
Jeux: premiers pas

Olivier SERRE

LIAFA, Université Paris 7 & CNRS.

serre@liafa.jussieu.fr

- Mise en bouche.
- Jeux : définitions de base.
- Jeux sur des graphes finis : condition d'accessibilité.
- Jeux sur des graphes finis : condition de Büchi.

MISE EN BOUCHE

Jeux et chocolat : Chomp

On dispose d'une tablette de chocolat dont le carré supérieur gauche est empoisonné.



Jeux et chocolat : Chomp

On dispose d'une tablette de chocolat dont le carré supérieur gauche est **empoisonné**.



Les joueurs (Eve et Adam) jouent à tour de rôle et Eve commence.

Jeux et chocolat : Chomp

On dispose d'une tablette de chocolat dont le carré supérieur gauche est **empoisonné**.



Les joueurs (Eve et Adam) jouent à tour de rôle et Eve commence. Un coup consiste à choisir un carré de chocolat et à le manger ainsi que tous les carrés qui sont à sa droite et en dessous de lui. Le joueur qui mange le carré empoisonné perd

Jeux et chocolat : Chomp

On dispose d'une tablette de chocolat dont le carré supérieur gauche est **empoisonné**.



Les joueurs (Eve et Adam) jouent à tour de rôle et Eve commence. Un coup consiste à choisir un carré de chocolat et à le manger ainsi que tous les carrés qui sont à sa droite et en dessous de lui. Le joueur qui mange le carré empoisonné perd (et meurt dans d'**atroces** souffrances).

Jeux et chocolat : Chomp

On dispose d'une tablette de chocolat dont le carré supérieur gauche est **empoisonné**.

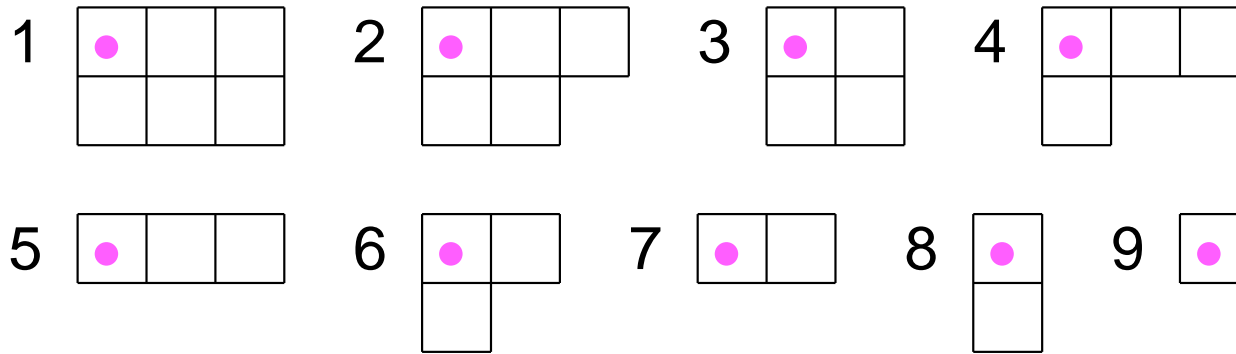


Les joueurs (Eve et Adam) jouent à tour de rôle et Eve commence. Un coup consiste à choisir un carré de chocolat et à le manger ainsi que tous les carrés qui sont à sa droite et en dessous de lui. Le joueur qui mange le carré empoisonné perd (et meurt dans d'**atroces** souffrances).

Qui gagne ???

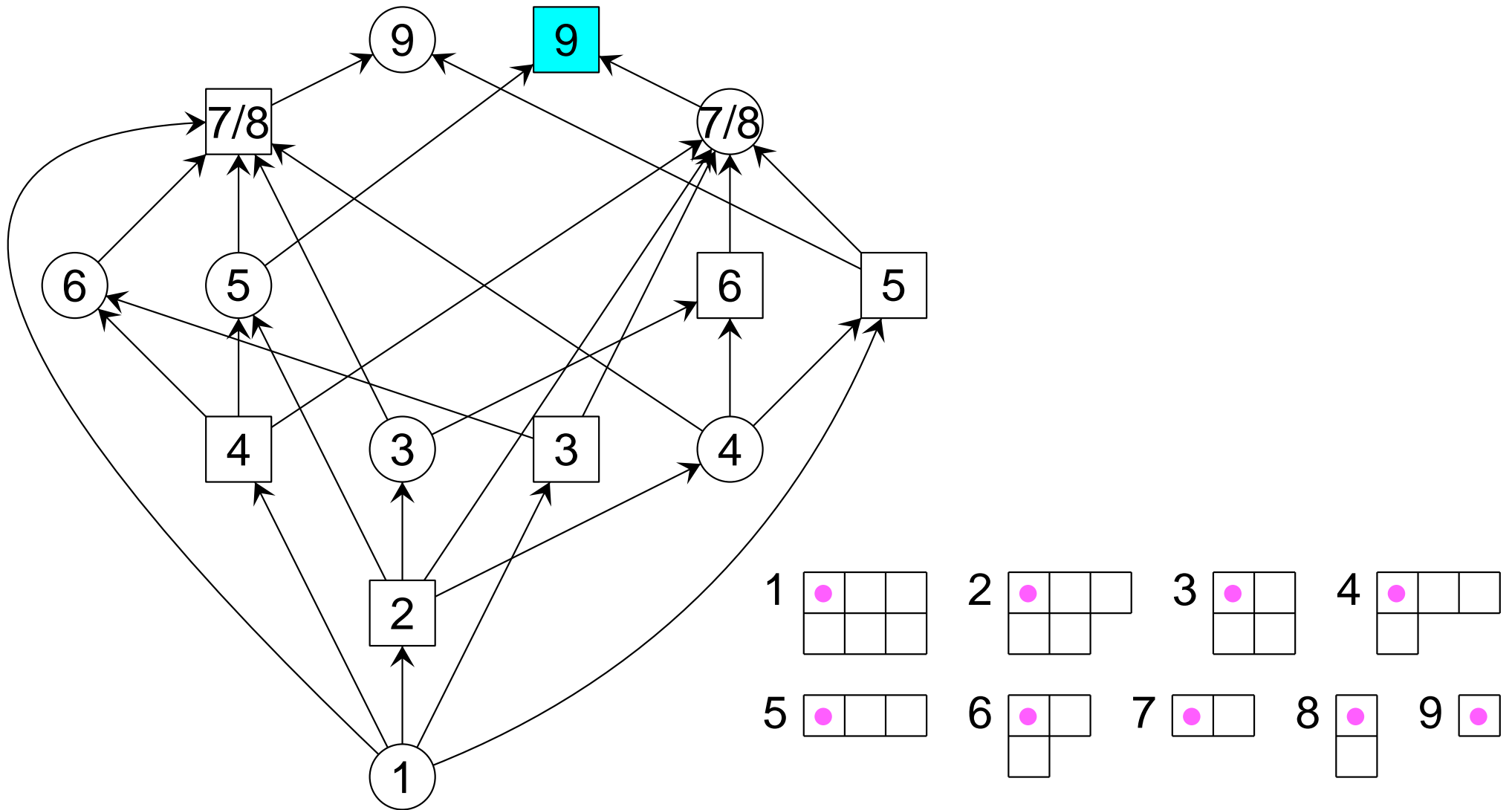
Modélisation du jeu 3×2

Configurations possibles :



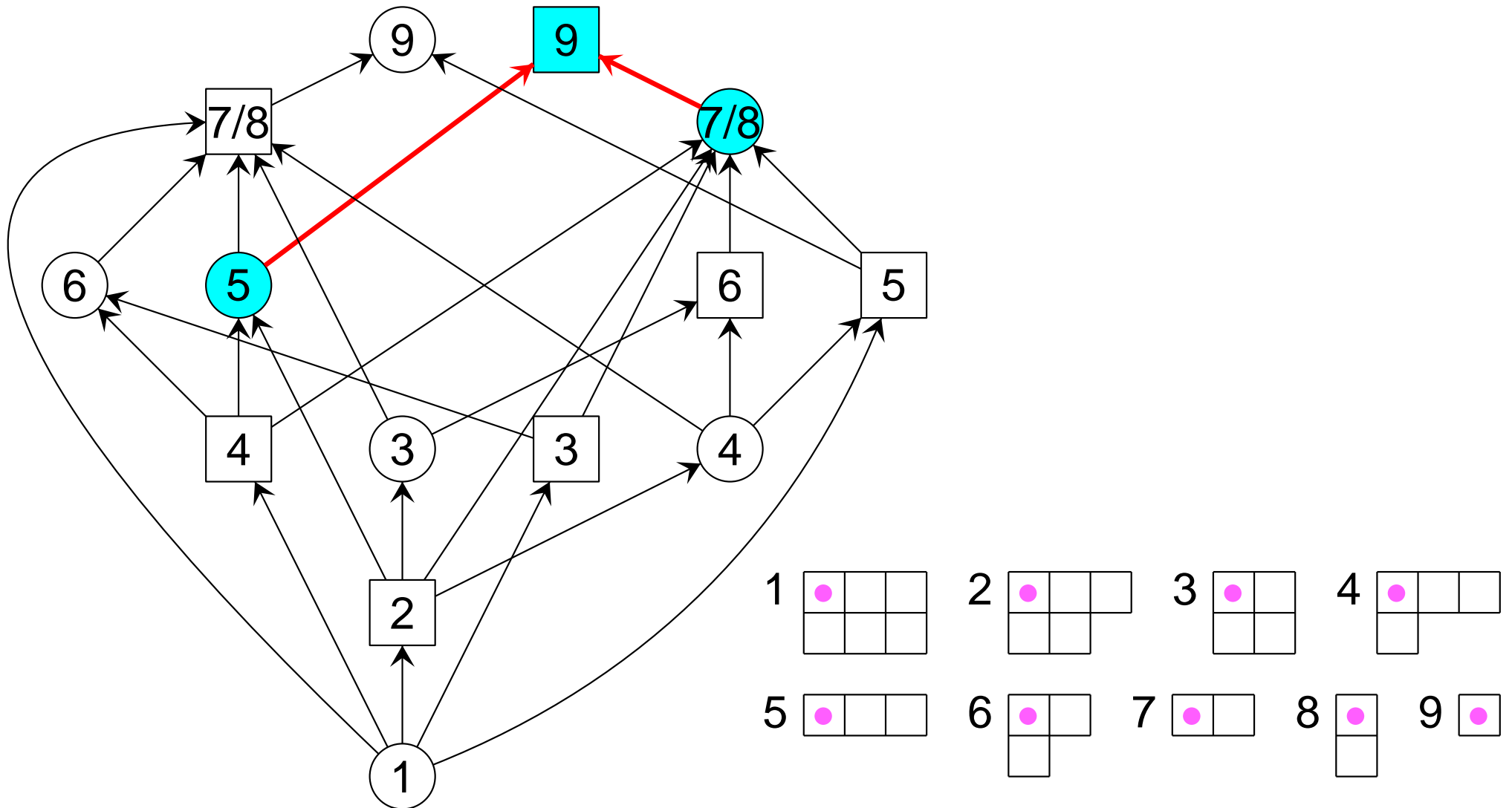
Modélisation du jeu 3×2

Graphe de jeu associé :



