# Jeux sur des graphes de processus à pile: accessibilité

Olivier Serre
LIAFA, Université Paris 7 & CNRS.
serre@liafa.jussieu.fr

# RAPPELS

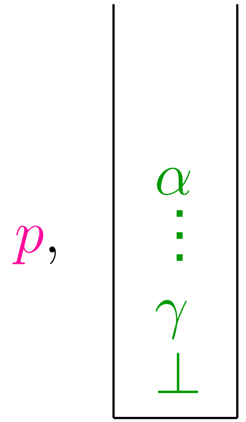
# Processus à pile : définition

**Processus à pile $\mathcal{P} = (Q, A, \Gamma, \perp, \Delta)$ :**

- $Q$ : ensemble fini d'états de contrôle.
- $A$ : alphabet fini d'entrée.
- $\Gamma$ : alphabet fini de pile.
- $\perp$ : symbole de fond de pile.
- $\Delta$ : fonction de transition.

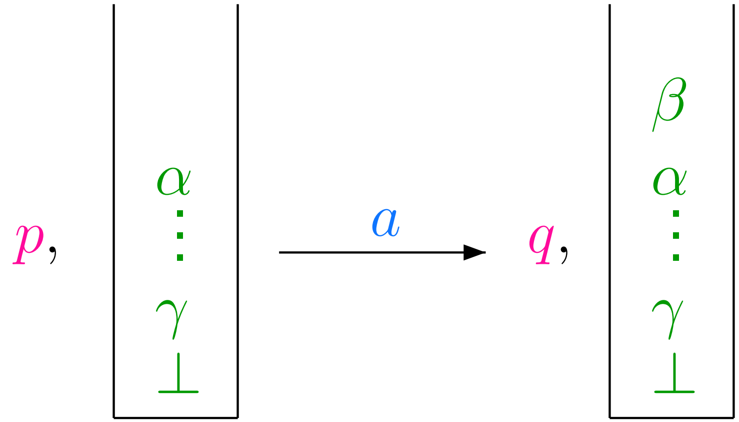
**Processus à pile $\mathcal{P} = (Q, A, \Gamma, \perp, \Delta)$ :**

- $Q$ : ensemble fini d'états de contrôle.
- $A$ : alphabet fini d'entrée.
- $\Gamma$ : alphabet fini de pile.
- $\perp$ : symbole de fond de pile.
- $\Delta$ : fonction de transition.
  - $Push(q, \beta) \in \Delta(p, \alpha, a)$.



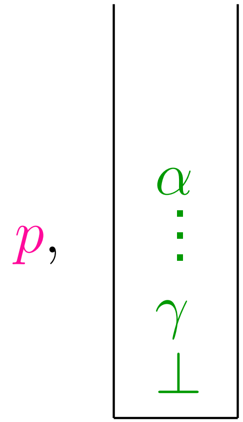
**Processus à pile** $\mathcal{P} = (Q, A, \Gamma, \perp, \Delta)$ **:**

- $Q$ : ensemble fini d'états de contrôle.
- $A$ : alphabet fini d'entrée.
- $\Gamma$ : alphabet fini de pile.
- $\perp$ : symbole de fond de pile.
- $\Delta$ : fonction de transition.
  - $Push(q, \beta) \in \Delta(p, \alpha, a)$.



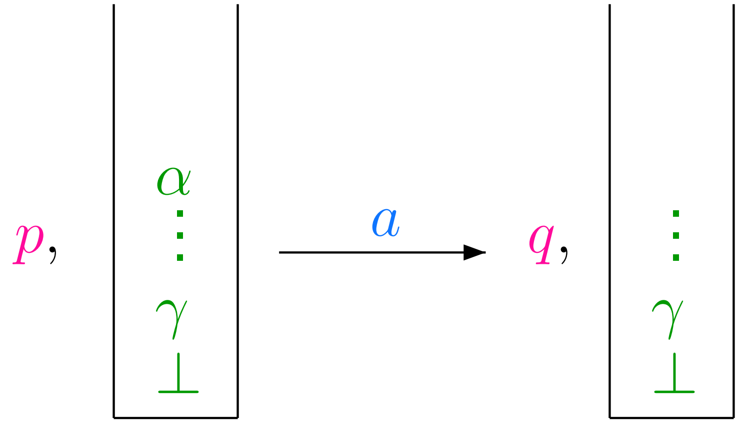
**Processus à pile $\mathcal{P} = (Q, A, \Gamma, \perp, \Delta)$ :**

- $Q$ : ensemble fini d'états de contrôle.
- $A$ : alphabet fini d'entrée.
- $\Gamma$ : alphabet fini de pile.
- $\perp$ : symbole de fond de pile.
- $\Delta$ : fonction de transition.
    - $Pop(q) \in \Delta(p, \alpha, a)$.



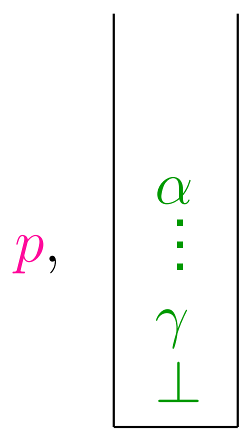
**Processus à pile $\mathcal{P} = (Q, A, \Gamma, \perp, \Delta)$ :**

- $Q$ : ensemble fini d'états de contrôle.
- $A$ : alphabet fini d'entrée.
- $\Gamma$ : alphabet fini de pile.
- $\perp$ : symbole de fond de pile.
- $\Delta$ : fonction de transition.
  - $Pop(q) \in \Delta(p, \alpha, a)$.



**Processus à pile $\mathcal{P} = (Q, A, \Gamma, \perp, \Delta)$ :**

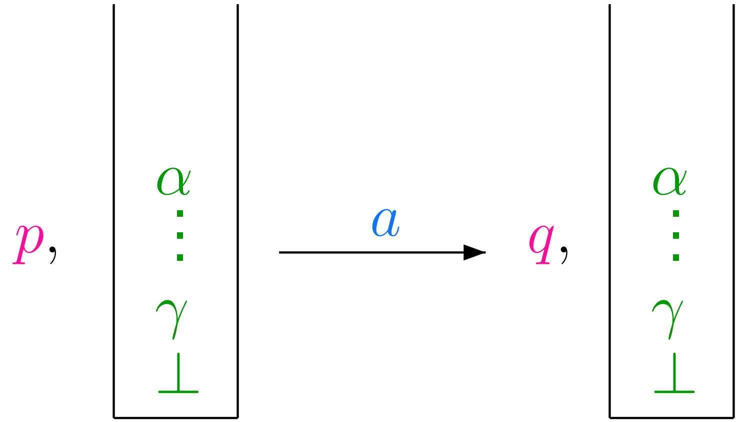
- $Q$ : ensemble fini d'états de contrôle.
- $A$ : alphabet fini d'entrée.
- $\Gamma$ : alphabet fini de pile.
- $\perp$ : symbole de fond de pile.
- $\Delta$ : fonction de transition.
  - $Skip(q) \in \Delta(p, \alpha, a)$.



# Processus à pile : définition

**Processus à pile** $\mathcal{P} = (Q, A, \Gamma, \bot, \Delta)$ **:**

- $Q$ : ensemble fini d'états de contrôle.
- $A$ : alphabet fini d'entrée.
- $\Gamma$ : alphabet fini de pile.
- $\bot$ : symbole de fond de pile.
- $\Delta$ : fonction de transition.
  - $Skip(q) \in \Delta(p, \alpha, a)$.



