

=> rayons primaires

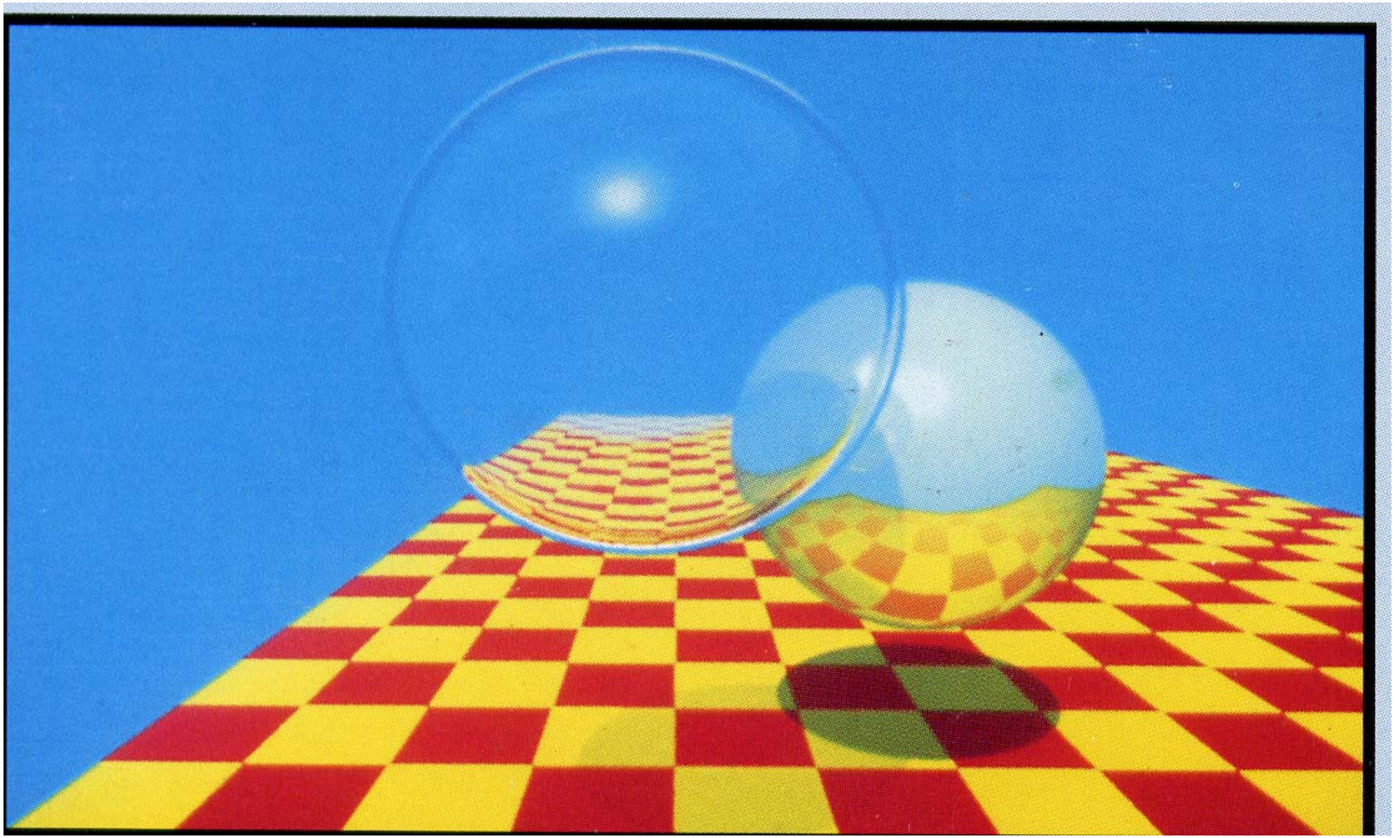
rayons secondaires



```
fonction calcul_couleur (rayon) → couleur
  {  couleur_locale ← couleur_ambiante ;
     pour chaque objet faire
          {calculer_intersection (rayon, objet) ;
           garder_objet_le_plus_proche ;
          }
    si un objet a été gardé alors calculer_couleur_locale ;
    si réflexion alors couleur_r ← calcul_couleur(rayon_réfléchi) ;
    si transmission alors couleur_t ← calcul_couleur(rayon_transmis) ;
    retourner (couleur_locale+couleur_r+couleur_t) ;
  }
programme principal
  { pour chaque pixel de l'écran faire
      {calculer_ rayon (œil, pixel) ;
          afficher (calcul_couleur (rayon)) ;
      }
  }
```