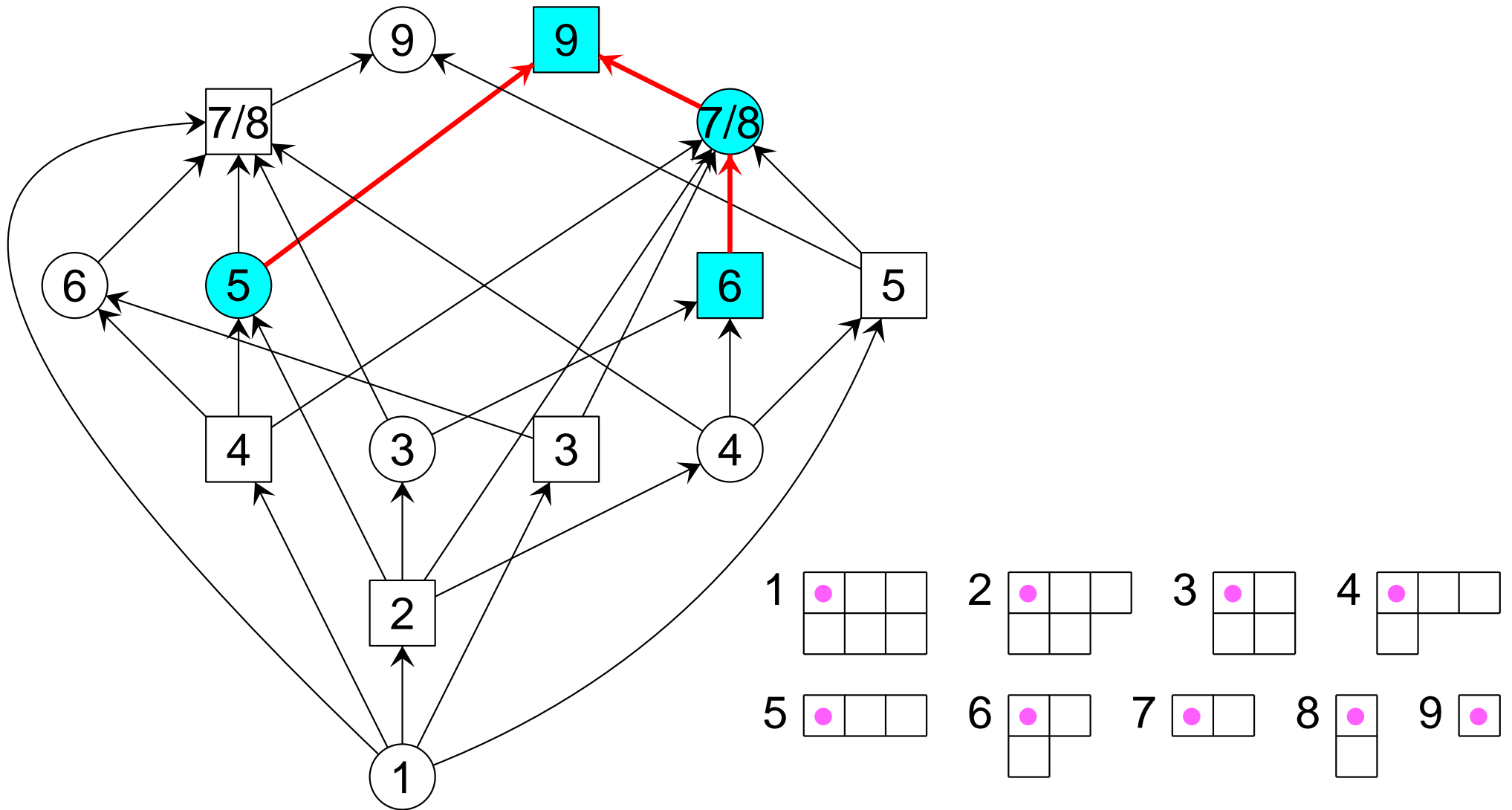
Modélisation du jeu 3×2

Graphe de jeu associé :



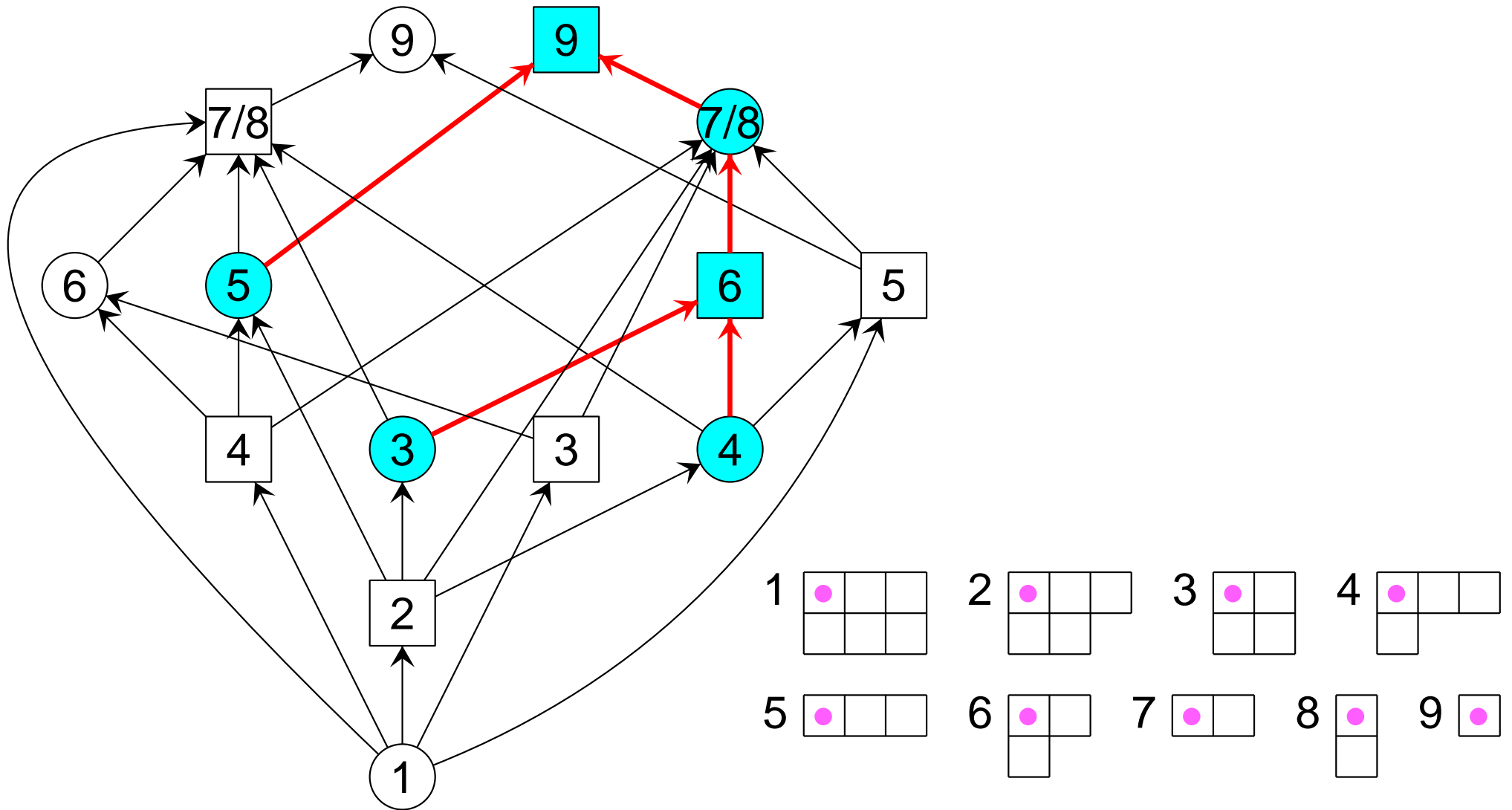
Modélisation du jeu 3×2

Graphe de jeu associé :



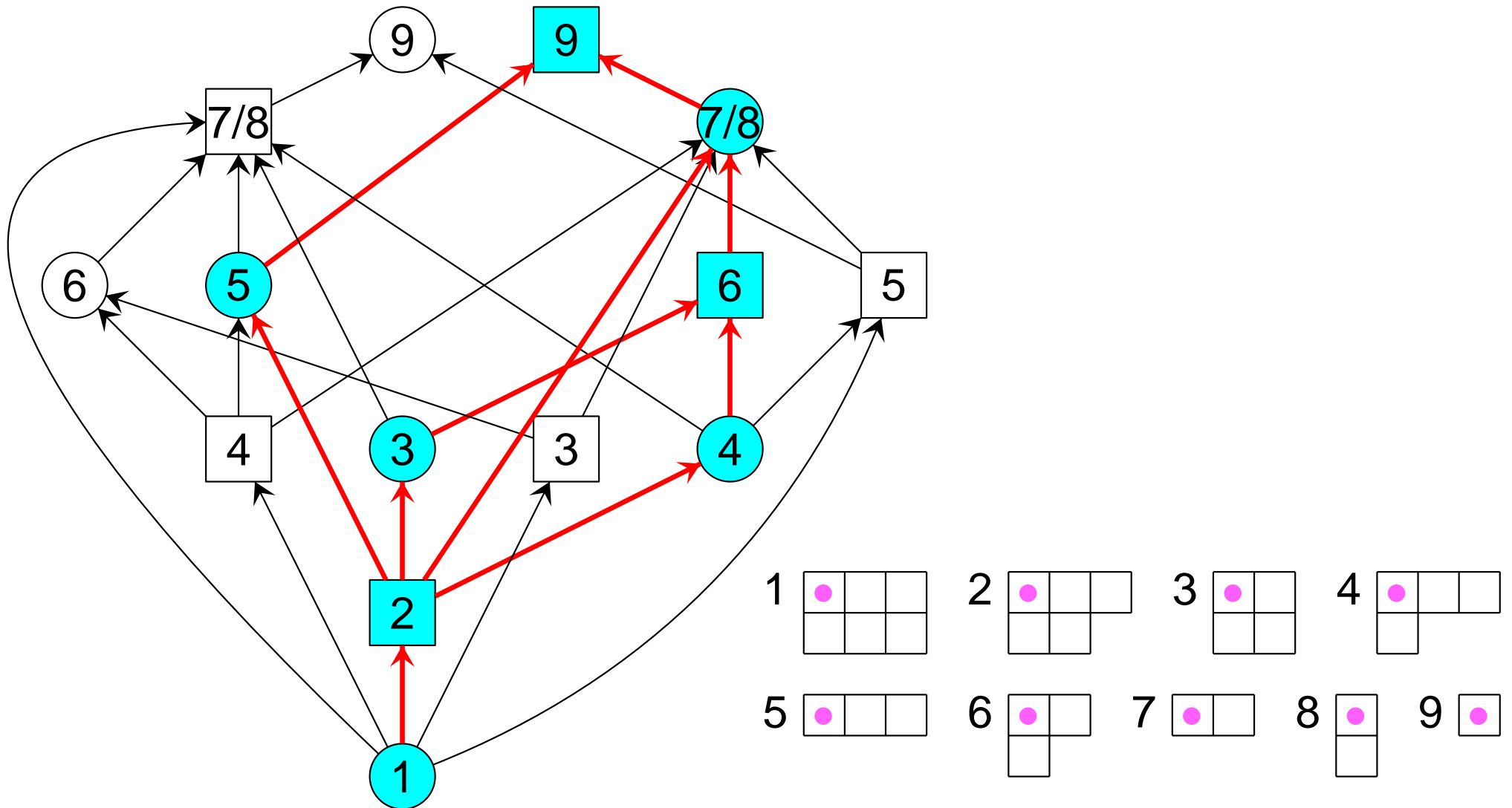
Modélisation du jeu 3×2

Graphe de jeu associé :



Modélisation du jeu 3×2

Graphe de jeu associé :



Qui gagne dans le cas général ?