# Processus à pile : définition

**Processus à pile $\mathcal{P} = (Q, A, \Gamma, \perp, \Delta)$ :**

- $Q$ : ensemble fini d'états de contrôle.
- $A$ : alphabet fini d'entrée.
- $\Gamma$ : alphabet fini de pile.
- $\perp$ : symbole de fond de pile.
- $\Delta$ : fonction de transition.

$$\Delta : Q \times \Gamma \times A \to \{push(q, \alpha),\ pop(q),\ , skip(q) \mid q \in Q,\ \alpha \in \Gamma \setminus \{\perp\}\}$$

and s.t. $\forall q, q' \in Q$, $\forall a \in A$, $pop(q') \notin \Delta(q, \perp, a)$.

# Graphe associé

$Q = \{p, q, r\}$

$\Gamma = \{\alpha, \beta, \perp\}$

$\Delta(p, \alpha) = \{pop(q), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(q, \alpha) = \{pop(p), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \alpha) = \{pop(p), pop(r)\}$

$\Delta(p, \beta) = \{pop(p), push(p, \alpha)\}$

$\Delta(q, \beta) = \{pop(p), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \beta) = \{pop(p), push(q, \alpha)\}$

$\Delta(p, \perp) = \{push(p, \alpha), push(r, \beta)\}$

$\Delta(q, \perp) = \{push(q, \alpha), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \perp) = \{push(q, \beta), push(r, \alpha)\}$

$Q = \{p, q, r\}$

$\Gamma = \{\alpha, \beta, \perp\}$

$\Delta(p, \alpha) = \{pop(q), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(q, \alpha) = \{pop(p), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \alpha) = \{pop(p), pop(r)\}$

$\Delta(p, \beta) = \{pop(p), push(p, \alpha)\}$

$\Delta(q, \beta) = \{pop(p), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \beta) = \{pop(p), push(q, \alpha)\}$

$\Delta(p, \perp) = \{push(p, \alpha), push(r, \beta)\}$

$\Delta(q, \perp) = \{push(q, \alpha), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \perp) = \{push(q, \beta), push(r, \alpha)\}$

$p, \perp$

# Graphe associé

$Q = \{p, q, r\}$

$\Gamma = \{\alpha, \beta, \perp\}$

$\Delta(p, \alpha) = \{pop(q), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(q, \alpha) = \{pop(p), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \alpha) = \{pop(p), pop(r)\}$

$\Delta(p, \beta) = \{pop(p), push(p, \alpha)\}$

$\Delta(q, \beta) = \{pop(p), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \beta) = \{pop(p), push(q, \alpha)\}$

$\Delta(p, \perp) = \{push(p, \alpha), push(r, \beta)\}$

$\Delta(q, \perp) = \{push(q, \alpha), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \perp) = \{push(q, \beta), push(r, \alpha)\}$

$$\begin{tikzcd}
 & r, \beta\perp \\
p, \perp \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & p, \alpha\perp
\end{tikzcd}$$

# Graphe associé

$Q = \{p, q, r\}$

$\Gamma = \{\alpha, \beta, \perp\}$

$\Delta(p, \alpha) = \{pop(q), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(q, \alpha) = \{pop(p), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \alpha) = \{pop(p), pop(r)\}$

$\Delta(p, \beta) = \{pop(p), push(p, \alpha)\}$

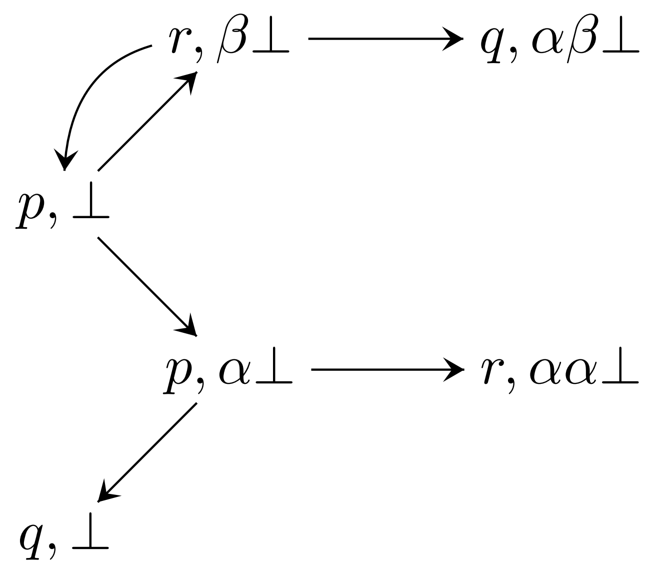
$\Delta(q, \beta) = \{pop(p), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \beta) = \{pop(p), push(q, \alpha)\}$

$\Delta(p, \perp) = \{push(p, \alpha), push(r, \beta)\}$

$\Delta(q, \perp) = \{push(q, \alpha), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \perp) = \{push(q, \beta), push(r, \alpha)\}$



# Graphe associé

$Q = \{p, q, r\}$

$\Gamma = \{\alpha, \beta, \perp\}$

$\Delta(p, \alpha) = \{pop(q), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(q, \alpha) = \{pop(p), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \alpha) = \{pop(p), pop(r)\}$

$\Delta(p, \beta) = \{pop(p), push(p, \alpha)\}$

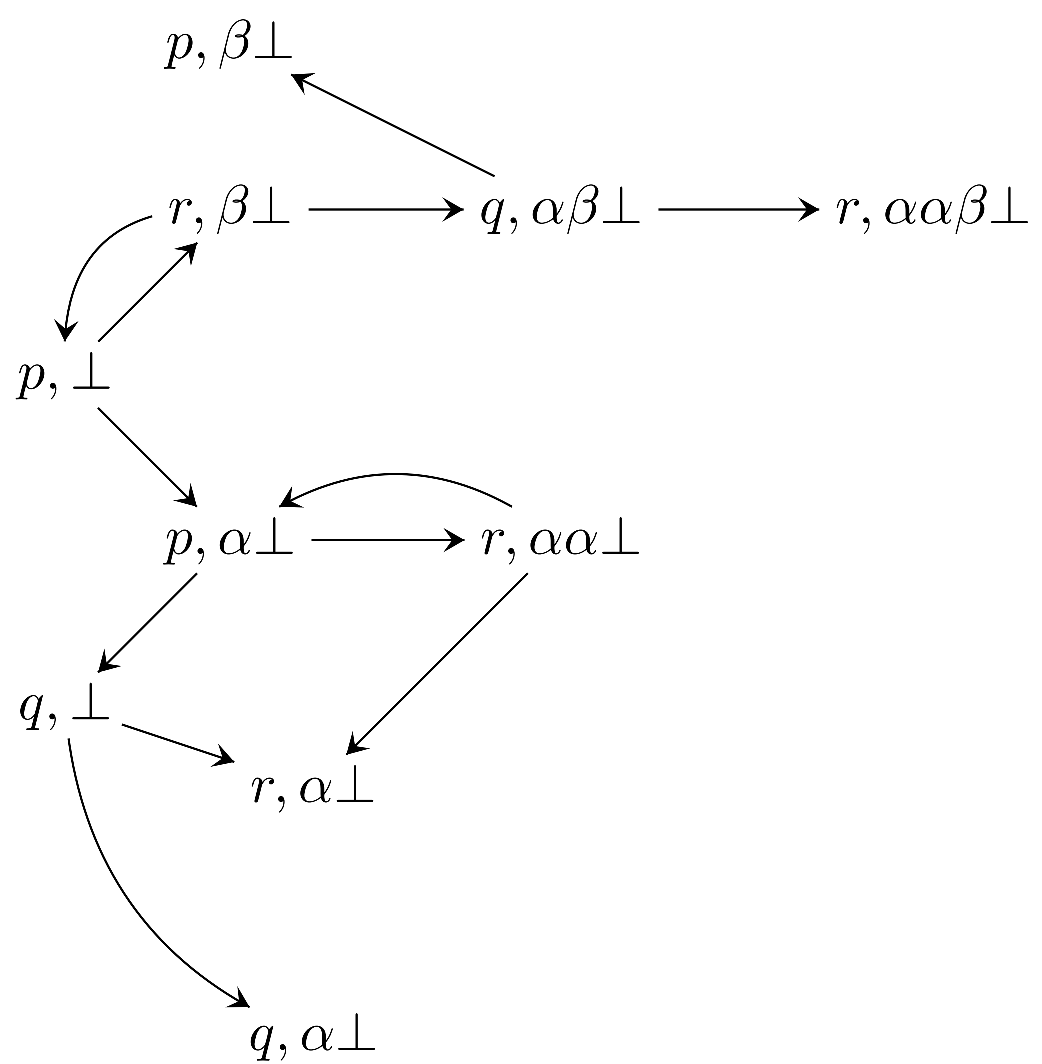
$\Delta(q, \beta) = \{pop(p), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \beta) = \{pop(p), push(q, \alpha)\}$