=> évaluation d 'un arbre des rayons



d’après Whitted, Siggraph’1981

1.2 - Modèle d'éclairement : modèle de Whitted

$$I = I_a + k_d \sum_i \vec{N} \bullet \vec{L}_i + k_s \sum_i \left(\vec{N} \bullet \vec{H}_i \right)^n$$

1.3 - Cas des arbres de construction (CSG)

```
Intersection (R : rayon, A : arbre) → liste
{
 si A est une primitive, retourner L = R ∩ A
        sinon /* A = G % D */
            {
              LG ← intersection (R,G) ;
                       LD ← intersection (R,D) ;
              retourner (LG % LD);
            }
}
```

1.4 - Ombres portées

- rayons d'ombrage … si sources lumineuses ponctuelles
- méthodes des cônes
- méthode stochastique

1.5 - Temps de calcul

p = nombre de pixels

n = nombre d'objets

n_a = nombre de pixels nécessitant un calcul d'éclairement

nombre de calculs d'intersection :

- si la scène est ombrée : $n(p+n_a)$ calculs d'intersection
- si les objets sont réfléchissants et si le niveau de profondeur des réflections est k : $n(p+(k+1)na)$ calculs d'intersections

exemple:

$p = 10^6$, $n = 10^3$, $n_a = 4 \times 10^5$, $k = 2$

$10^3 (10^6 + 12\ 10^5) =$ **$2{,}2\ 10^9$ calculs**

2 - Calculs d 'intersection

2.1 - Principe du calcul dans un repère local

rayon $R(t) = P_0 + t\,D$ où P_0 : origine du rayon

$D = (dx,dy,dz)$: vecteur directeur du rayon

$t \geq 0$

scène décrite dans repère du monde R_M, chaque primitive décrite dans son repère local R_L => 2 matrices de transformation connues

M : matrice de passage de R_M à R_L

M^{-1} : matrice de passage de R_L à R_M

procédure :

1 - calcul de l 'équation du rayon dans R_L : $R'(t) = M \bullet R(t)$

2 - calcul de l 'intersection rayon-objet dans R_L

3 - calcul de la normale dans R_L

4 - calcul de la normale dans R_M par changement de repère

2.2 - Cube unitaire

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$t_1 = {(1 - x_0)}/{dx}$$

$$t_2 = {- x_0}/{dx}$$

$[I_x, M_x] = [\min(t_1, t_2), \max(t_1, t_2)\ ]$

$[I,M] = [\max(I_x,I_y,I_z), \min(M_x,M_y,M_z)]$

si $I \geq M$ il y a intersection

sinon l'intersection n'existe pas

2.3 - Sphère unitaire

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

substitution de R(t) =>

$$t^2\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) + 2t\left(x_0dx + y_0dy + z_0dz\right) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

2.4 - Cylindre unitaire

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1) \\ 0 \leq z \leq 1 & (2) \end{cases}$$

substitution de R(t) dans (1) =>

$$t^2\left(dx^2 + dy^2\right) + 2t\left(x_0dx + y_0dy\right) + x_0^2 + y_0^2 - 1$$

=> intervalle $[t_1,t_2]$

substitution de R(t) dans (2) =>

$$B = \left(1 - z_0\right) \big/ dx$$

$$A = -z_0 \big/ dx$$

$$t_3 = \min\left(A, B\right)$$

$$t_4 = \max\left(A, B\right)$$

$$\left[I, M\right] = \left[\max\left(t_1, t_3\right), \min\left(t_2, t_4\right)\right]$$