JEUX : DÉFINITIONS DE BASE

Aujourd'hui :

Aujourd'hui :

- 2 joueurs : Eve et Adam.

Aujourd'hui :

- 2 joueurs : Eve et Adam.
- Information **complète** : tout le monde voit tout (et non incomplète comme dans les jeux de cartes).

Aujourd'hui :

- 2 joueurs : Eve et Adam.
- Information **complète** : tout le monde voit tout (et non incomplète comme dans les jeux de cartes).
- Jeux **alternés** : les joueurs jouent à tour de rôle (et non simultanément comme dans *pierre, papier, ciseaux*).

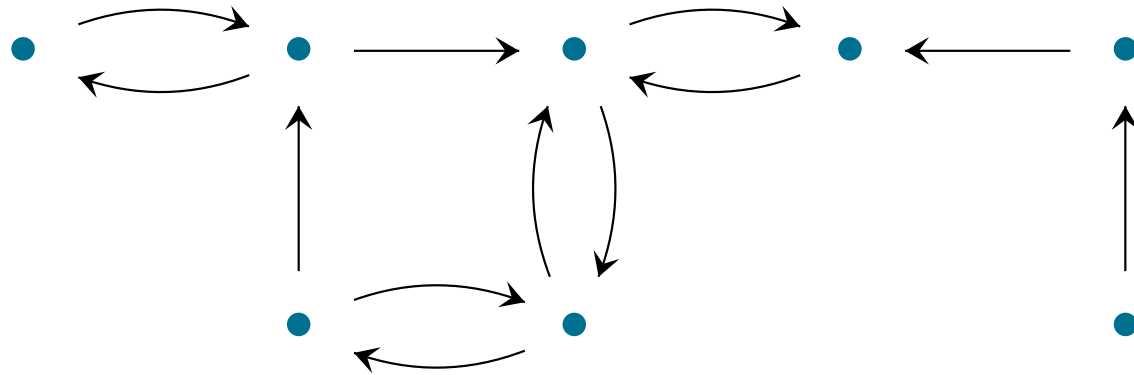
Aujourd'hui :

- 2 joueurs : Eve et Adam.
- Information **complète** : tout le monde voit tout (et non incomplète comme dans les jeux de cartes).
- Jeux **alternés** : les joueurs jouent à tour de rôle (et non simultanément comme dans *pierre, papier, ciseaux*).
- Jeux **non randomisés** : pas de hasard.

Qu'est ce qu'un jeu ? La recette

Ingrédients :

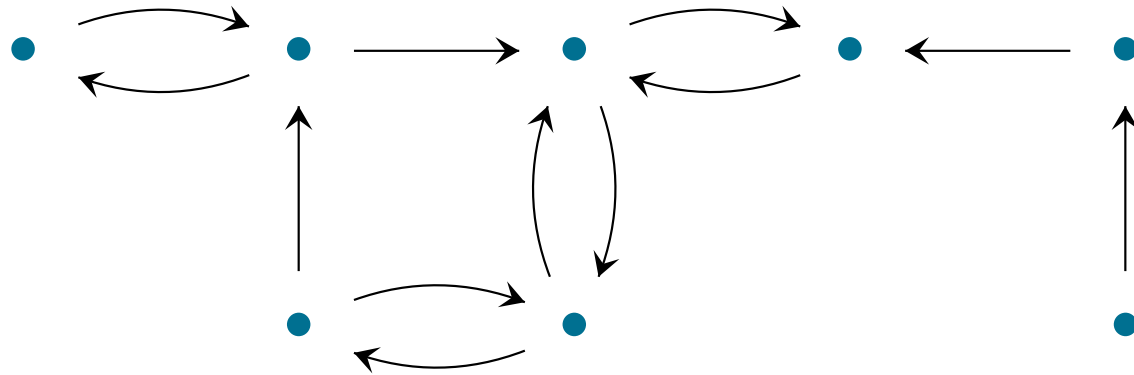
● Un graphe.



Qu'est ce qu'un jeu ? La recette

Ingrédients :

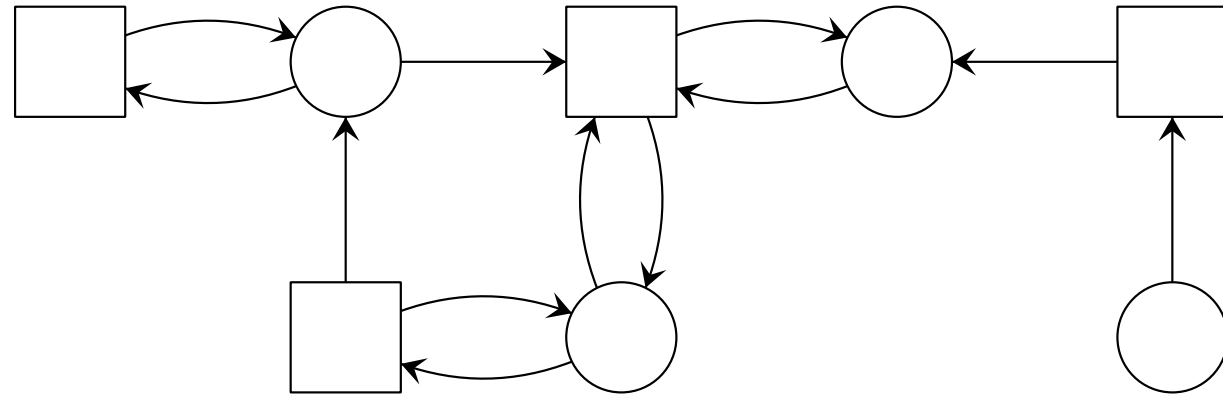
- Un graphe.
- Deux joueurs : Eve et Adam.



Qu'est ce qu'un jeu ? La recette

Ingrédients :

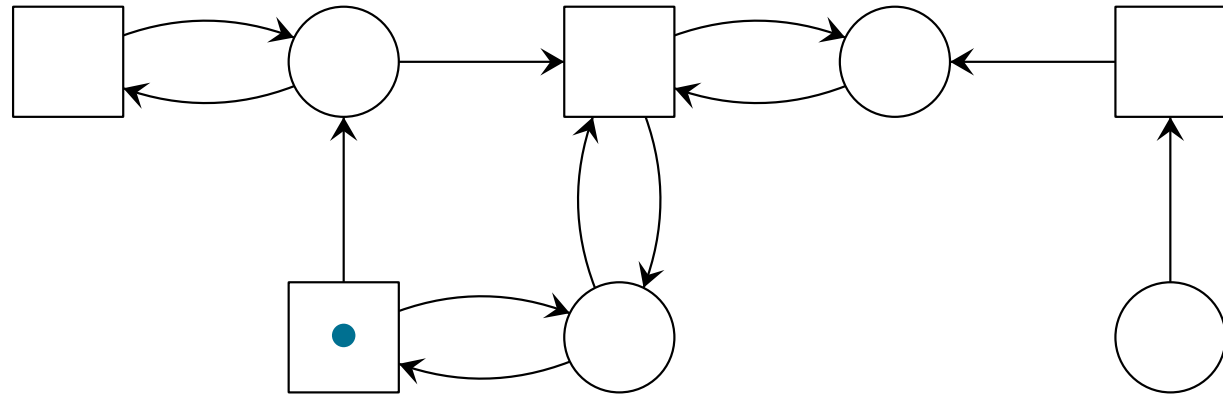
- Un graphe.
- Deux joueurs : Eve (○) et Adam (□). **Bien mélanger !**



Qu'est ce qu'un jeu ? La recette

Ingrédients :

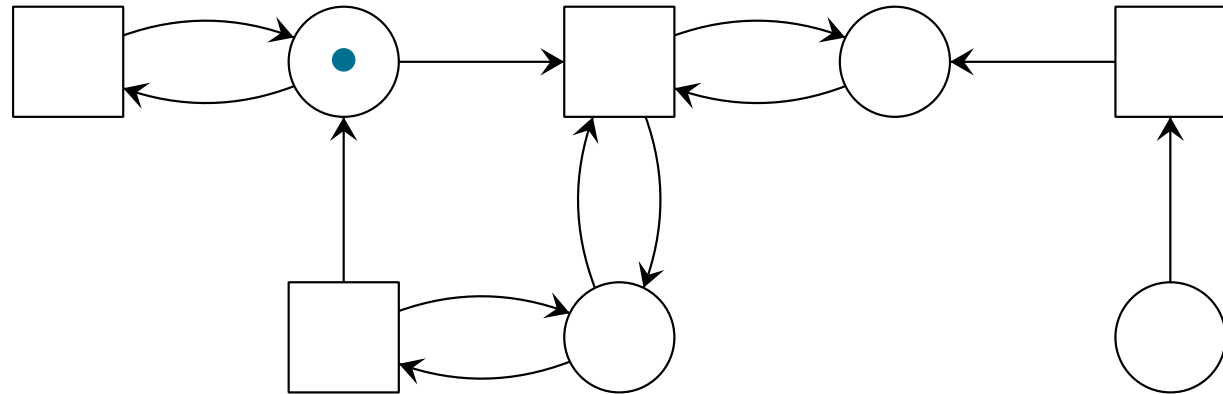
- Un graphe.
- Deux joueurs : Eve et Adam.
- Déroulement d'une partie : déplacement d'un jeton.



Qu'est ce qu'un jeu ? La recette

Ingrédients :

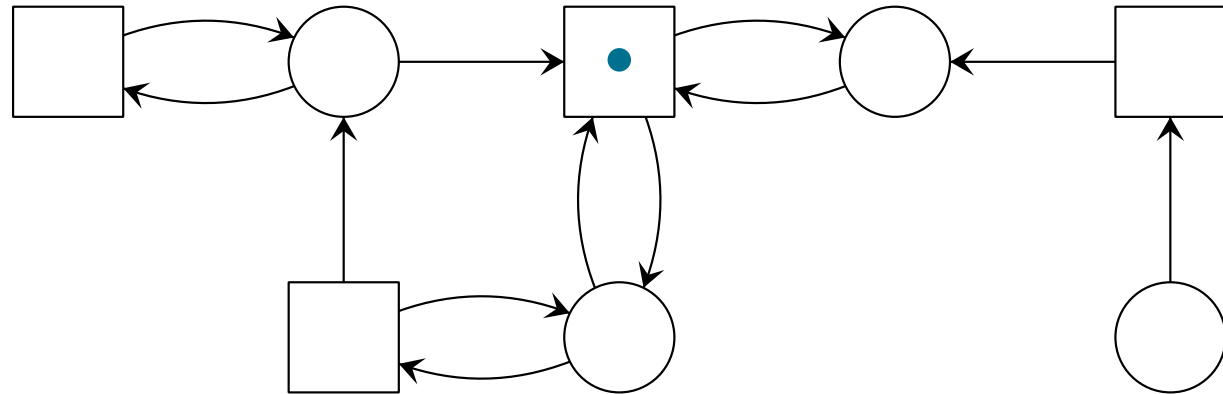
- Un graphe.
- Deux joueurs : Eve et Adam.
- Déroulement d'une partie : déplacement d'un jeton.