$\Delta(p, \perp) = \{push(p, \alpha), push(r, \beta)\}$

$\Delta(q, \perp) = \{push(q, \alpha), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \perp) = \{push(q, \beta), push(r, \alpha)\}$



$Q = \{p, q, r\}$

$\Gamma = \{\alpha, \beta, \bot\}$

$\Delta(p, \alpha) = \{pop(q), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(q, \alpha) = \{pop(p), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \alpha) = \{pop(p), pop(r)\}$

$\Delta(p, \beta) = \{pop(p), push(p, \alpha)\}$

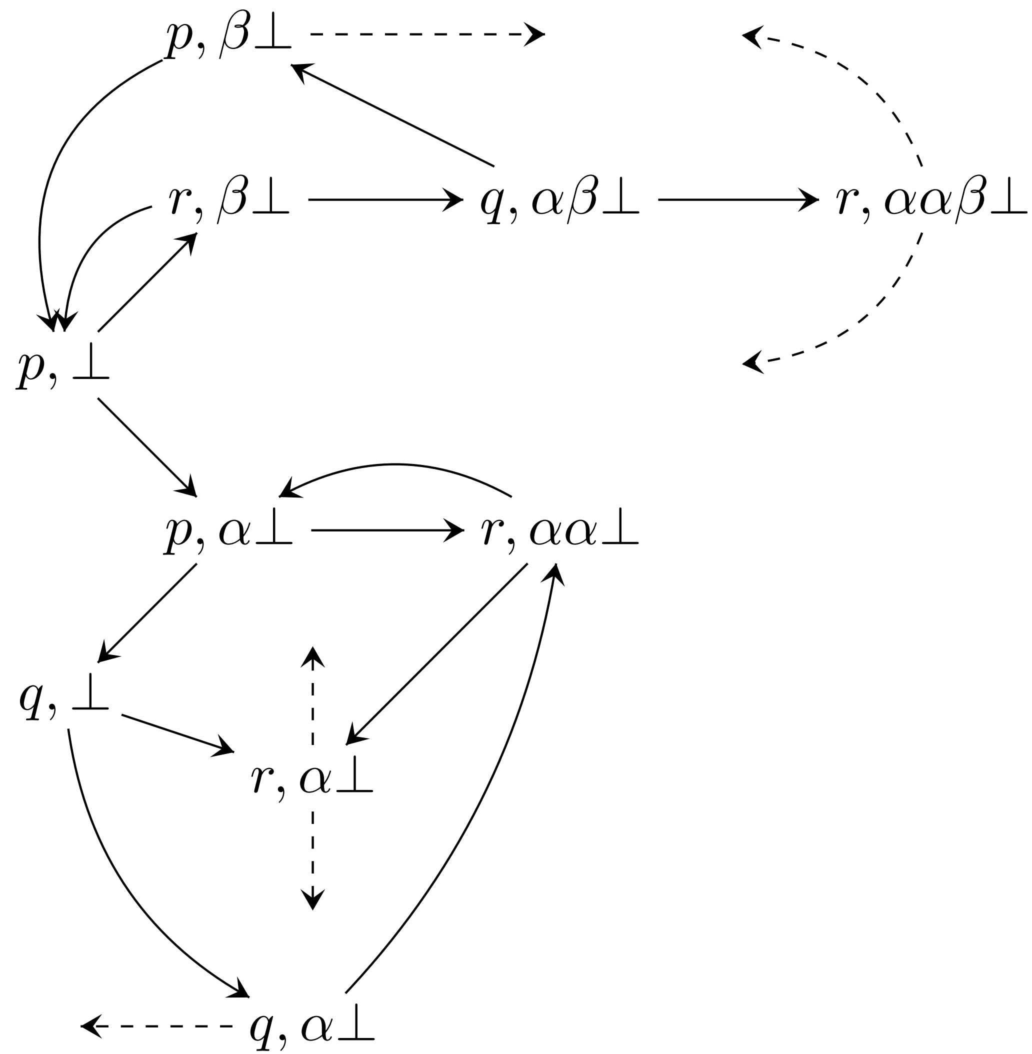
$\Delta(q, \beta) = \{pop(p), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \beta) = \{pop(p), push(q, \alpha)\}$

$\Delta(p, \bot) = \{push(p, \alpha), push(r, \beta)\}$

$\Delta(q, \bot) = \{push(q, \alpha), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \bot) = \{push(q, \beta), push(r, \alpha)\}$



# Graphe associé

$Q = \{p, q, r\}$

$\Gamma = \{\alpha, \beta, \perp\}$

$\Delta(p, \alpha) = \{pop(q), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(q, \alpha) = \{pop(p), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \alpha) = \{pop(p), pop(r)\}$

