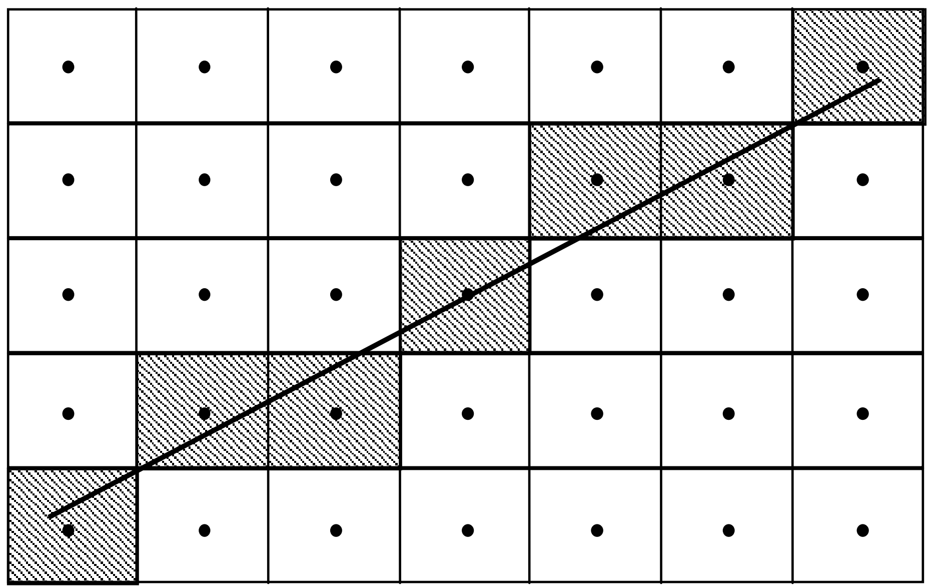
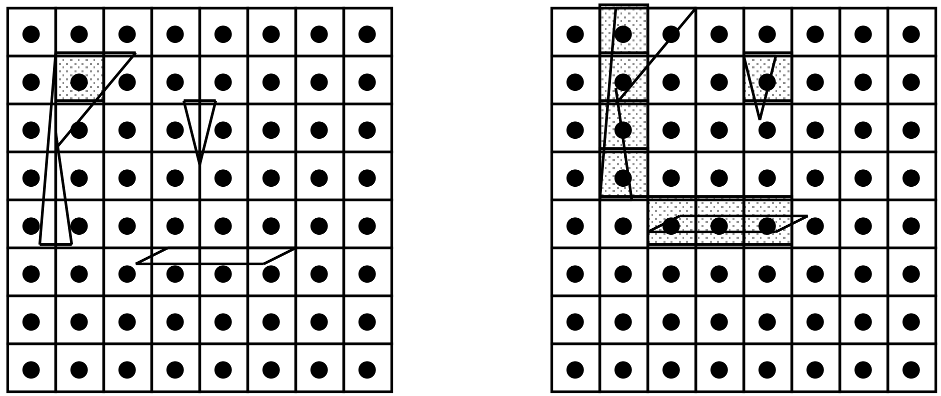
Antialiassage