Qu'est ce qu'un jeu ? La recette

Ingrédients :

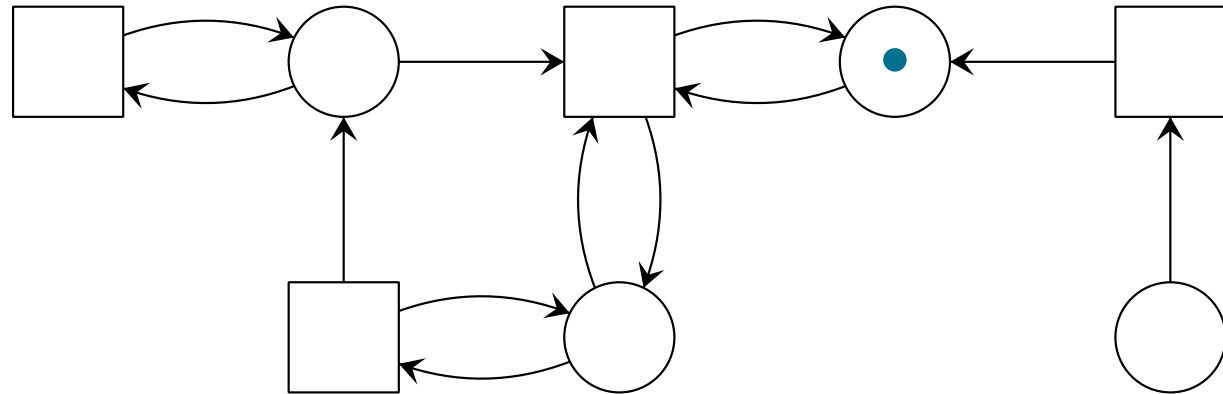
- Un graphe.
- Deux joueurs : Eve et Adam.
- Déroulement d'une partie : déplacement d'un jeton.



Qu'est ce qu'un jeu ? La recette

Ingrédients :

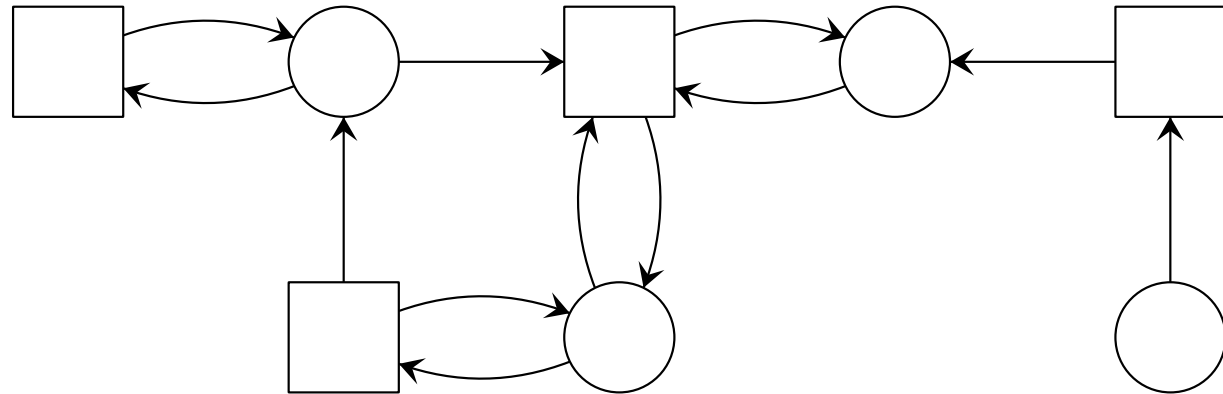
- Un graphe.
- Deux joueurs : Eve et Adam.
- Déroulement d'une partie : déplacement d'un jeton.



Qu'est ce qu'un jeu ? La recette

Ingrédients :

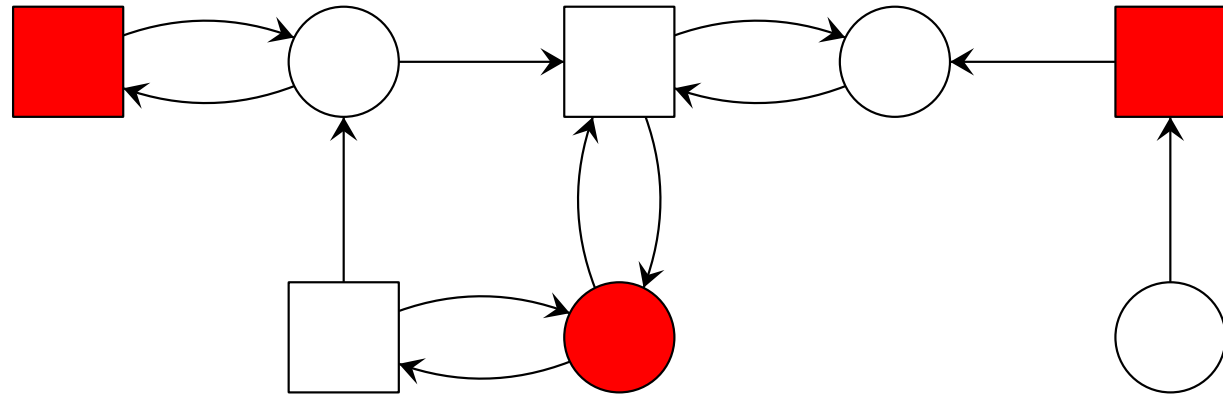
- Un graphe.
- Deux joueurs : Eve et Adam.
- Déroulement d'une partie : déplacement d'un jeton.
- Une condition de gain.



Qu'est ce qu'un jeu ? La recette

Ingrédients :

- Un graphe.
- Deux joueurs : Eve et Adam.
- Déroulement d'une partie : déplacement d'un jeton.
- Une condition de gain. **Exemple : accessibilité.**

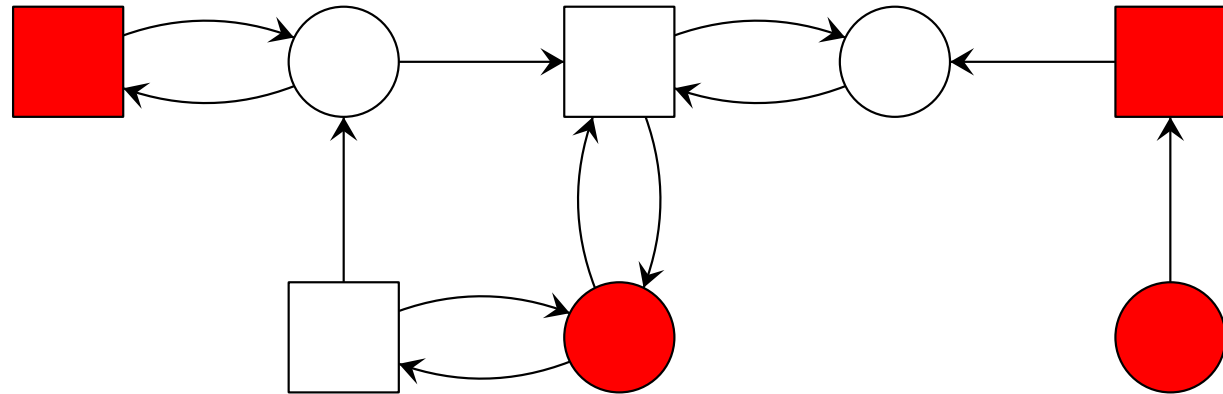


Eve gagne ssi un état final est visité.

Qu'est ce qu'un jeu ? La recette

Ingrédients :

- Un graphe.
- Deux joueurs : Eve et Adam.
- Déroulement d'une partie : déplacement d'un jeton.
- Une condition de gain. **Exemple : Büchi.**

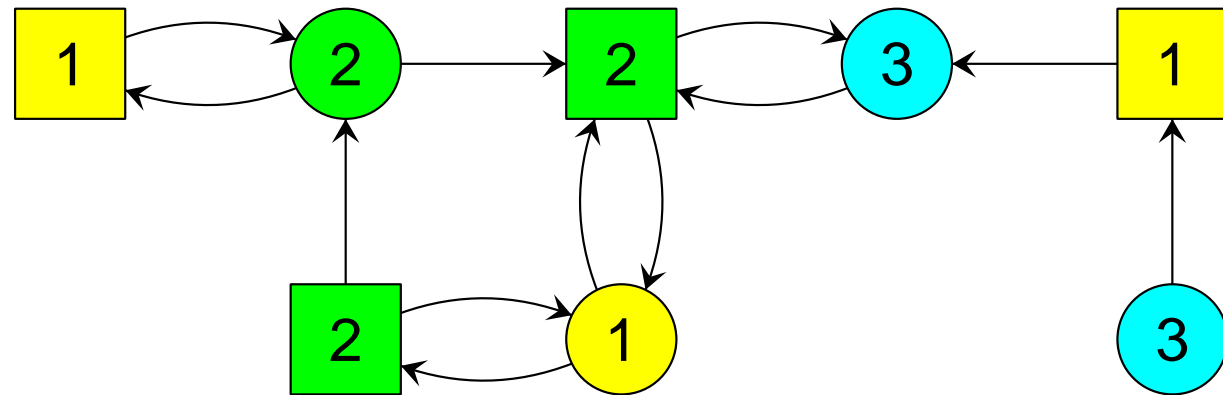


Eve gagne ssi une infinité d'état finaux est visitée.

Qu'est ce qu'un jeu ? La recette

Ingrédients :

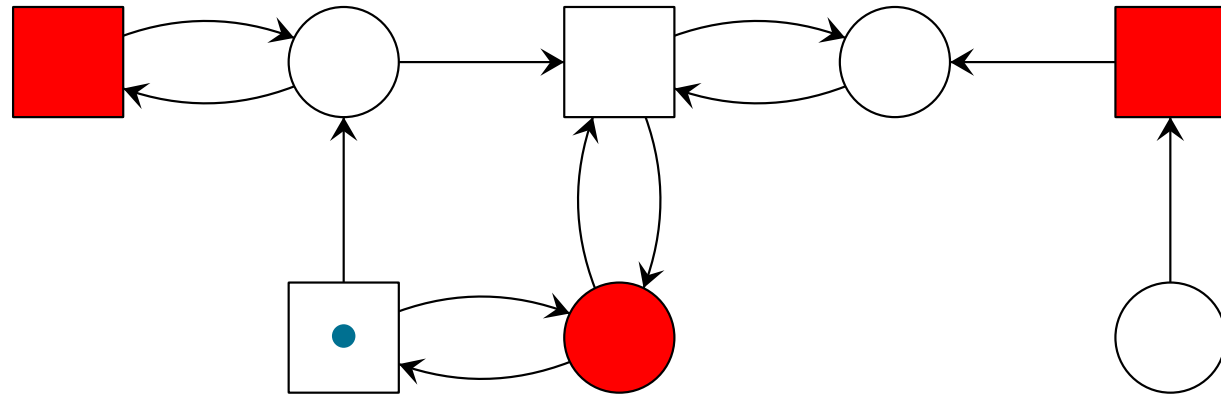
- Un graphe.
- Deux joueurs : Eve et Adam.
- Déroulement d'une partie : déplacement d'un jeton.
- Une condition de gain. **Exemple : parité.**



Eve gagne ssi la plus grande couleur infiniment répétée est paire.

