MPRI 2006–2007
Jeux pour la théorie des automates, la vérification et l'internet

Olivier Serre
Olivier.Serre@liafa.jussieu.fr

⋆ ⋆ ⋆

Jeux sur des graphes de processus à pile munis de conditions d'explosion

On considère un processus à pile $\mathcal{P} = \langle Q, \Gamma, \perp, \Delta \rangle$ et une partition $Q_{\mathbf{E}} \cup Q_{\mathbf{A}}$ de Q. On appelle $\mathcal{G} = ((V, E), V_{\mathbf{E}}, V_{\mathbf{A}})$ le graphe de jeu engendré par $\mathcal{P}$ et la partition précédente, et on suppose qu'il est sans cul-de-sac. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note V_n l'ensemble des configurations de $\mathcal{G}$ de hauteur de pile égale à n, par $V_{\leqslant n}$ l'ensemble des configurations de $\mathcal{G}$ de hauteur de pile inférieure ou égale à n et par $V_{\geqslant n}$ l'ensemble des configurations de $\mathcal{G}$ de hauteur de pile supérieure ou égale à n.

La condition de gain $\Omega_{Exp} = \bigcap_{n \geqslant 1} [(V^* V_n) V^\omega]$ est qualifiée de **condition d'explosion**. Le jeu $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega_{Exp})$ est qualifié de **jeu d'explosion**.

La condition duale $\Omega_{Bor} = \bigcup_{n \geqslant 1} V_{\leqslant n}^\omega$ de la condition d'explosion est qualifiée de **condition de bornage**.

Une partie est remportée par Eve dans un jeu d'explosion si et seulement si la hauteur de pile est non bornée. On peut distinguer deux types possibles de partie gagnantes pour Eve, selon qu'un niveau de pile est infiniment souvent visité ou non. Ces deux cas sont représentés dans la figure 1.

Une partie est remportée par Eve pour la condition de bornage si et seulement si la hauteur de pile est bornée.

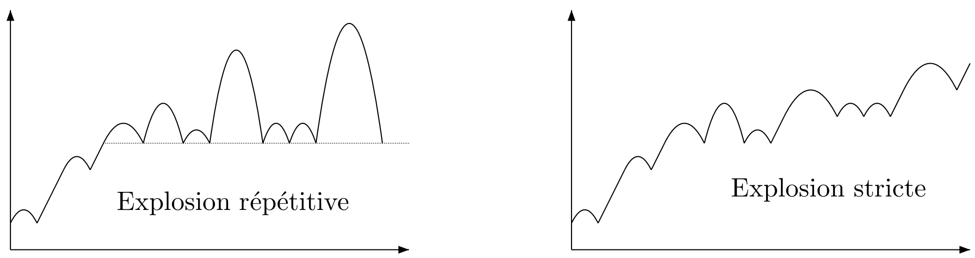

FIG. 1 – Les deux types de parties gagnantes pour l'explosion

On définit une variante de la condition d'explosion, la condition d'explosion stricte (dont l'interprétation graphique est donnée dans la figure 1).

La condition de gain $\Omega_{ExpSt} = \bigcap_{n \geqslant 1} V^* V_{\geqslant n}^\omega$ est qualifiée de **condition d'explosion stricte**. Le jeu $\mathbb{G}_s = (\mathcal{G}, \Omega_{ExpSt})$ est qualifié de **jeu d'explosion stricte**.

La condition duale Ω_{Rep} de la condition d'explosion stricte, que l'on appelle **condition de répétition** est donnée par $\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{m\geqslant 0}[(V^m V^* V_n)V^\omega]$.

Une partie est remportée par Eve dans un jeu d'explosion stricte si et seulement si toute hauteur de pile est un jour quittée pour toujours. Une partie est remportée par Adam si et seulement si un niveau de pile est infiniment souvent visité, ou de façon équivalente si et seulement si une configuration est infiniment souvent visitée.

Question 1. Pour tout $i \geqslant 1$, on appelle $\mathbb{G}_i = (\mathcal{G}, Acc(V_{\geqslant i})$ le jeu d'accessibilité vers $V_{\geqslant i}$.

(a) On note $W^i_{\mathbf{E}}$ et $W^i_{\mathbf{A}}$ les ensembles de positions gagnantes pour Eve et pour Adam dans le jeu $\mathbb{G}_i$. Montrer qu'Eve et Adam ont des stratégies sans mémoire pour gagner dans $\mathbb{G}_i$.

(b) On note $W_{\mathbf{E}}$ et $W_{\mathbf{A}}$ les ensembles de positions gagnantes pour Eve et pour Adam dans le jeu $\mathbb{G}$. Montrer que $W_{\mathbf{E}} \subseteq \bigcap\limits_{i\geqslant 0} W^i_{\mathbf{E}}$.

(c) On souhaite montrer l'inclusion réciproque : $\bigcap\limits_{i\geqslant 0} W^i_{\mathbf{E}} \subseteq W_{\mathbf{E}}$.

Pour cela, on prend un sommet $v \in \bigcap\limits_{i\geqslant 0} W^i_{\mathbf{E}}$ et pour tout i, on considère une stratégie ψ_i sans mémoire pour Eve dans $\mathbb{G}_i$. On ordonne l'ensemble V en une suite de sommets $(v_j)_{j\geqslant 0}$ de hauteur de pile *croissante*. Proposer une construction à partir des ψ_i d'une stratégie sans mémoire ψ qui soit gagnante pour Eve dans tout $\mathbb{G}_i$. Pour cela on définira ψ pour tout v_j par induction sur j, en s'assurant que pour tout j, ψ coïncide avec une infinité de ψ_i sur le domaine $\{v_k \mid k \leqslant j\}$. En déduire que cette même stratégie ψ est gagnante pour Eve dans le jeu $\mathbb{G}$ et donc qu'Eve possède une stratégie sans mémoire dans $\mathbb{G}$ depuis $W_{\mathbf{E}}$.

(d) Prouver qu'Adam possède une stratégie sans mémoire dans $\mathbb{G}$ depuis $W_{\mathbf{A}}$.

(e) Déduire de (c) et (d) que les ensembles de positions gagnantes dans $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}_s$ sont identiques et que les deux jeux admettent des stratégies sans mémoire pour les deux joueurs.

Question 2. Soit $\lambda = v_0 v_1 \cdots$ une partie dans $\mathcal{G}$. Un facteur $v_k \cdots v_{k+h}$ est une *bosse bouclante* si $v_k = v_{k+h}$ et $|v_k| \leqslant |v_{k+i}|$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant h$.

On considère maintenant la condition de gain Ω' sur $\mathcal{G}$ donnée par $\Omega' = \{\lambda \mid\ \lambda$ ne contient pas de bosse bouclante$\}$, et on note $\mathbb{G}' = (\mathcal{G}, \Omega')$.

(a) Soit v un sommet gagnant pour Eve dans $\mathbb{G}$. Montrer qu'il est aussi gagnant pour Eve dans $\mathbb{G}'$.

(b) Réciproquement, soit v un sommet gagnant pour Eve dans $\mathbb{G}'$. Montrer qu'il est aussi gagnant pour Eve dans $\mathbb{G}$.

Question 3. Proposer un jeu $\mathbb{G}''$ équipé d'une condition de sûreté et équivalent (en un sens à préciser) au jeu $\mathbb{G}'$. Pour cela, on enrichira l'alphabet de pile de sorte à détecter les bosses bouclantes .

En déduire que l'on peut résoudre le jeu $\mathbb{G}$. Quelle est la complexité de l'algorithme ainsi obtenu ?