$\Delta(p, \beta) = \{pop(p), push(p, \alpha)\}$

$\Delta(q, \beta) = \{pop(p), push(r, \alpha)\}$

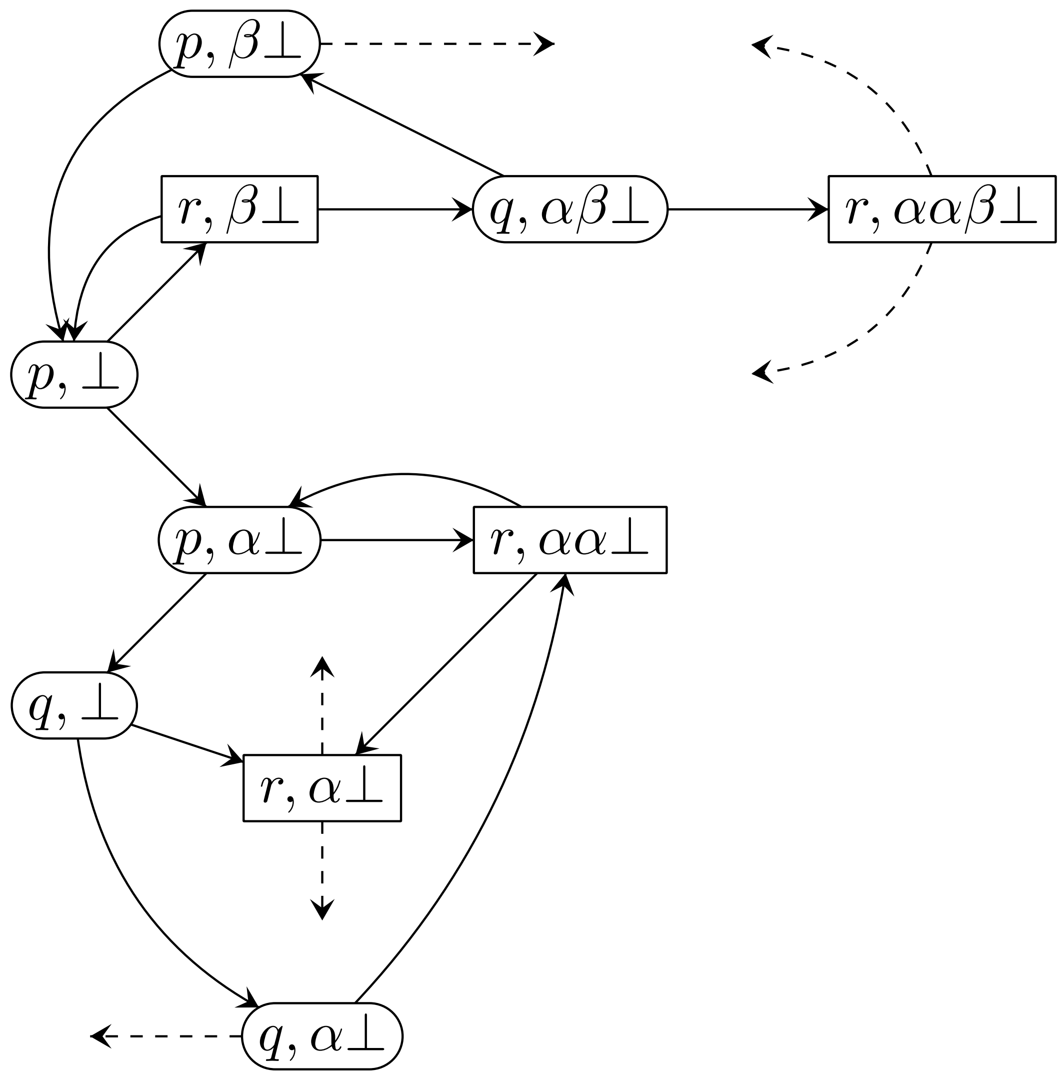
$\Delta(r, \beta) = \{pop(p), push(q, \alpha)\}$

$\Delta(p, \perp) = \{push(p, \alpha), push(r, \beta)\}$

$\Delta(q, \perp) = \{push(q, \alpha), push(r, \alpha)\}$

$\Delta(r, \perp) = \{push(q, \beta), push(r, \alpha)\}$

$Q_E = \{p, q\}$ et $Q_A = \{r\}$

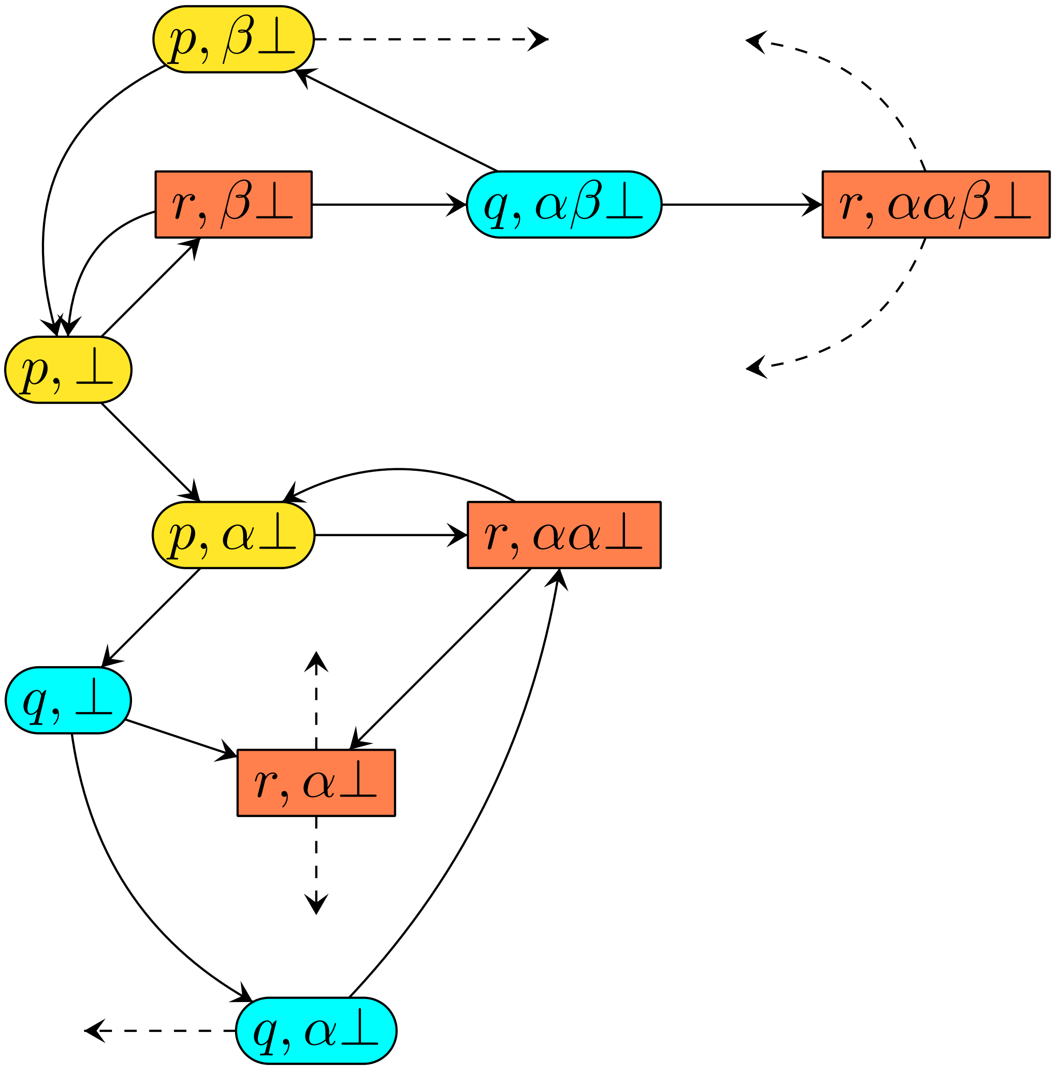


## Graphe associé

$$Q = \{p, q, r\}$$
$$\Gamma = \{\alpha, \beta, \perp\}$$
$$\Delta(p, \alpha) = \{pop(q), push(r, \alpha)\}$$
$$\Delta(q, \alpha) = \{pop(p), push(r, \alpha)\}$$
$$\Delta(r, \alpha) = \{pop(p), pop(r)\}$$
$$\Delta(p, \beta) = \{pop(p), push(p, \alpha)\}$$
$$\Delta(q, \beta) = \{pop(p), push(r, \alpha)\}$$
$$\Delta(r, \beta) = \{pop(p), push(q, \alpha)\}$$
$$\Delta(p, \perp) = \{push(p, \alpha), push(r, \beta)\}$$
$$\Delta(q, \perp) = \{push(q, \alpha), push(r, \alpha)\}$$
$$\Delta(r, \perp) = \{push(q, \beta), push(r, \alpha)\}$$

$Q_E = \{p, q\}$ et $Q_A = \{r\}$

$\rho(p) = 0,\ \rho(q) = 2,\ \rho(r) = 1$



**Soit $G = (V, E)$ associé avec $\mathcal{P} = (Q, A, \Gamma, \perp, \Delta)$ :**

- $V = Q \times (\Gamma \setminus \{\perp\})^* \perp$ : ensemble de sommets / configurations.