2.5 - Cône unitaire

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

2.6 - Polygone : 2 étapes

- intersection entre le rayon et le plan du polygone
- test pour savoir si le point trouvé est intérieur au polygone

méthode de Snyder et Badouel pour un triangle P_0,P_1,P_2

1ère étape :

$$\text{normale} : \vec{N} = \overrightarrow{P_0P_1} \wedge \overrightarrow{P_0P_2}$$

équation du plan du triangle :

$$\mathrm{P} \bullet \vec{\mathrm{N}} + \mathrm{d} = 0, \text{avec } \mathrm{d} = -\mathrm{P}_0 \bullet \vec{\mathrm{N}} \qquad (1)$$

$$\text{équation du rayon} : \mathrm{R}(\mathrm{t}) = O + \vec{D}t \qquad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow t = \left(d - \vec{N} \bullet O\right) / \vec{N} \bullet \vec{D}$$

$$\text{si } \vec{N} \bullet \vec{D} = 0, \text{pas d'intersection}$$

$$\text{si } t \leq 0, \text{intersection rejetée}$$

2ème étape :

$$P \in \text{triangle si } P_0P = \alpha\ P_0P_1 + \beta\ P_0P_2 \qquad (3)$$

$$\text{avec } \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha + \beta \leq 1$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_P - x_0 = \alpha\left(x_1 - x_0\right) + \beta\left(x_2 - x_0\right) \\ y_P - y_0 = \alpha\left(y_1 - y_0\right) + \beta\left(y_2 - y_0\right) \\ z_P - z_0 = \alpha\left(z_1 - z_0\right) + \beta\left(z_2 - z_0\right) \end{cases}$$

pour réduire ce système à 2 équations à 2inconnues, on projette ce triangle suivant un des axes, celui de plus grande projection

$\Rightarrow$ choix de i_0

$i_0 = 0$ si $\left|N_x\right|$ maximum

$i_0 = 1$ si $\left|N_y\right|$ maximum

$i_0 = 2$ si $\left|N_z\right|$ maximum

soient $i_1 \neq i_2 \in \{0,1,2\} - i_0$

posons

$$u_0 = P_{i_1} - P_{0i_1}, u_1 = P_{1i_1} - P_{0i_1}, u_2 = P_{2i_1} - P_{0i_1}$$

$$v_0 = P_{i_2} - P_{0i_2}, v_1 = P_{1i_2} - P_{0i_2}, v_2 = P_{2i_2} - P_{0i_2}$$

(3) devient :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha\ u_1 + \beta\ u_2 \\ v_0 = \alpha\ v_1 + \beta\ v_2 \end{cases}$$

d' où

$$\alpha = \frac{\det\begin{pmatrix} u_0 & u_2 \\ v_0 & v_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}} \qquad \beta = \frac{\det\begin{pmatrix} u_1 & u_0 \\ v_1 & v_0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}}$$

2.7 - Tore

$$\left(x^2+y^2+z^2+1-r^2\right)^2-4\left(x^2+y^2\right)=0$$

substitution de R(t) => équation 4ème degré

2.8 - Surface algébrique

$$\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{ijk}x^i y^j z^k$$

substitution => équation de degré l+m+n
résolution par Newton, Laguerre ou Bairstow
MAIS le choix de la valeur initiale est important (par exemple, méthode des intervalles)