1. Présentation des problèmes d’aliassage

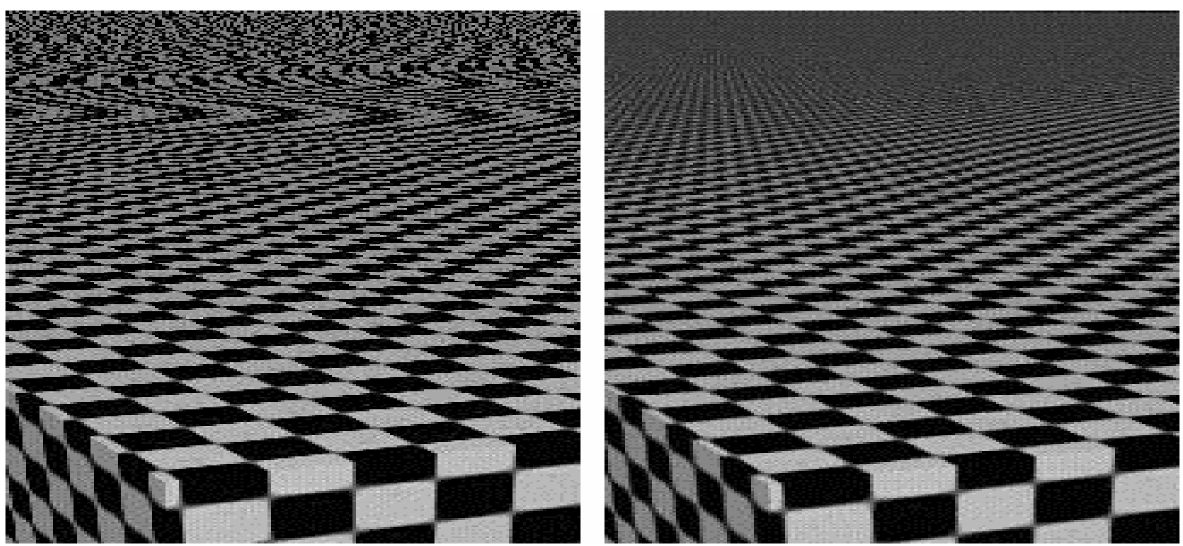
1.1 Marches d'escalier

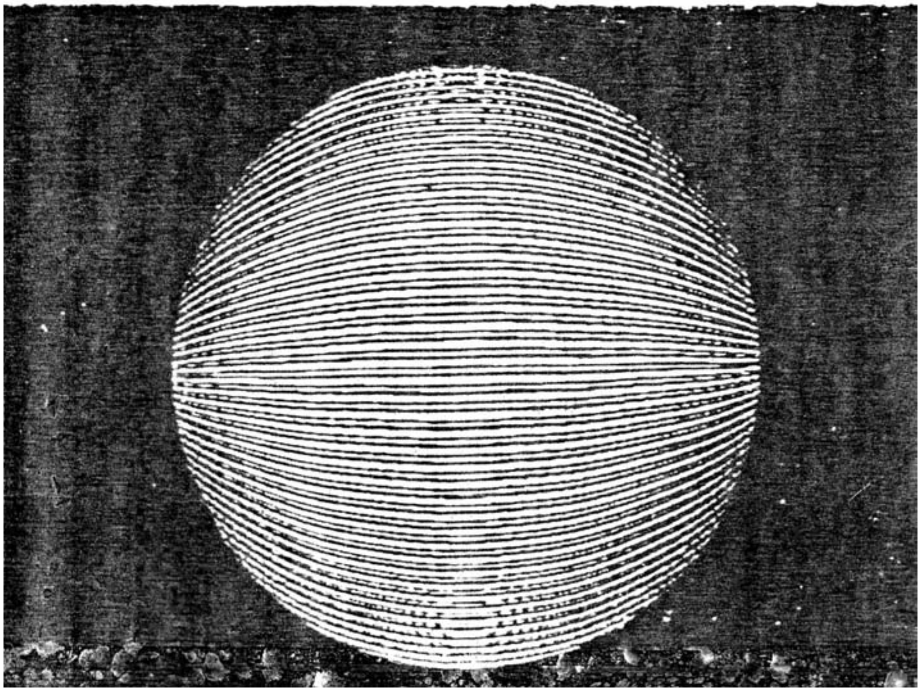


1.2 Petits objets



1.3 Moirés

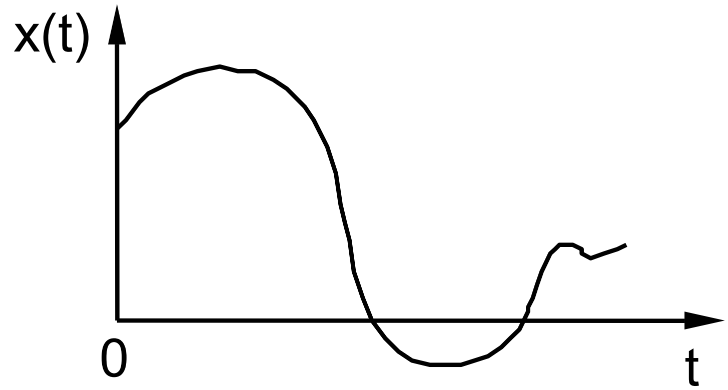




2. Echantillonnage et antialiassage

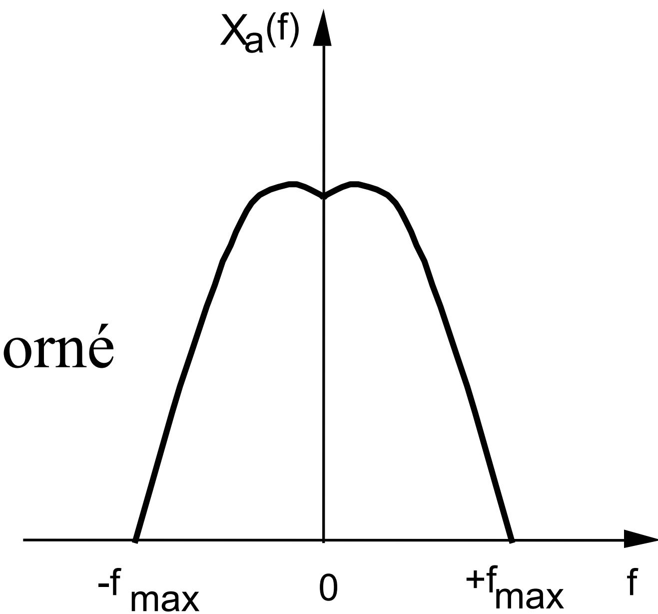
2.1. Définitions

- **signal analogique** $x_a(t)$



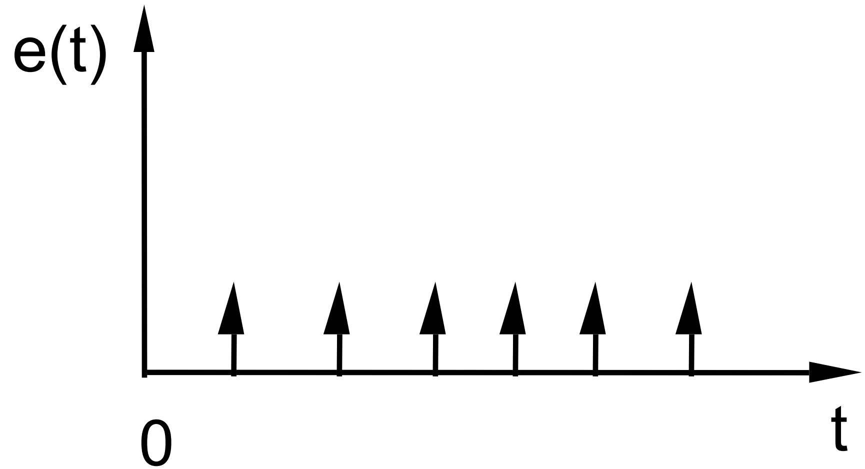
transformée de Fourier => spectre fréquentiel du signal

$$X_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-2i\pi f t} dt$$



x_a à support non borné => X_a à support borné

- **signal d'échantillonnage**