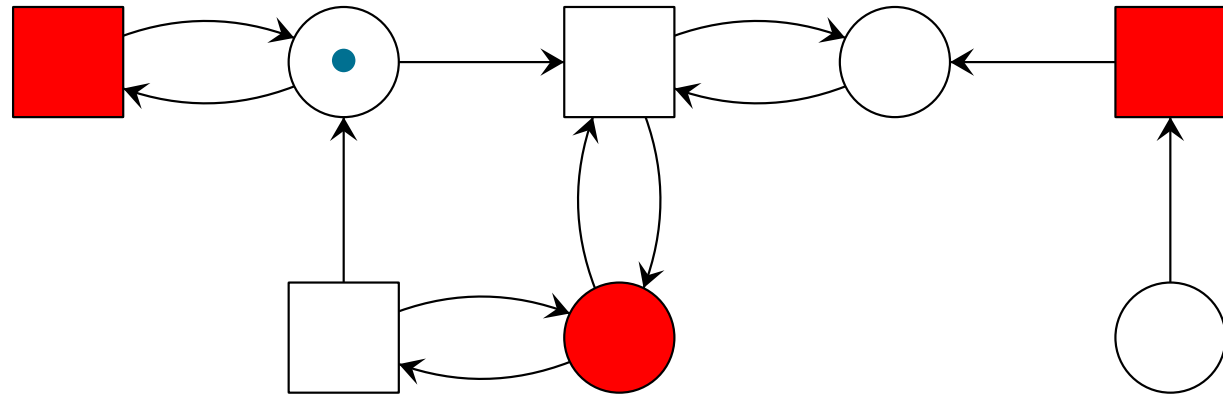
Déroulement d'une partie : exemple

Condition de gain : **accessibilité**.



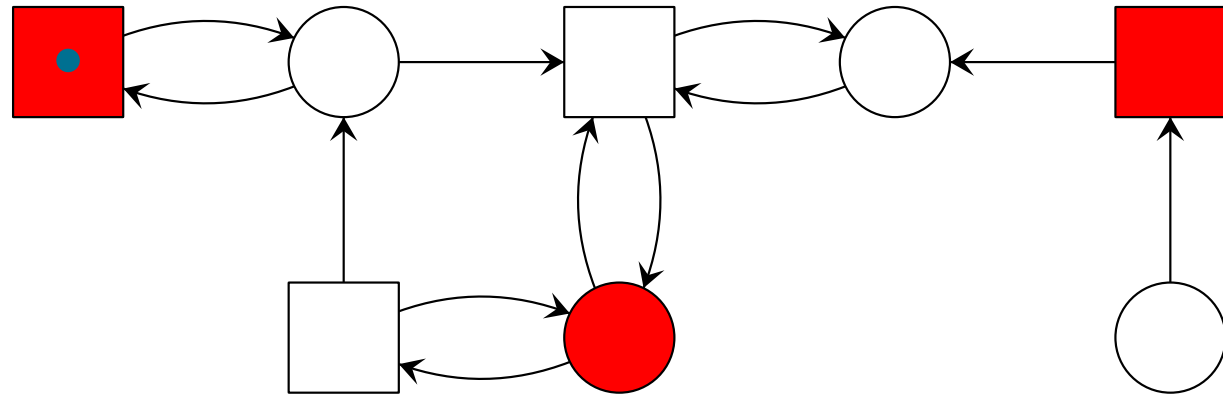
Déroulement d'une partie : exemple

Condition de gain : **accessibilité**.



Déroulement d'une partie : exemple

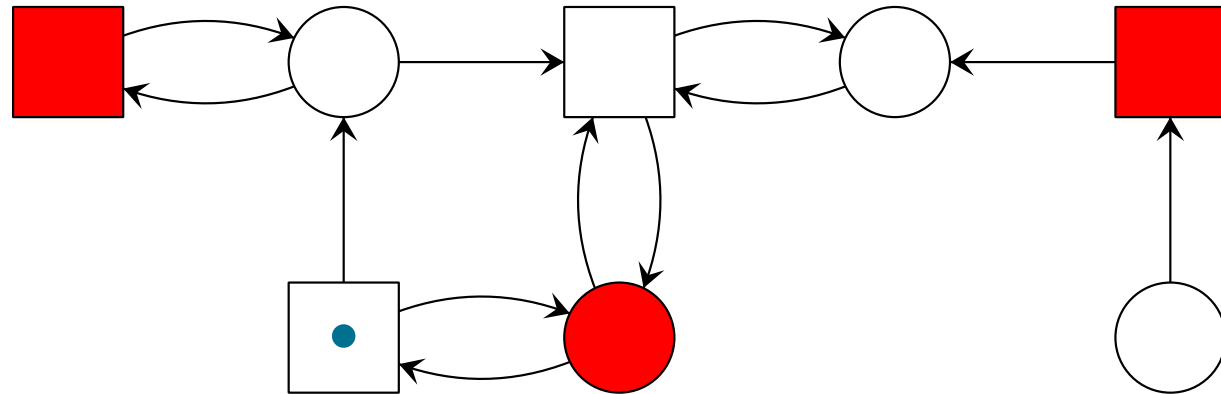
Condition de gain : **accessibilité**.



Eve gagne !

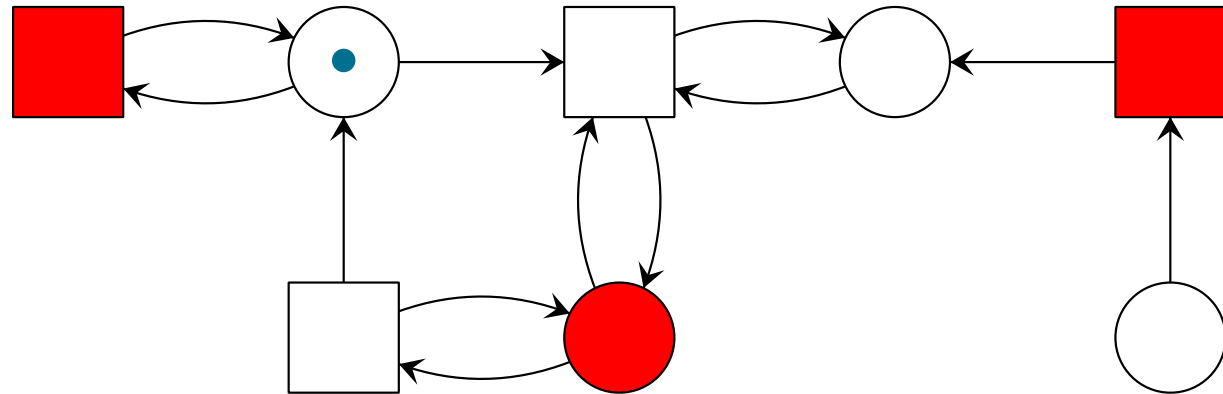
Déroulement d'une partie : exemple

Condition de gain : **accessibilité**.



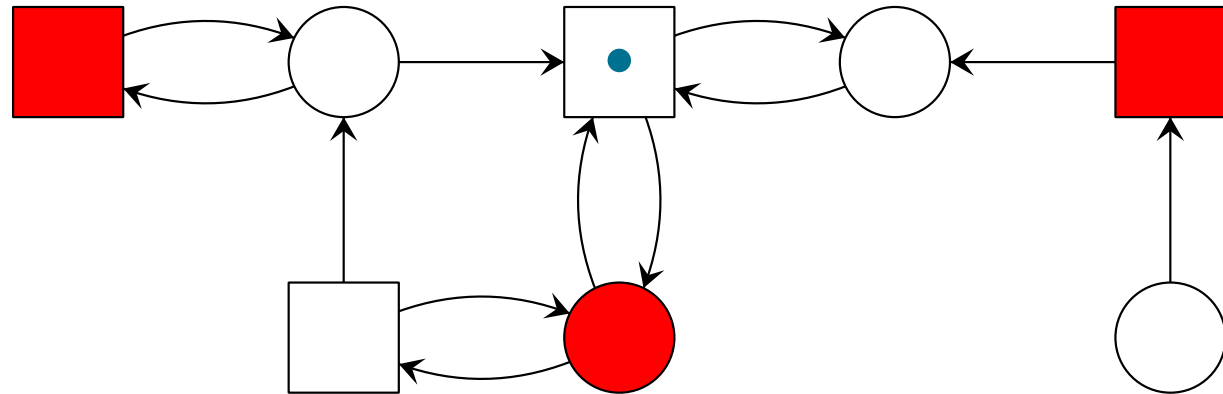
Déroulement d'une partie : exemple

Condition de gain : **accessibilité**.



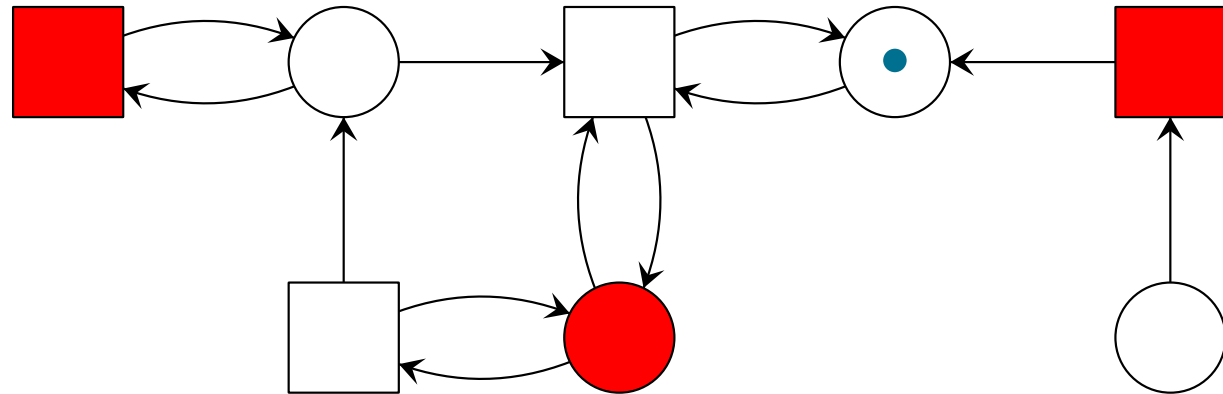
Déroulement d'une partie : exemple

Condition de gain : **accessibilité**.



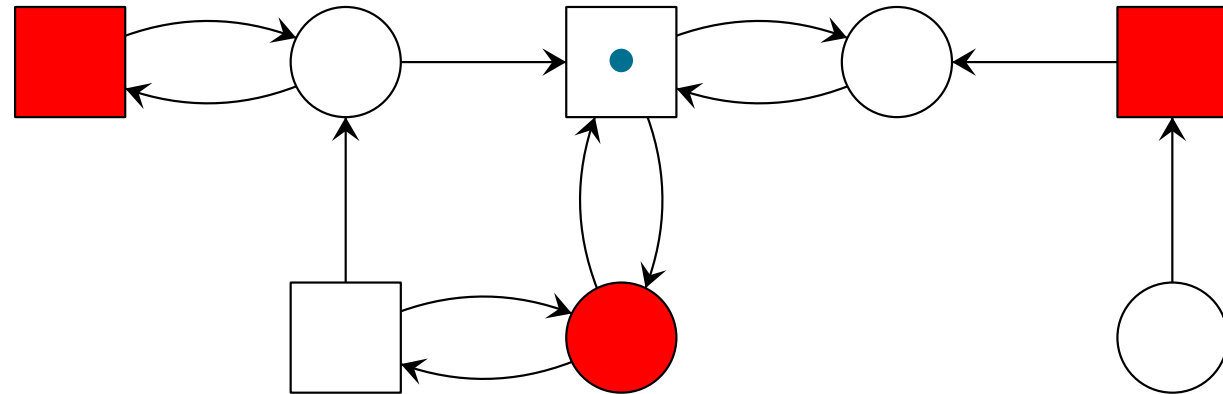
Déroulement d'une partie : exemple

Condition de gain : **accessibilité**.