2.9 - Surfaces bicubiques

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} B_i(u) B_j(v) P_{ij}$$

où P_{ij} : points de contrôle de la surface

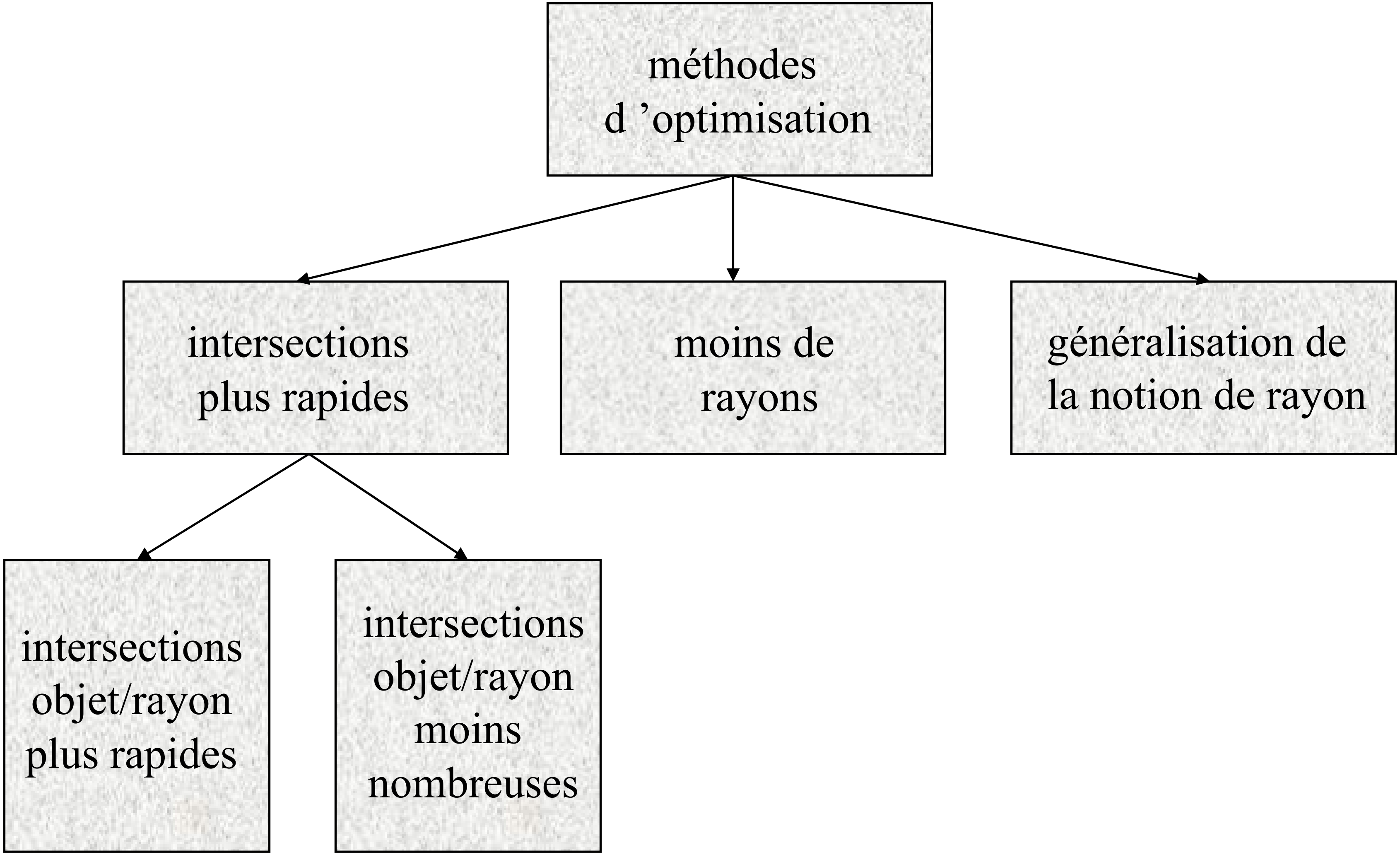
$B_i(u)$, $B_j(v)$: fonctions de mélange

- décomposition en polygones plans
- subdivision récursive en sous-carreaux
- méthodes numériques : utilisation de résultants

3 - OPTIMISATIONS

On peut chercher à diminuer :

- le temps de calcul
- le nombre de pixels à étudier
- le nombre d'intersections à tester