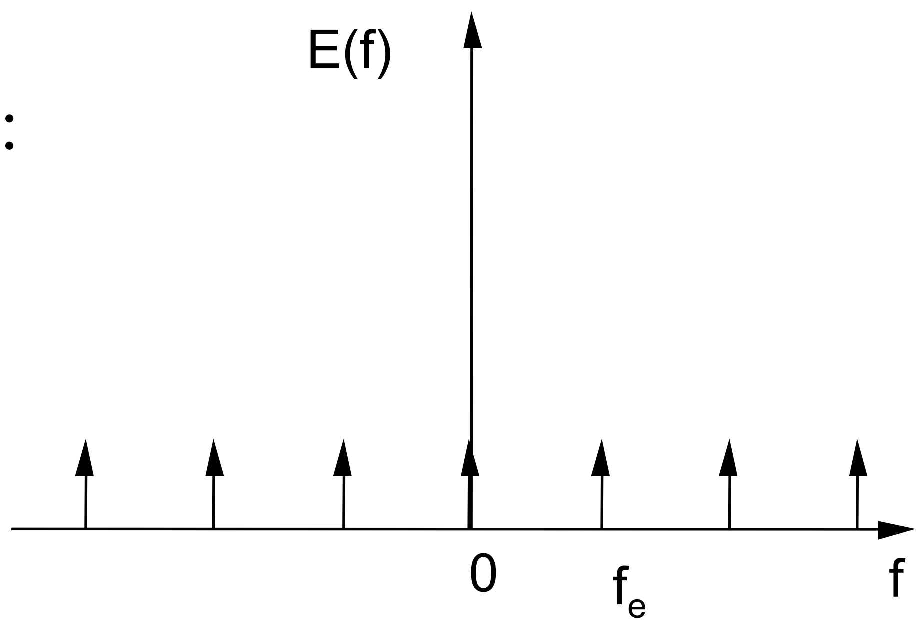


$$e(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-nT_e\right), \text{ où } T_e \text{ est la fréquence d'échantillonnage}$$

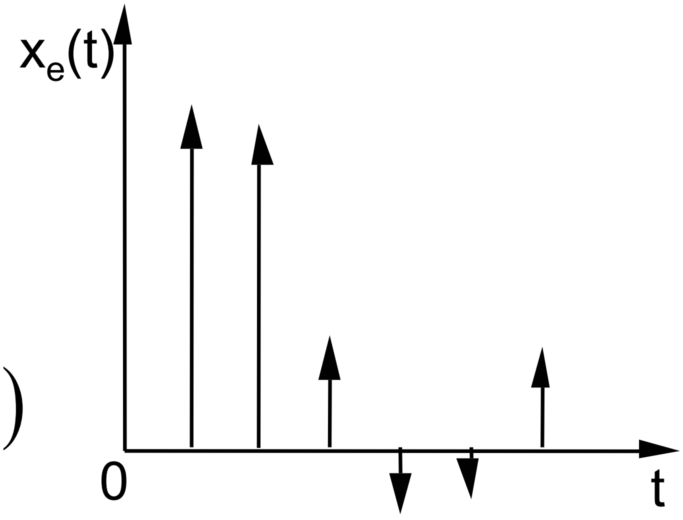
dans le domaine fréquentiel :

$$E(f)=f_e\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-nf_e\right)$$

où $f_e = 1/T_e$



- **signal échantillonné** $x_e(t)$



$$x_e(t) = x(t)e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(t - nT_e\right)$$

dans le domaine fréquentiel :

$$X_e(f) = X(f) * E(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - nf_e\right)$$