**Soit** $G = (V, E)$ **associé avec** $\mathcal{P} = (Q, A, \Gamma, \perp, \Delta)$ **:**

- $V = Q \times (\Gamma \setminus \{\perp\})^* \perp$ : ensemble de sommets / configurations.
- $E \subseteq V \times A \times V$ : ensemble d'arêtes. $((q, \alpha u), a, (q', u')) \in E$ ssi :
  - $push(q', \beta) \in \Delta(q, \alpha, a)$ et $u' = \beta\alpha u$,
  - ou $pop(q') \in \Delta(q, \alpha, a)$ et $u' = \alpha u$,
  - ou $skip(q') \in \Delta(q, \alpha, a)$ et $u' = u$.

**Soit $G = (V, E)$ associé avec $\mathcal{P} = (Q, A, \Gamma, \perp, \Delta)$ :**

- $V = Q \times (\Gamma \setminus \{\perp\})^* \perp$ : ensemble de sommets / configurations.
- $E \subseteq V \times A \times V$ : ensemble d'arêtes. $((q, \alpha u), a, (q', u')) \in E$ ssi :
  - $push(q', \beta) \in \Delta(q, \alpha, a)$ et $u' = \beta \alpha u$,
  - ou $pop(q') \in \Delta(q, \alpha, a)$ et $u' = \alpha u$,
  - ou $skip(q') \in \Delta(q, \alpha, a)$ et $u' = u$.
- Remarque : Si $\mathcal{A}$ est trivial, $E \subseteq V \times V$.

# Graphe de jeu associé

**Soit $G = (V, E)$ associé avec $\mathcal{P} = (Q, A, \Gamma, \perp, \Delta)$ :**

- $V = Q \times (\Gamma \setminus \{\perp\})^* \perp$ : ensemble de sommets / configurations.
- $E \subseteq V \times A \times V$ : ensemble d'arêtes. $((q, \alpha u), a, (q', u')) \in E$ ssi :
  - $push(q', \beta) \in \Delta(q, \alpha, a)$ et $u' = \beta\alpha u$,
  - ou $pop(q') \in \Delta(q, \alpha, a)$ et $u' = \alpha u$,
  - ou $skip(q') \in \Delta(q, \alpha, a)$ et $u' = u$.
- Remarque : Si $\mathcal{A}$ est trivial, $E \subseteq V \times V$.

**Graphe de jeu $\mathcal{G} = (G, V_E, V_A)$ associé avec $Q_E \sqcup Q_A = Q$ :**

- $V_E = Q_E \times (\Gamma \setminus \{\perp\})^* \perp$ : configurations contrôlées par Eve.
- $V_A = Q_A \times (\Gamma \setminus \{\perp\})^* \perp$ : configurations contrôlées par Adam.

# Jeu d'accessibilité associé

## Condition d'accessibilité :

- $F \subseteq Q$ : ensemble d'états finaux.
- $V_F = F \times (\Gamma \setminus \{\perp\})^*\perp$ : ensemble de configurations finales.
- $\Omega_{access} = V^* V_F V^\omega$.

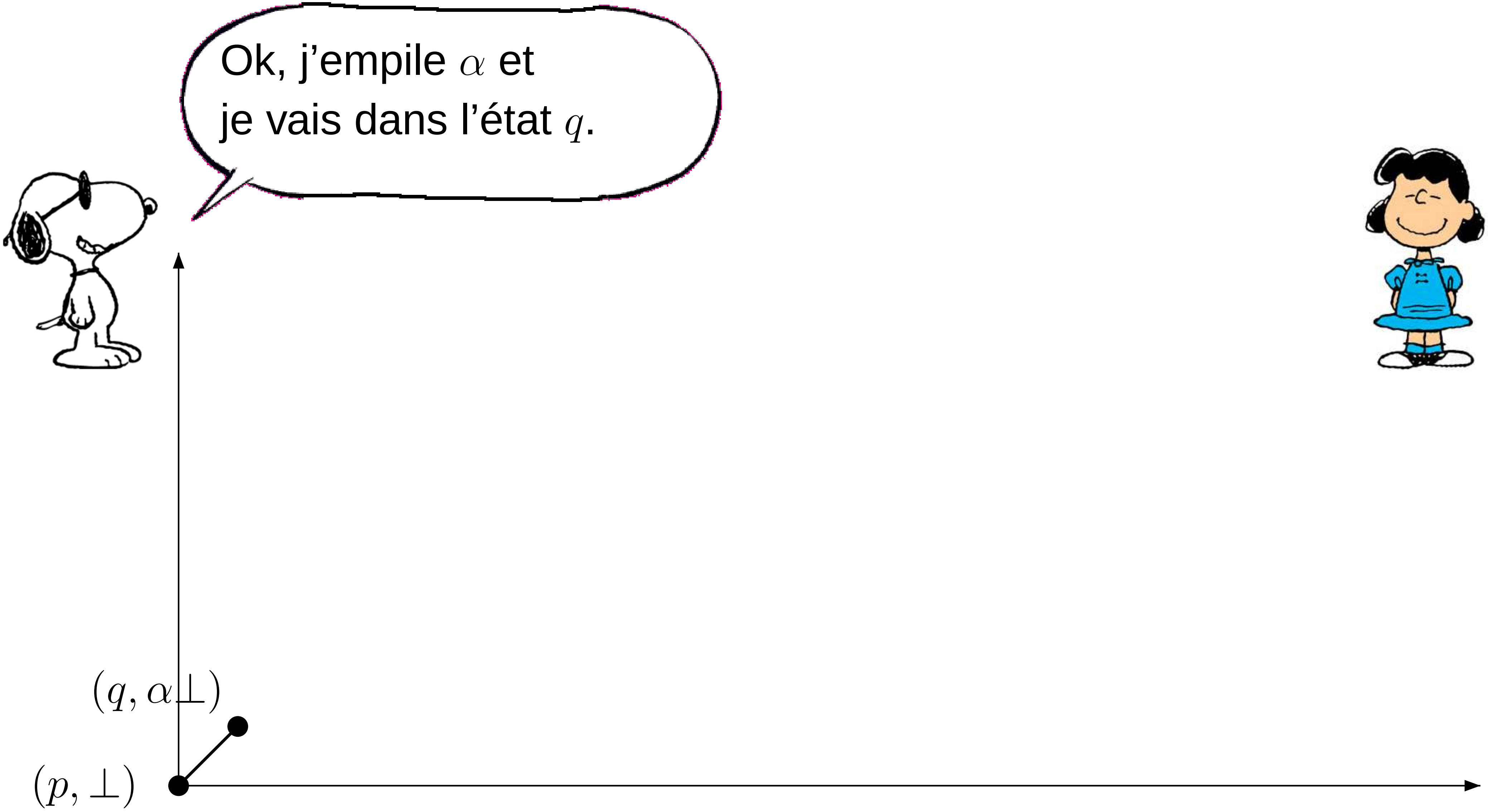
## Condition d'accessibilité :

- $F \subseteq Q$ : ensemble d'états finaux.
- $V_F = F \times (\Gamma \setminus \{\bot\})^* \bot$ : ensemble de configurations finales.
- $\Omega_{access} = V^* V_F V^\omega$.