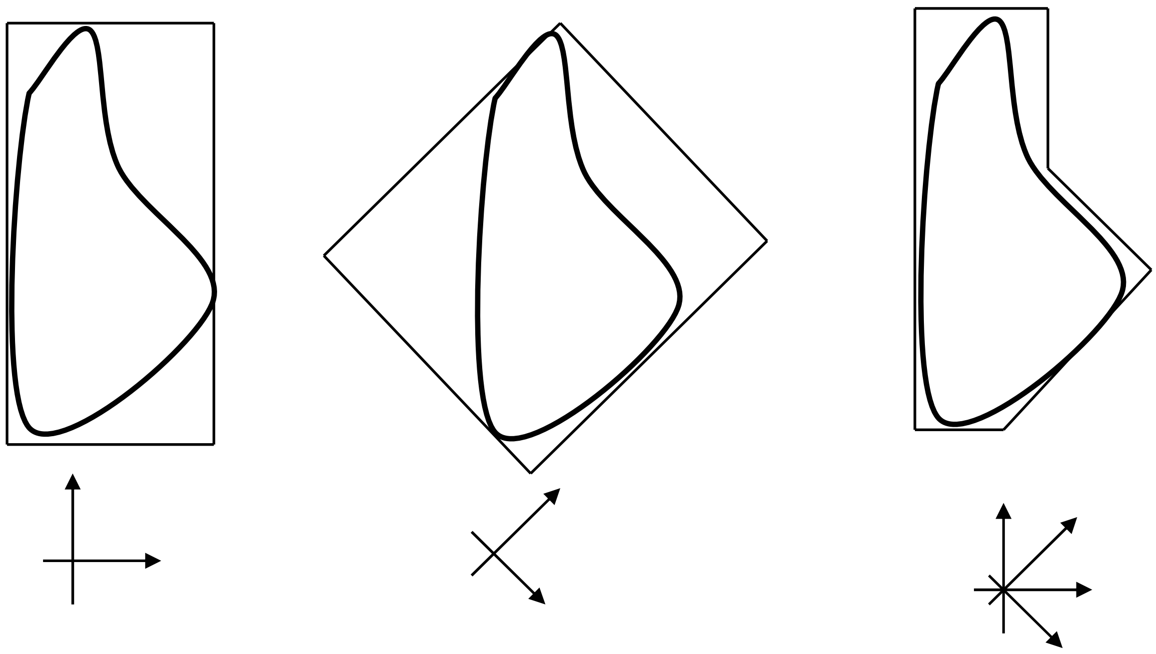

méthodes d 'optimisation
intersections plus rapides
moins de rayons
généralisation de la notion de rayon
intersections objet/rayon plus rapides
intersections objet/rayon moins nombreuses

3.1 - Utilisation de boites englobantes

=> structuration des données

3.1.1 Dans l'espace

- parallélépipèdes
- sphères ou ellipsoïdes
- polyèdres



- tranches d ’espace

avantages :

s ’applique à tous les types de rayons

inconvénients :

choix du type d ’englobant (surtout pour les arbres de construction)

3.1.2 En projection sur l ’écran

avantages :

simplicité

inconvénients :

rayons secondaires englobants imprécis

3.2 - Recherche d ’une partition

=> algorithmes de suivi de rayon

3.2.1 de R^3

- par des cubes
- par des arbres octaux
- par des tranches d'espace
- par des arbres de partition binaire

3.2.2 de R^2

- par une grille
- par un arbre quaternaire

3.2.3 Méthodes directionnelles

- cube directionnel
- tampon de lumière
- partition de R^5

un rayon → 3 coordonnées pour origine

un rayon → 2 angles pour direction

3.3 Diminution du nombre de rayons lancés

- exploitation de la cohérence
  - des objets
  - de l 'image
  - des rayons
  - des données
- méthodes statistiques
  - échantillonnage de l 'écran

3.4 Généralisation de la notion de rayon

- lancer de cônes

  uniquement plans et sphères

- lancer de faisceaux

  uniquement facettes polygonales

- lancer de rayons discret