2.2 - Théorème de SHANNON

filtre passe - bas idéal :

$$H(f)=\begin{cases}1/f_e & \text{si } |\mathrm{f}|\leq f_e/2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

filtrage dans le domaine fréquentiel :

$$X(f)=X_e(f)H(f)$$

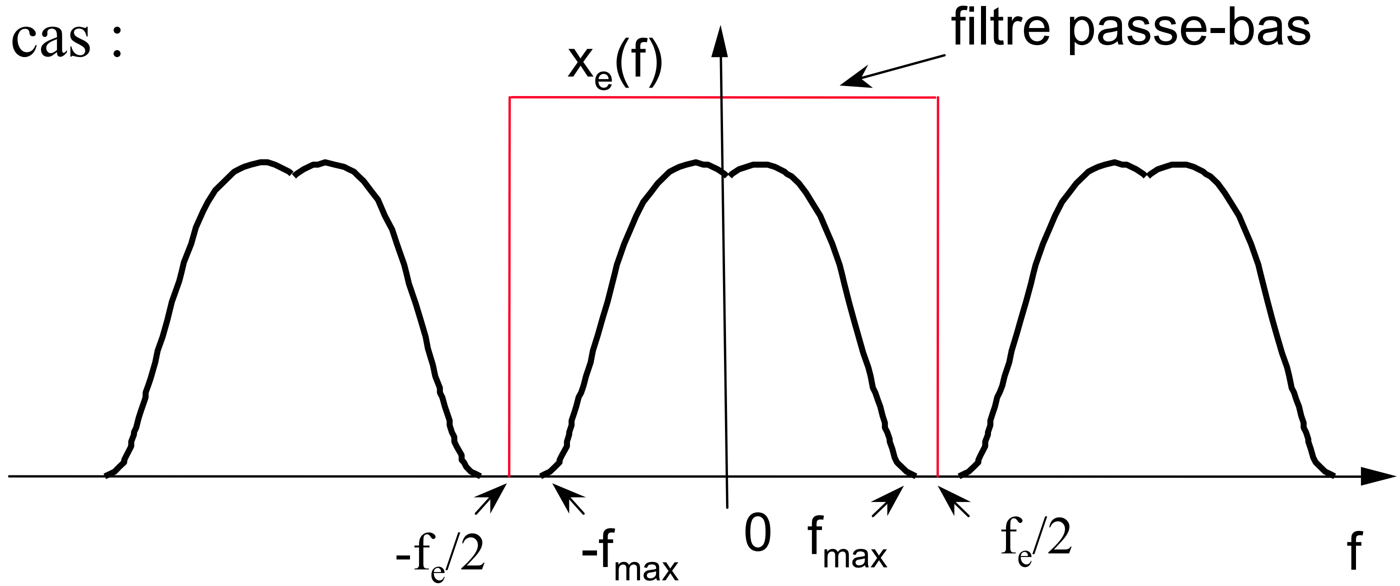
filtrage dans le domaine spatial :

$$x(t)=x_e(t)*h(t)\quad \text{où}\ \ h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}H(f)\,e^{2i\pi ft}dt$$