Déroulement d'une partie : exemple

Condition de gain : **accessibilité**.



Partie infinie gagnée par Adam !

Notion de base :

- Graphe (étiqueté ou non), graphe de jeu.

Notion de base :

- Graphe (étiqueté ou non), graphe de jeu.
- Condition de gain.

Notion de base :

- Graphe (étiqueté ou non), graphe de jeu.
- Condition de gain.
- Jeu, partie.

Conditions de gain :

- Interne/externe.

Conditions de gain :

- Interne/externe.

- Condition duale.

Conditions de gain :

- Interne/externe.
- Condition duale.
- Quelques exemples.

Stratégies, positions gagnantes :

- Stratégie.

Stratégies, positions gagnantes :

- Stratégie.
- Stratégie gagnante.

Stratégies, positions gagnantes :

- Stratégie.
- Stratégie gagnante.
- Positions gagnantes.

Question centrale : Etant donné un jeu \mathbb{G} , quelles sont les positions gagnantes (W_E) pour Eve ? pour Adam (W_A) ?

Question centrale : Etant donné un jeu \mathbb{G} , quelles sont les positions gagnantes (W_E) pour Eve ? pour Adam (W_A) ?

Jeu déterminé : $W_E \cup W_A = V$.

Question centrale : Etant donné un jeu \mathbb{G} , quelles sont les positions gagnantes (W_E) pour Eve ? pour Adam (W_A) ?

Jeu déterminé : $W_E \cup W_A = V$.

Où l'on parle de topologie...

Th. de Martin (75) : tout jeu borélien est déterminé.

Question centrale : Etant donné un jeu \mathbb{G} , quelles sont les positions gagnantes (W_E) pour Eve ? pour Adam (W_A) ?

Jeu déterminé : $W_E \cup W_A = V$.

Où l'on parle de topologie...

Th. de Martin (75) : tout jeu borélien est déterminé.

Corollaire. *Tous les jeux que nous considérerons seront déterminés :*

● Accessibilité

Question centrale : Etant donné un jeu \mathbb{G} , quelles sont les positions gagnantes (W_E) pour Eve ? pour Adam (W_A) ?

Jeu déterminé : $W_E \cup W_A = V$.

Où l'on parle de topologie...

Th. de Martin (75) : tout jeu borélien est déterminé.

Corollaire. *Tous les jeux que nous considérerons seront déterminés :*

- Accessibilité
- Büchi

Question centrale : Etant donné un jeu \mathbb{G} , quelles sont les positions gagnantes (W_E) pour Eve ? pour Adam (W_A) ?

Jeu déterminé : $W_E \cup W_A = V$.

Où l'on parle de topologie...

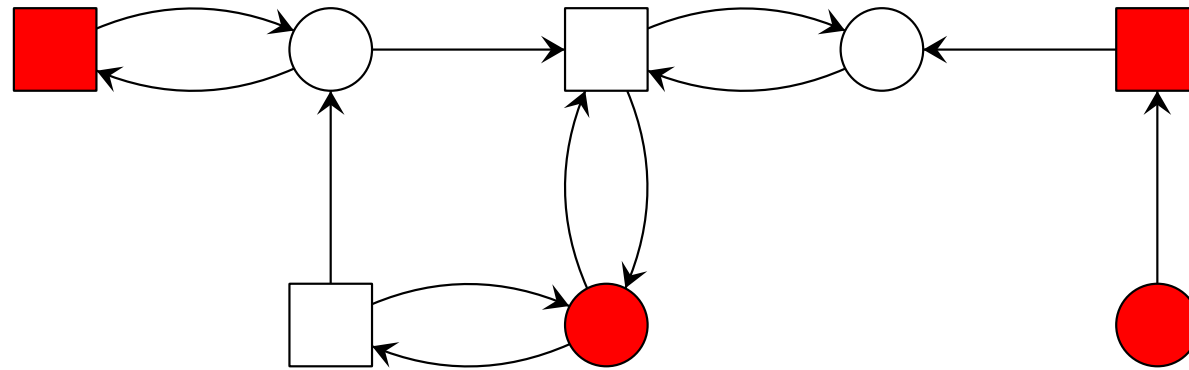
Th. de Martin (75) : tout jeu borélien est déterminé.

Corollaire. *Tous les jeux que nous considérerons seront déterminés :*

- Accessibilité
- Büchi
- Parité...

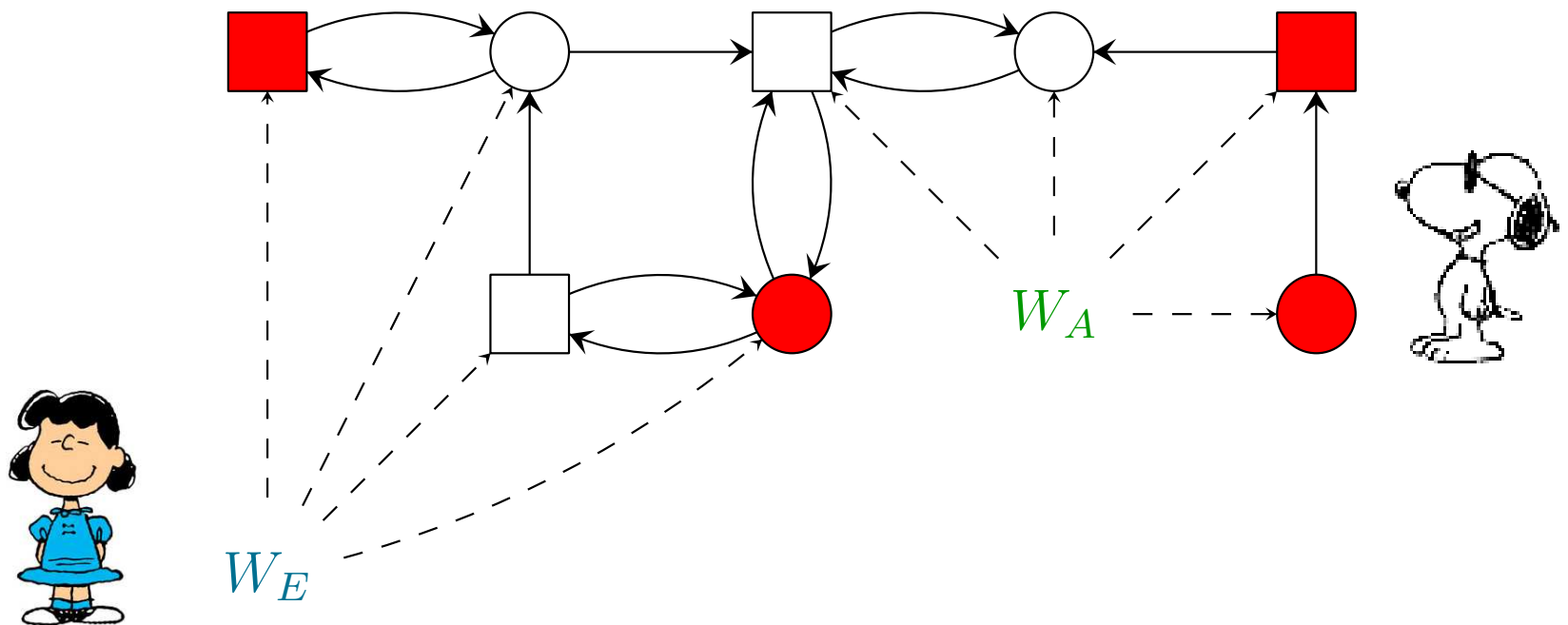
Positions gagnantes : exemple

Condition de gain : Büchi.



Positions gagnantes : exemple

Condition de gain : Büchi.



JEUX SUR DES GRAPHERS FINIS : CONDITION D'ACCESSIBILITÉ

Jeu d'accessibilité : résolution

Cadre :

- Graphe de jeu $\mathcal{G} = (V_E, V_A, E)$.
- $F \subseteq$: sommets **finaux**.
- \mathbb{G} : jeu d'accessibilité sur \mathcal{G}

Cadre :

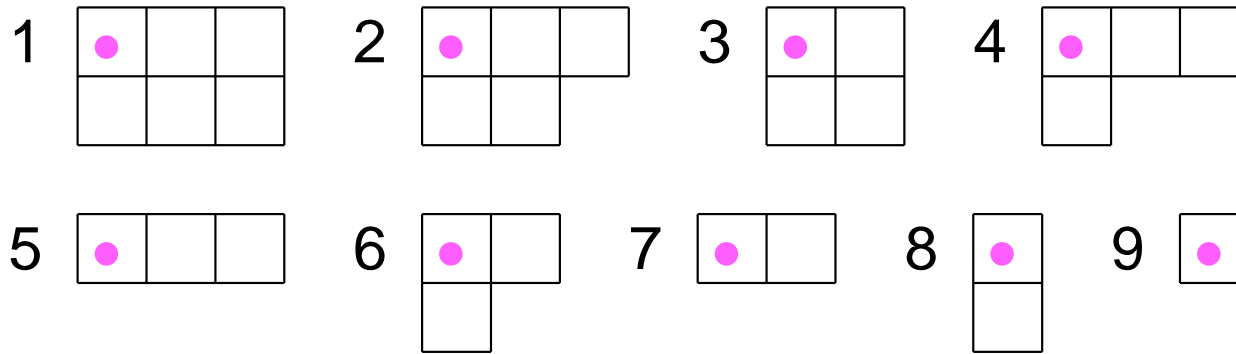
- Graphe de jeu $\mathcal{G} = (V_E, V_A, E)$.
- $F \subseteq V$: sommets **finaux**.
- \mathbb{G} : jeu d'accessibilité sur \mathcal{G}

Questions :

- Etant donné $v \in V$, décider si $v \in V_E$.
- Plus généralement, calculer W_E .
- Enfin, trouver des stratégies gagnantes.