**Théorème.** Décider le gagnant dans un jeu d'accessibilité sur un graphe de processus à pile est un problème EXPTIME-complet.

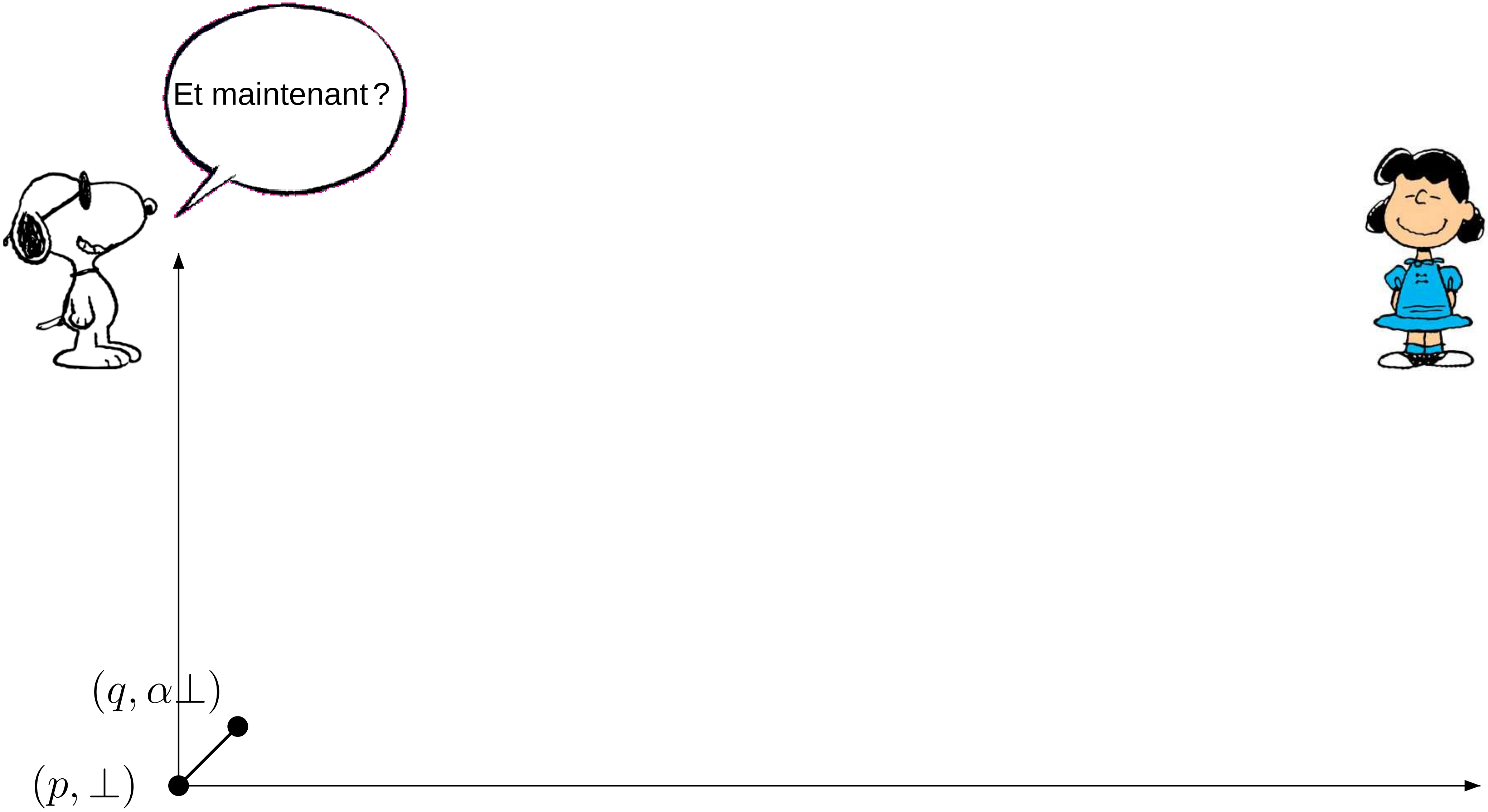
# Jeux d'accessibilité.

# Jeu d’accessibilité : intuition

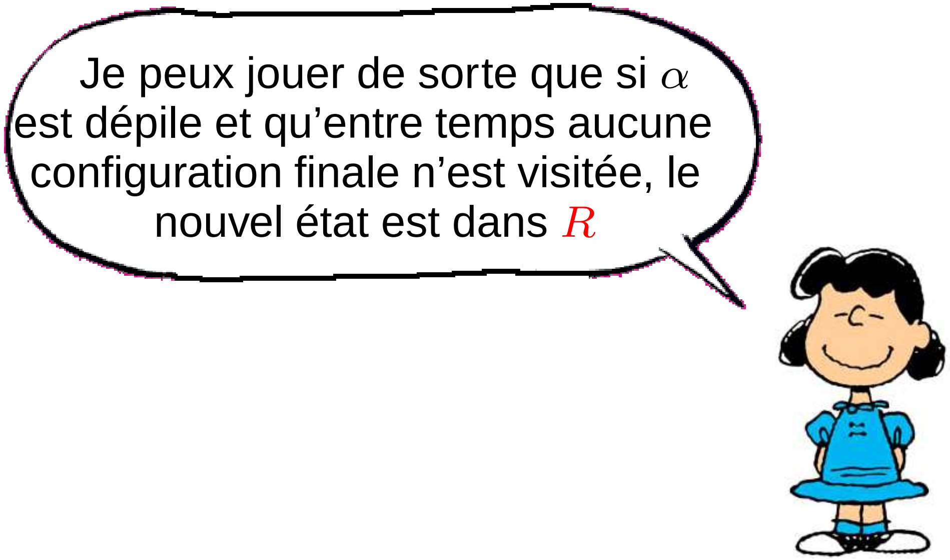


Ok, j'empile $\alpha$ et
je vais dans l'état $q$.
$(q, \alpha\perp)$
$(p, \perp)$