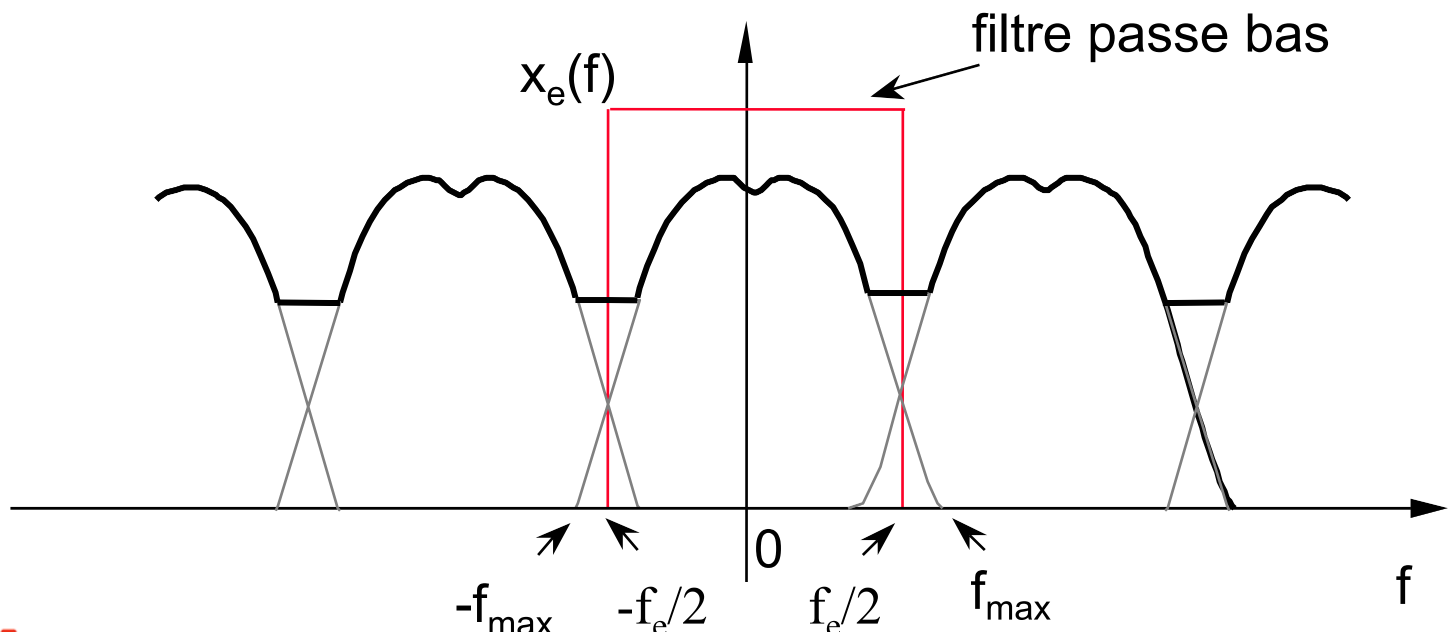
$$=\frac{\sin\left(\pi\,t/T_e\right)}{\pi\,t/T_e}=\sin c\left(\frac{\pi\,T}{T_e}\right)$$

$$\text{donc } x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_e\left(nT_e\right)\sin c\left(\frac{t-nT_e}{T_e}\right)$$

il y a 2 cas :



filtre passe-bas
$x_e(f)$
$-f_e/2$
$-f_{max}$
0
f_{max}
$f_e/2$
f



filtre passe bas
$x_e(f)$
0
$-f_{max}$
$-f_e/2$
$f_e/2$
f_{max}
f

dans le second cas, il y a repliement du spectre = perturbation des hautes fréquences du spectre => production d'aliassage

l'ampleur de l'aliassage dépend de la quantité d'énergie contenue dans la zone aliassée

Théorème de Shannon : le signal analogique peut être reconstitué si la fréquence d'échantillonnage est supérieure ou égale à 2 fois la fréquence maximum du signal. Alors :

$$X_a(f) = X_e(f)H(f)$$
$$x_a(t) = x_e(t) * h(t)$$

3 - Traitement général d 'antialiassage

3.1 Augmentation des fréquences d'échantillonnage

3.2 Limitation du spectre fréquentiel du signal analogique

avant échantillonnage : préfiltrage

- dans le domaine fréquentiel
- dans le domaine spatial

$$I_f(i,j) = h(i,j) ** I(i,j)$$

image numérique

réponse impulsionnelle du filtre

on prend en général des filtres à support fini [-M,M']x[-N,N'] (= masque) et séparables : $h(i,h) = h_1(i)\ h_2(j)$.

Alors

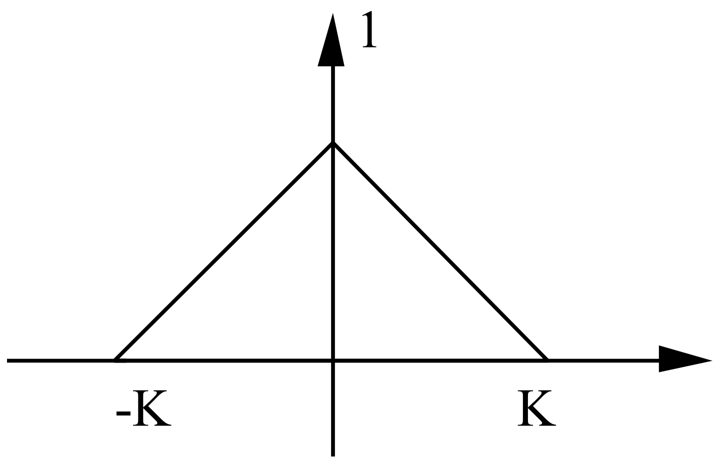
$$I_f(i,j) = \sum_{-M}^{M'} \sum_{-N}^{N'} h(m,n) I(i-m, j-n)$$