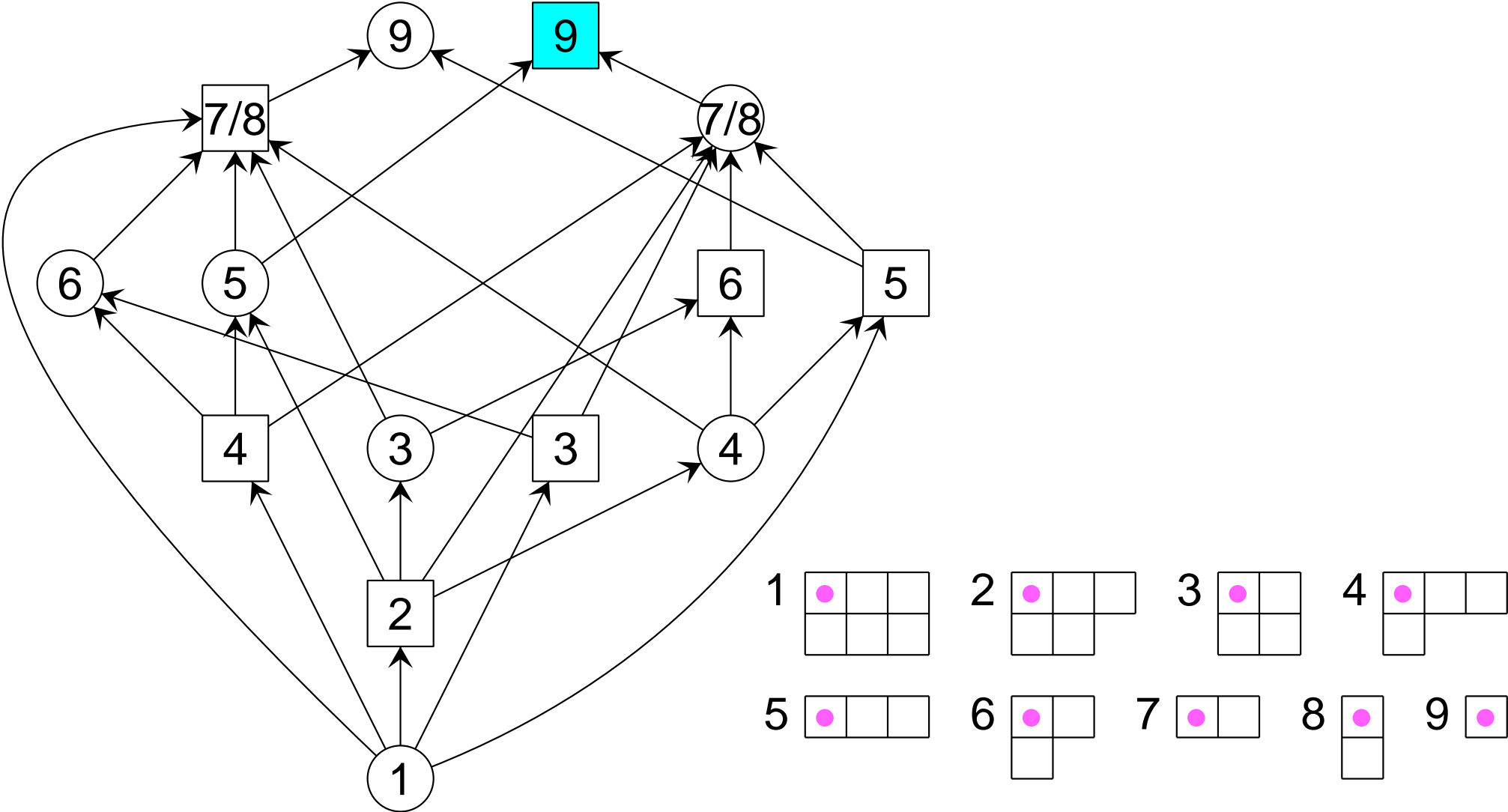
Où l'on se rappelle du chocolat...

Configurations possibles :



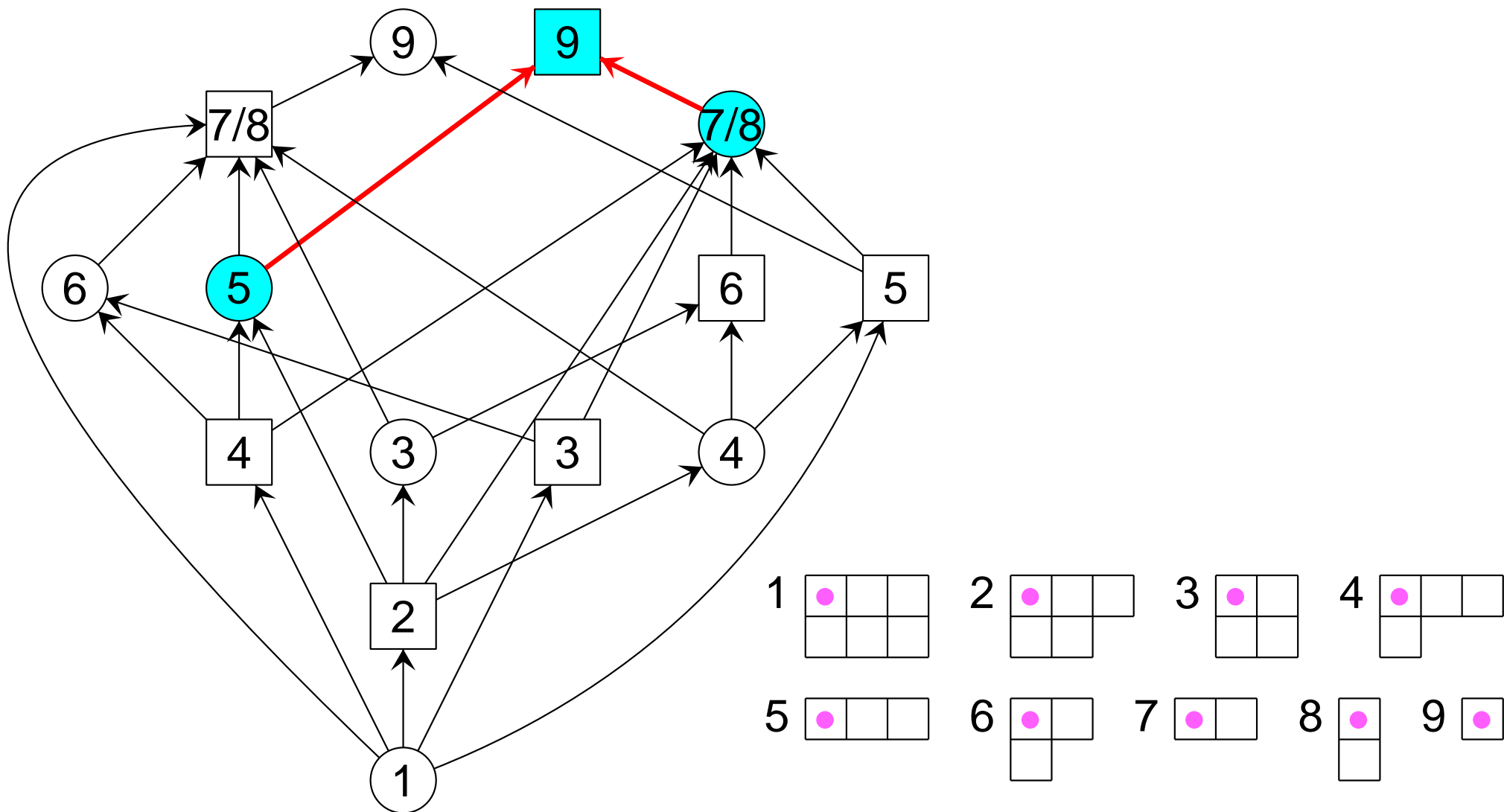
Où l'on se rappelle du chocolat...

Graphe de jeu associé :



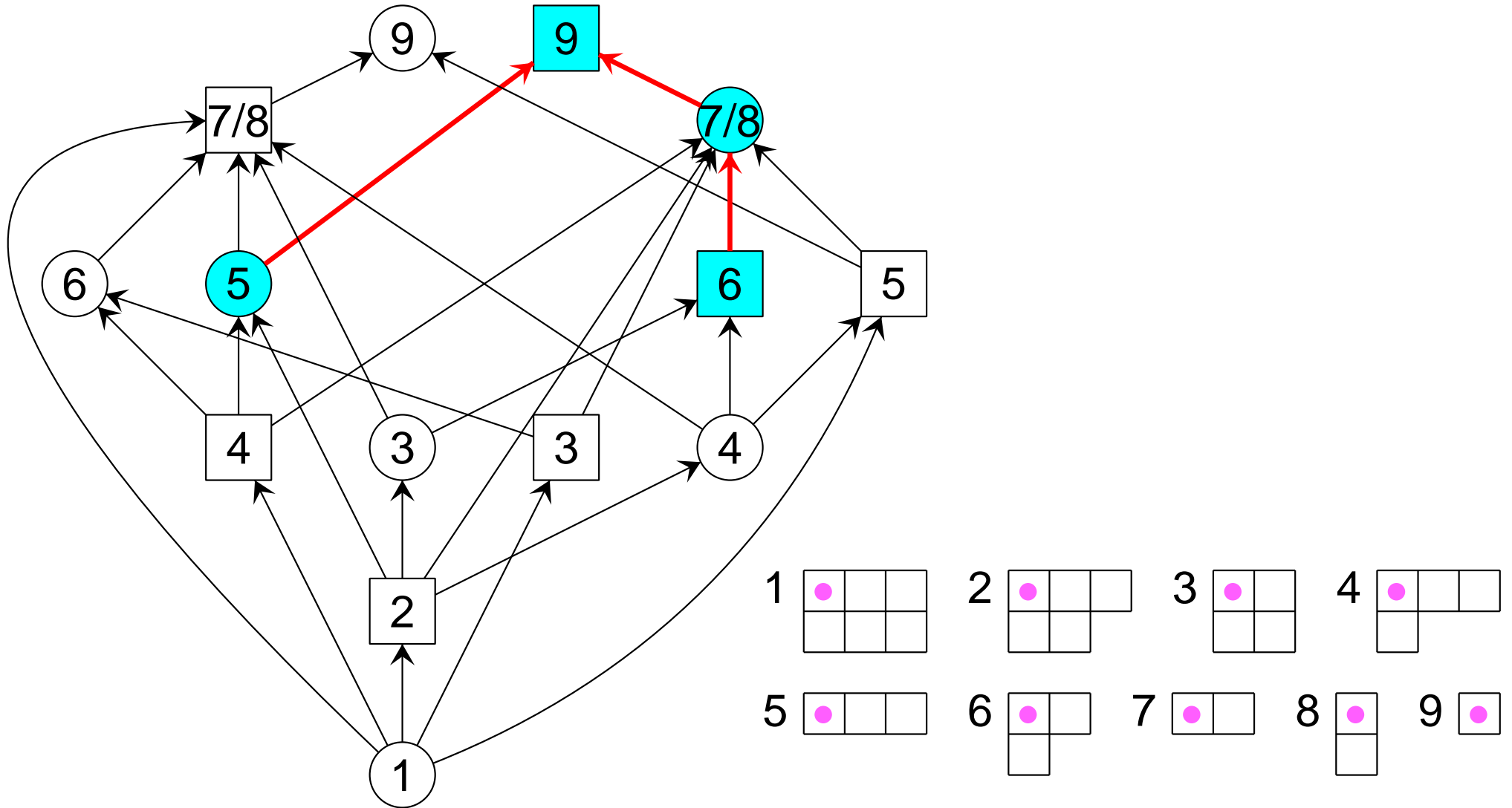
Où l'on se rappelle du chocolat...