# Jeu d'accessibilité : intuition

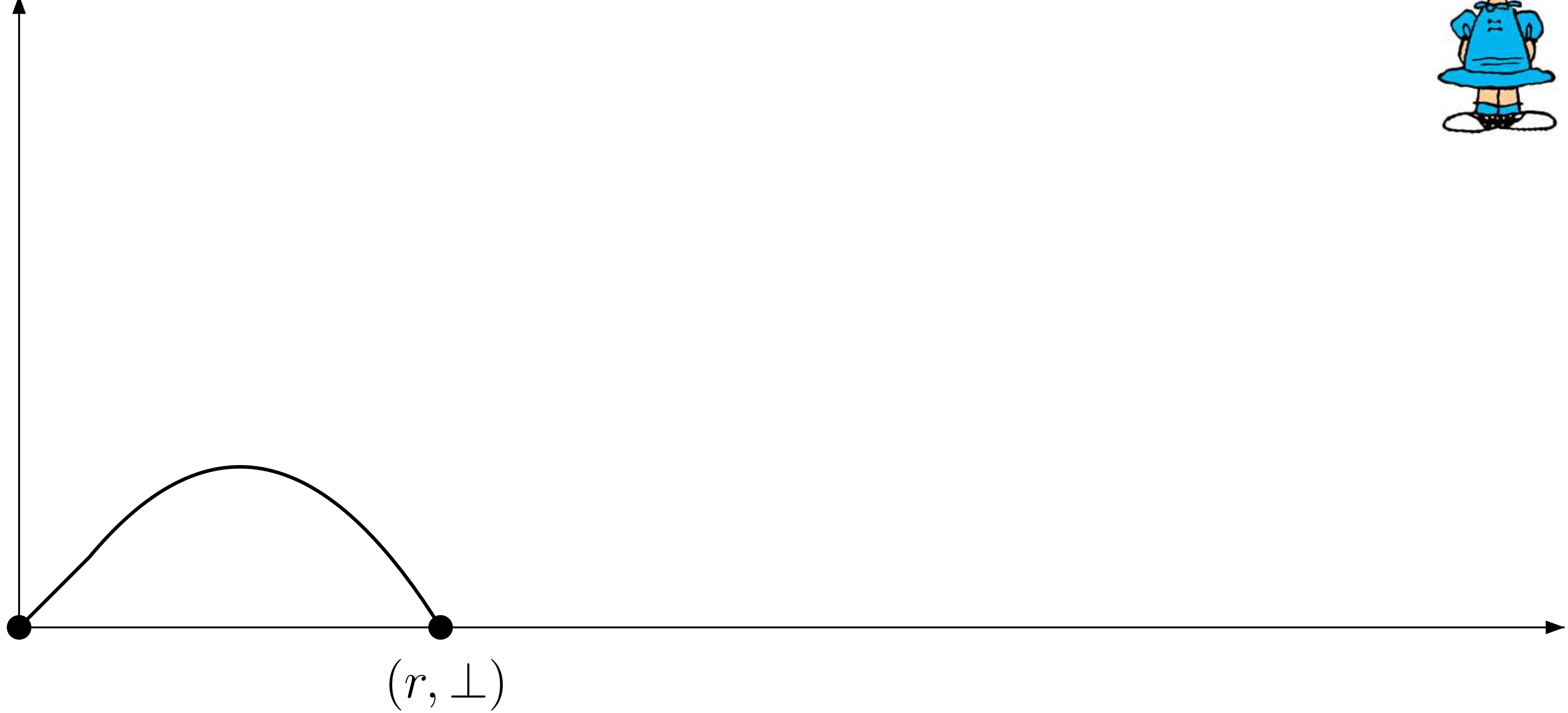


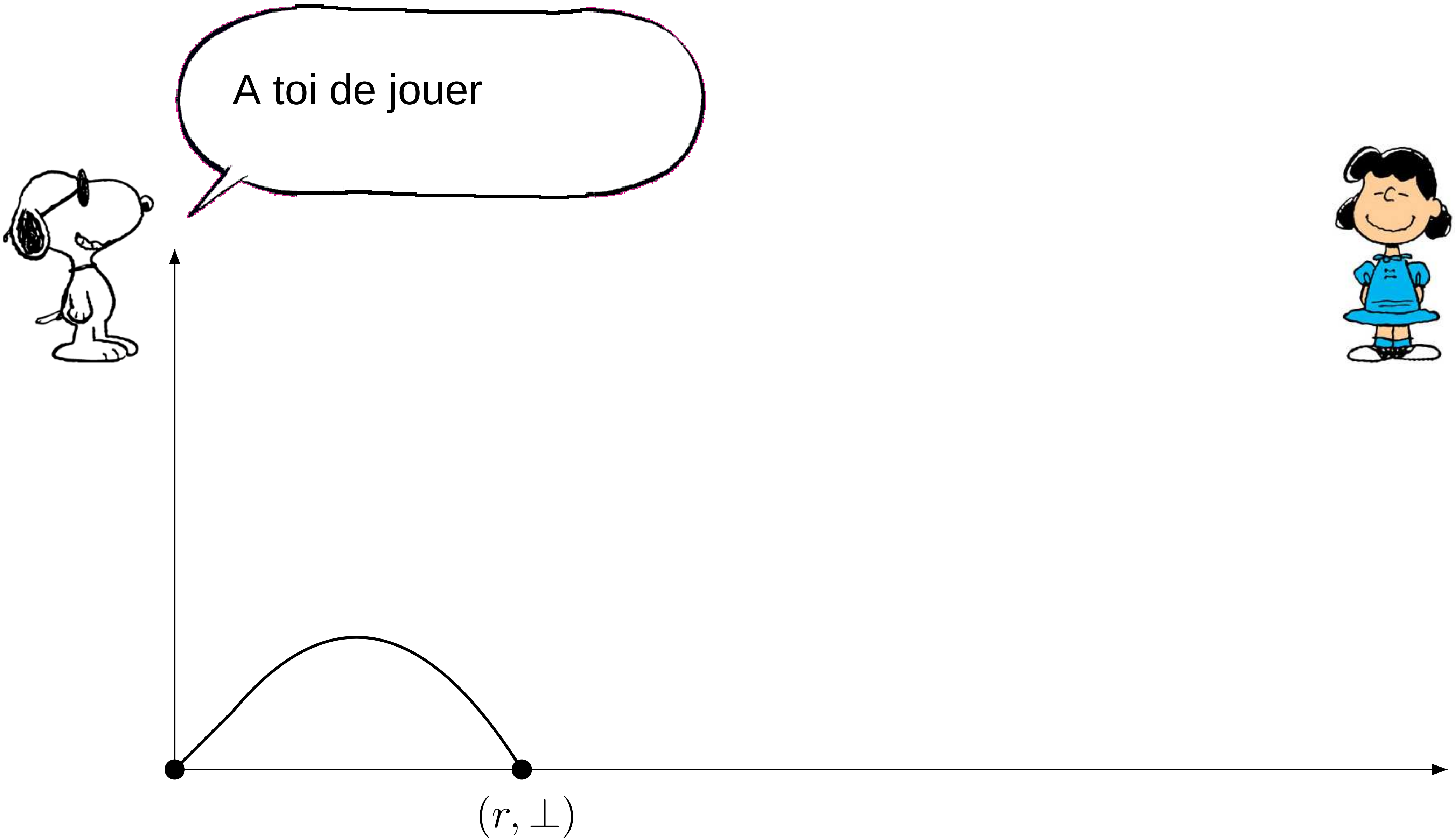
# Jeu d’accessibilité : intuition



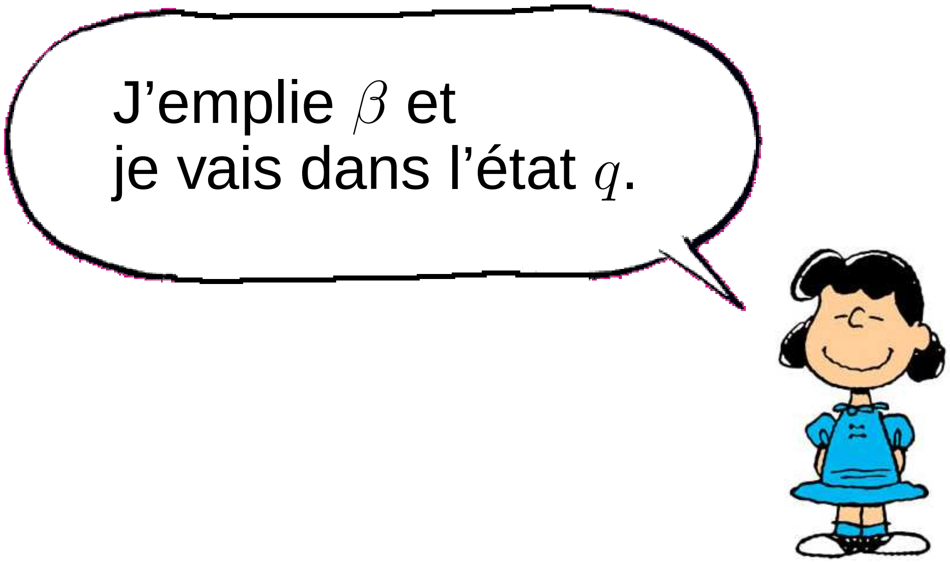

Super !