Exemple 1 : fenêtre de Fourier

$$h(i,j) = \frac{1}{25} \quad \text{si } M = M' = N = N' = 2$$

Exemple 2 : fenêtre de Bartlett

$$h(i,h) = h_1(i)\ h_1(j)$$



Exemple 3 : fenêtre de Hamming

$$h_1(x) = \begin{cases} \alpha + \beta \cos(\pi\ x/2) & \text{si } |\mathrm{x}| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

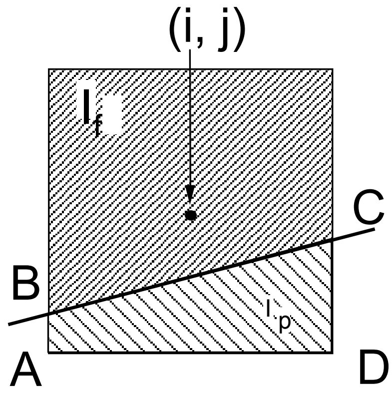
4 - Antialiassage d ’éléments géométriques

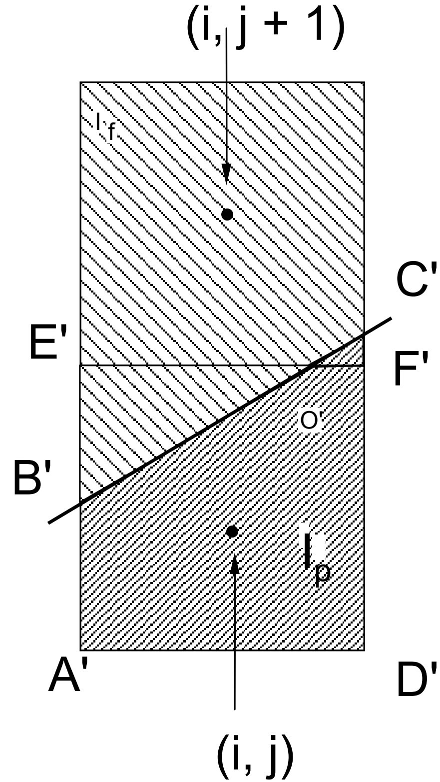
4.1 Sur-échantillonnage et préfiltrage discret

4.2 Méthodes incrémentales

présentation de la méthode de Pitteway et Watkinson

(il existe aussi une méthode due à Gupta …)





$$aire_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2} = mx - y + \frac{1}{2} + c$$

$$aire_{A'B'C'D'} = \frac{A'B' + D'C'}{2} = mx - y + \frac{1}{2} + c$$

Pitteway_Watkinson(x_1,y_1,x_2,y_2)

{ $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1);$

$w = 1 - m;$

$x = x_1;$

$y = y_1;$

tant que $x \leq x_2$ **faire**

{ lire I_f(x,y);

I_{final}(x,y) = arrondi($d\lfloor I_p(x,y) - I_f(x,y)\rfloor) + I_f(x,y);$

afficher le pixel(x,y);

x = x + 1;

si d < w **alors** d = d + m

sinon

{ y = y + 1;

d = d - w;

}

}

}

5 - Echantillonnage stochastique

échantillonnage régulier => interférences produites par la superpositio
de 2 structures périodiques légèrement décalées => défaut régulier (aliassage)