Graphe de jeu associé :



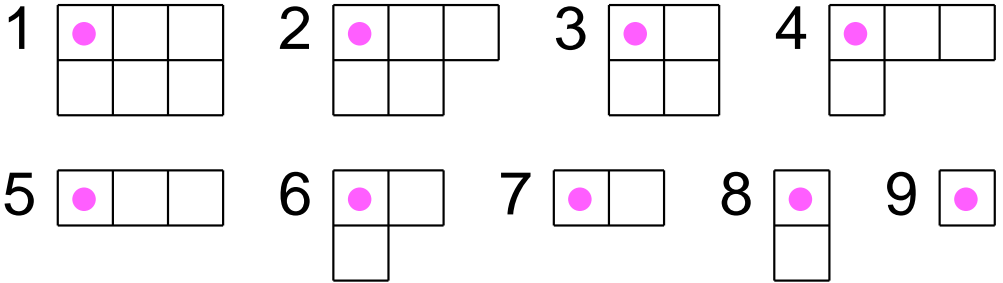
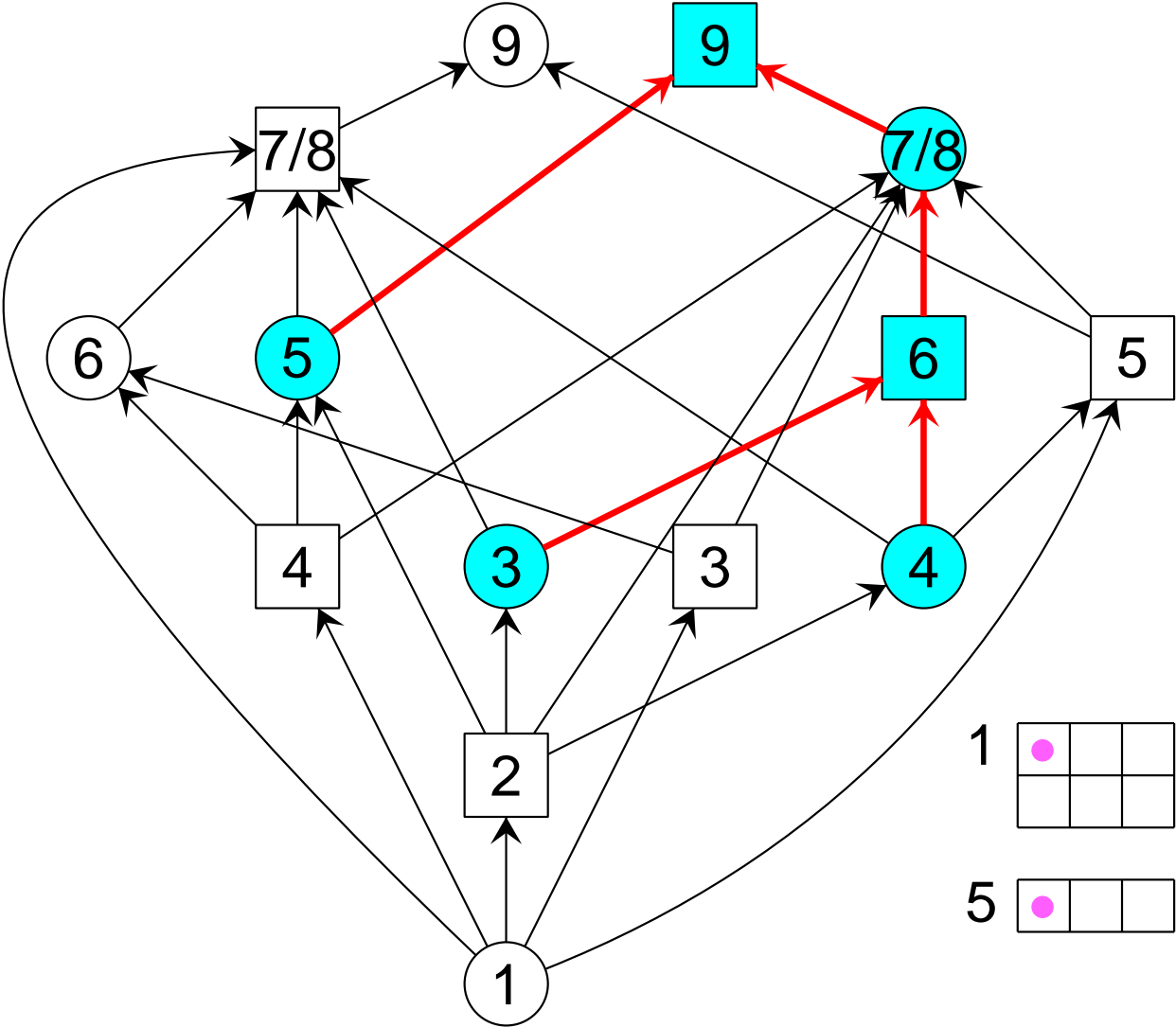
Où l'on se rappelle du chocolat...

Graphe de jeu associé :



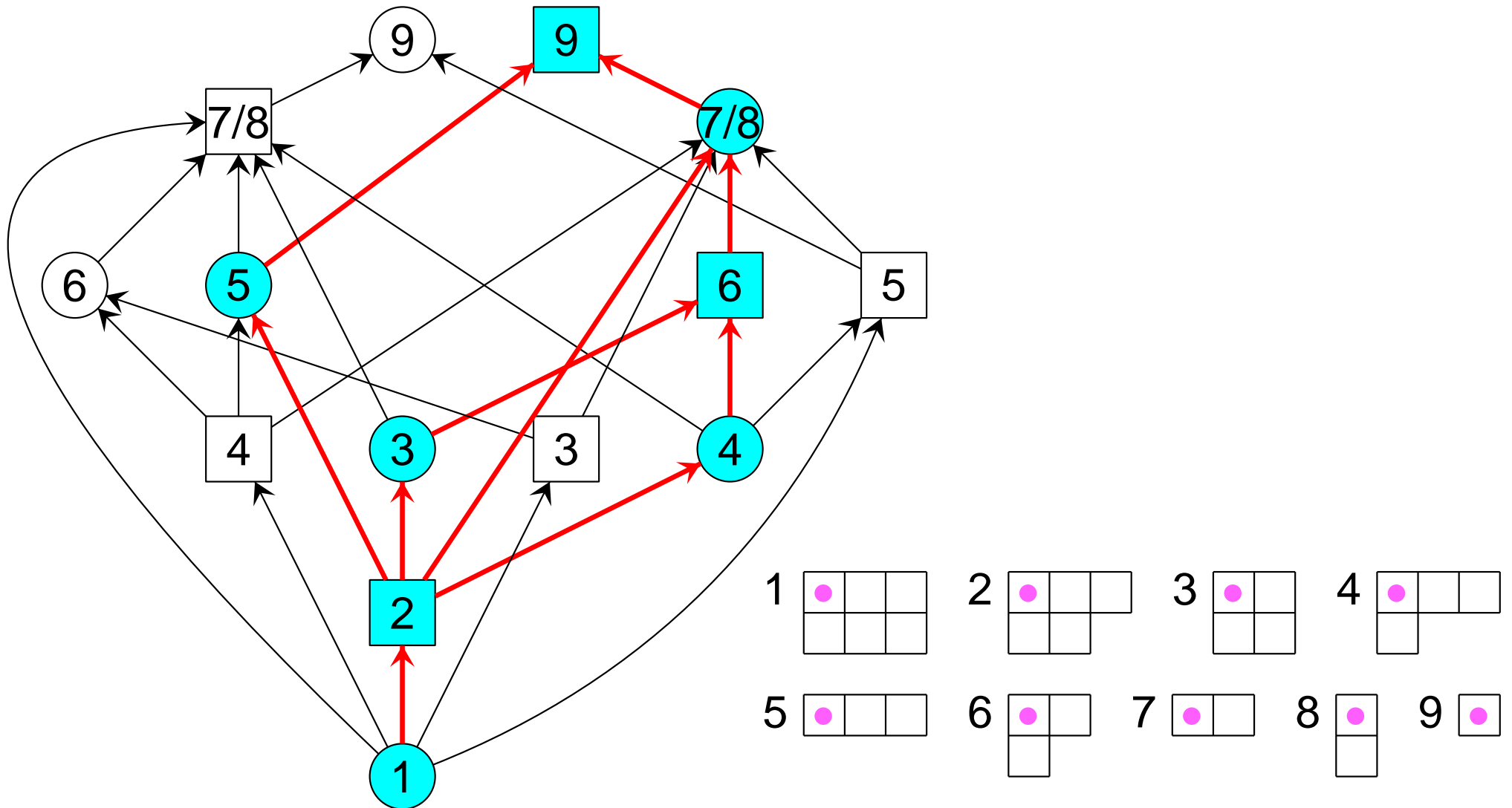
Où l'on se rappelle du chocolat...

Graphe de jeu associé :



Où l'on se rappelle du chocolat...

Graphe de jeu associé :



Jeu d'accessibilité : résolution

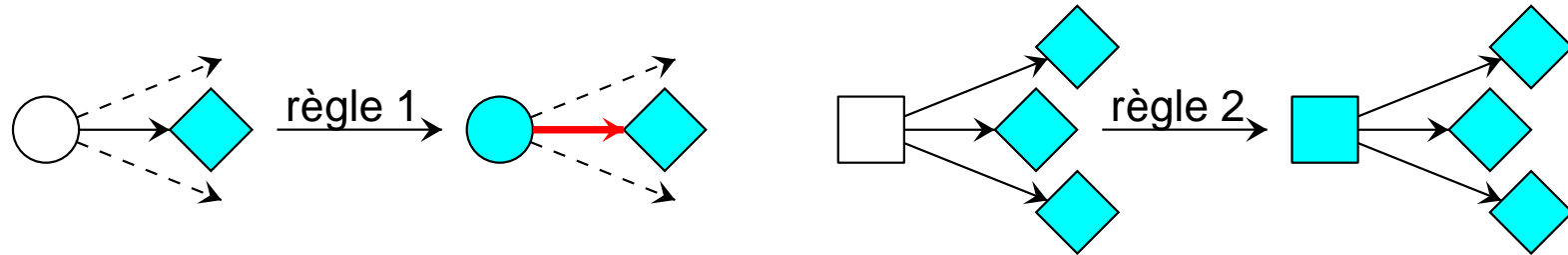
Initialisation : les sommets finaux sont gagnants pour Eve.

Jeu d'accessibilité : résolution

Initialisation : les sommets finaux sont gagnants pour Eve.

Induction :

1. Un sommet d'Eve depuis lequel part un arc vers un sommet gagnant est aussi gagnant. Une stratégie pour Eve depuis ce sommet consiste à aller vers le sommet gagnant et à appliquer une stratégie gagnante depuis ce dernier.
2. Un sommet d'Adam dont **tous** les arcs vont vers des sommets gagnants pour Eve est gagnant pour Eve.



Theorem 1 *On peut calculer l'ensemble des positions gagnantes dans un jeu d'accessibilité et construire des stratégies sans mémoire pour les deux joueurs.*

Preuve \Rightarrow tableau

JEUX SUR DES GRAPHES FINIS : CONDITION DE BÜCHI

Pour remporter un jeu de Büchi d'états finaux F Eve doit :

- Atteindre un sommet f_1 de F ,

Pour remporter un jeu de Büchi d'états finaux F Eve doit :

- Atteindre un sommet f_1 de F ,
- depuis lequel elle peut atteindre un sommet f_2 de F

Pour remporter un jeu de Büchi d'états finaux F Eve doit :

- Atteindre un sommet f_1 de F ,
- depuis lequel elle peut atteindre un sommet f_2 de F
- depuis lequel elle peut atteindre un sommet f_2 de F
- ...

Pour remporter un jeu de Büchi d'états finaux F Eve doit :

- Atteindre un sommet f_1 de F ,
- depuis lequel elle peut atteindre un sommet f_2 de F
- depuis lequel elle peut atteindre un sommet f_2 de F
- ...

Il faut donc :

- Déterminer les sommets de F depuis lesquels Eve peut infiniment souvent visiter F

Pour remporter un jeu de Büchi d'états finaux F Eve doit :

- Atteindre un sommet f_1 de F ,
- depuis lequel elle peut atteindre un sommet f_2 de F
- depuis lequel elle peut atteindre un sommet f_2 de F
- ...

Il faut donc :

- Déterminer les sommets de F depuis lesquels Eve peut infiniment souvent visiter F
- et en prendre l'attracteur.

Theorem 2 *On peut calculer l'ensemble des positions gagnantes dans un jeu d'accessibilité et construire des stratégies sans mémoire pour les deux joueurs.*

Preuve \Rightarrow tableau