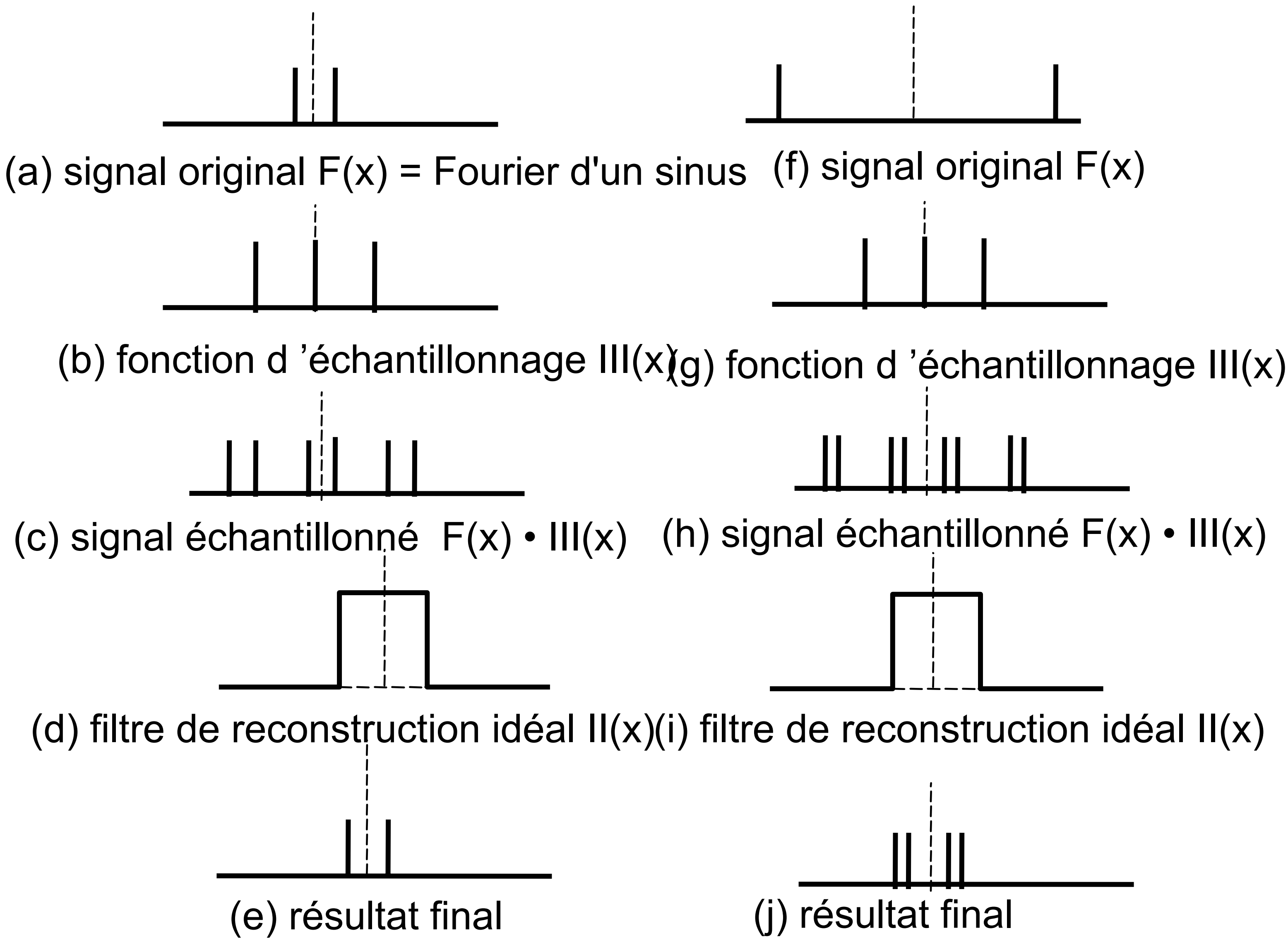
échantillonnage irrégulier => bruit incohérent => défaut irrégulier

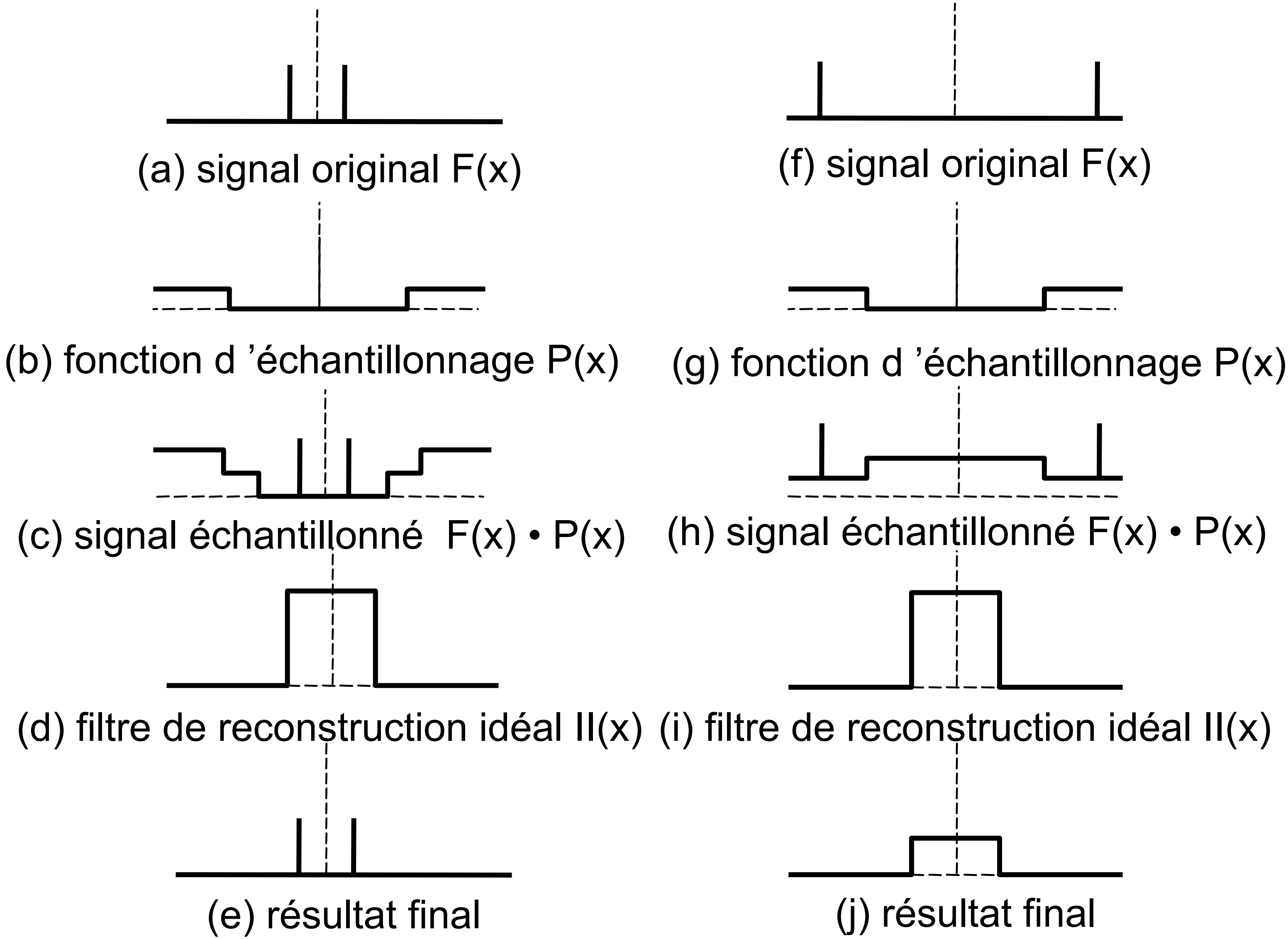
oeil humain moins sensible au bruit qu'à l'aliassage.

5.1 - Echantillonnage par disque de Poisson

échantillons placés aléatoirement suivant une loi uniforme avec la restriction que deux échantillons ne peuvent être en dessous d'une certaine distance.

pour un signal sinusoïdal, on a les résultats suivants :




(a) signal original F(x)
(f) signal original F(x)
(b) fonction d ’échantillonnage P(x)
(g) fonction d ’échantillonnage P(x)
(c) signal échantillonné F(x) • P(x)
(h) signal échantillonné F(x) • P(x)
(d) filtre de reconstruction idéal II(x)
(i) filtre de reconstruction idéal II(x)
(e) résultat final
(j) résultat final

5.2 - Perturbation d'une grille régulière

en une dimension, le $n^{\text{ième}}$ échantillon est remplacé par $nT+\zeta_n$

=> atténuation hautes fréquences

énergie perdue par atténuation apparaît comme du bruit uniforme

décomposition du spectre ne change pas sinon.

les cas les plus fréquents pour la variable aléatoire ζ sont :

une perturbation gaussienne (de variance s^2)

une perturbation par bruit blanc (valeurs de S distribuées uniformément entre -gT et +gT)

en 2D, on place un échantillon au milieu (x,y) d'un pixel et du bruit est ajouté indépendamment à x et y, de façon que l'échantillon reste dans le pixel.

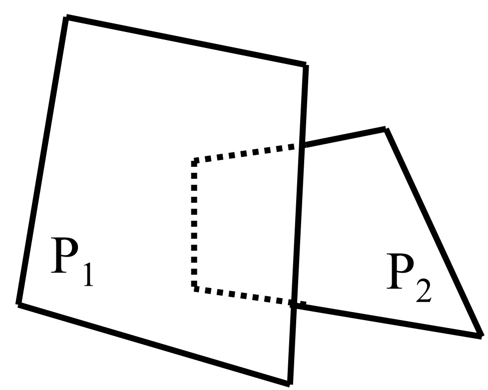
4.3 Antialiassage et le tampon de profondeur

le tampon de profondeur possède les propriétés suivantes :

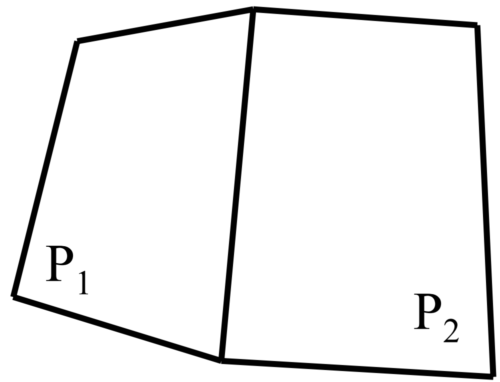
- pas de tri préalable des polygones ;
- les intersections entre polygones sont prises en compte par l 'algorithme.

Ceci induit les 3 problèmes suivants pour antialiasser des polygones affichés par le tampon de profondeur :

1^er^ problème : changement de couleur de fond



2ème problème : polygones adjacents



3ème problème : intersections entre polygones