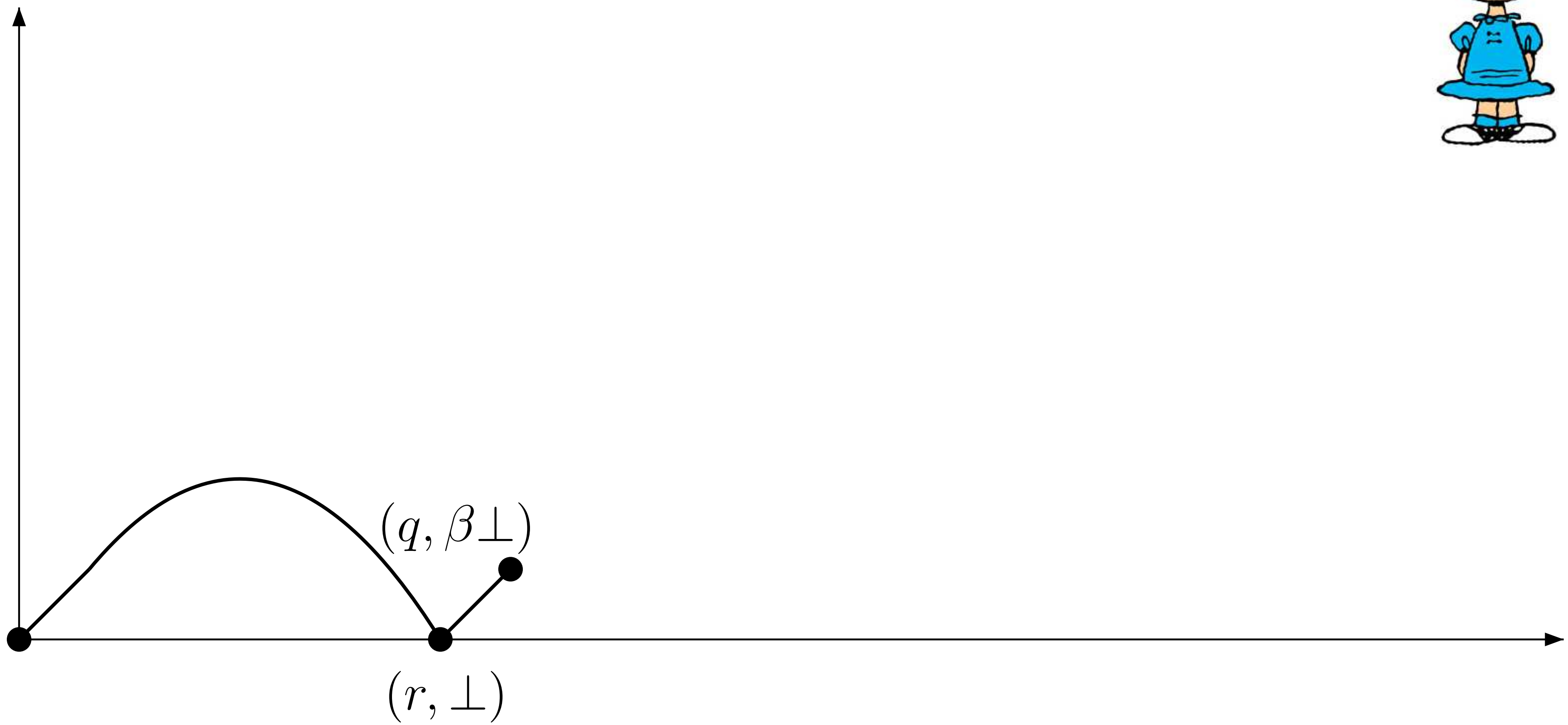
allons en $(r, \perp)$, $r \in R$.



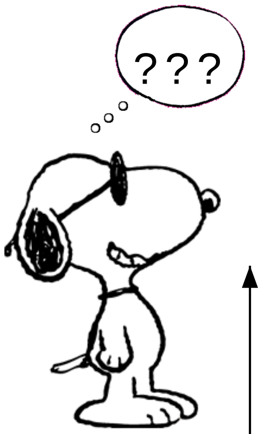

A toi de jouer
$(r, \perp)$

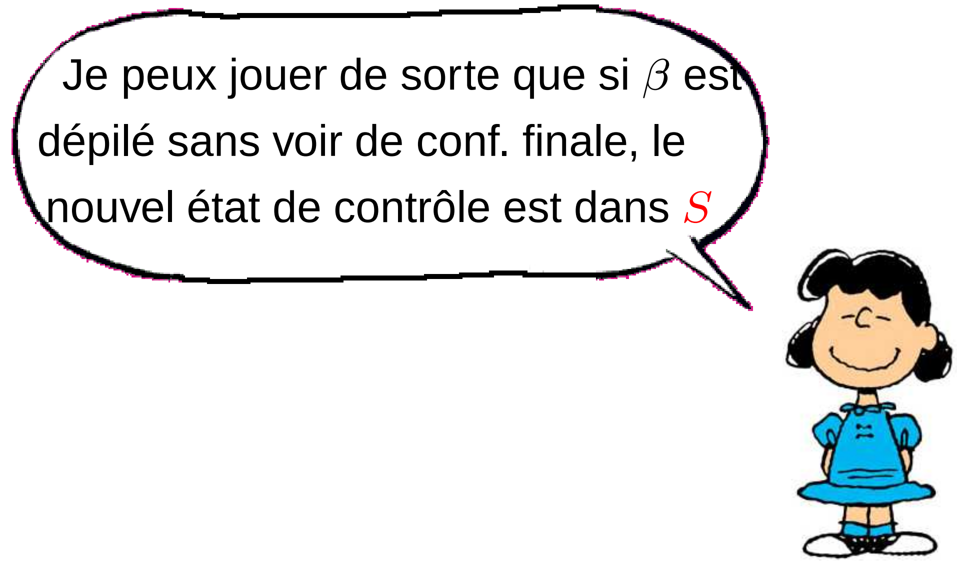
# Jeu d'accessibilité : intuition

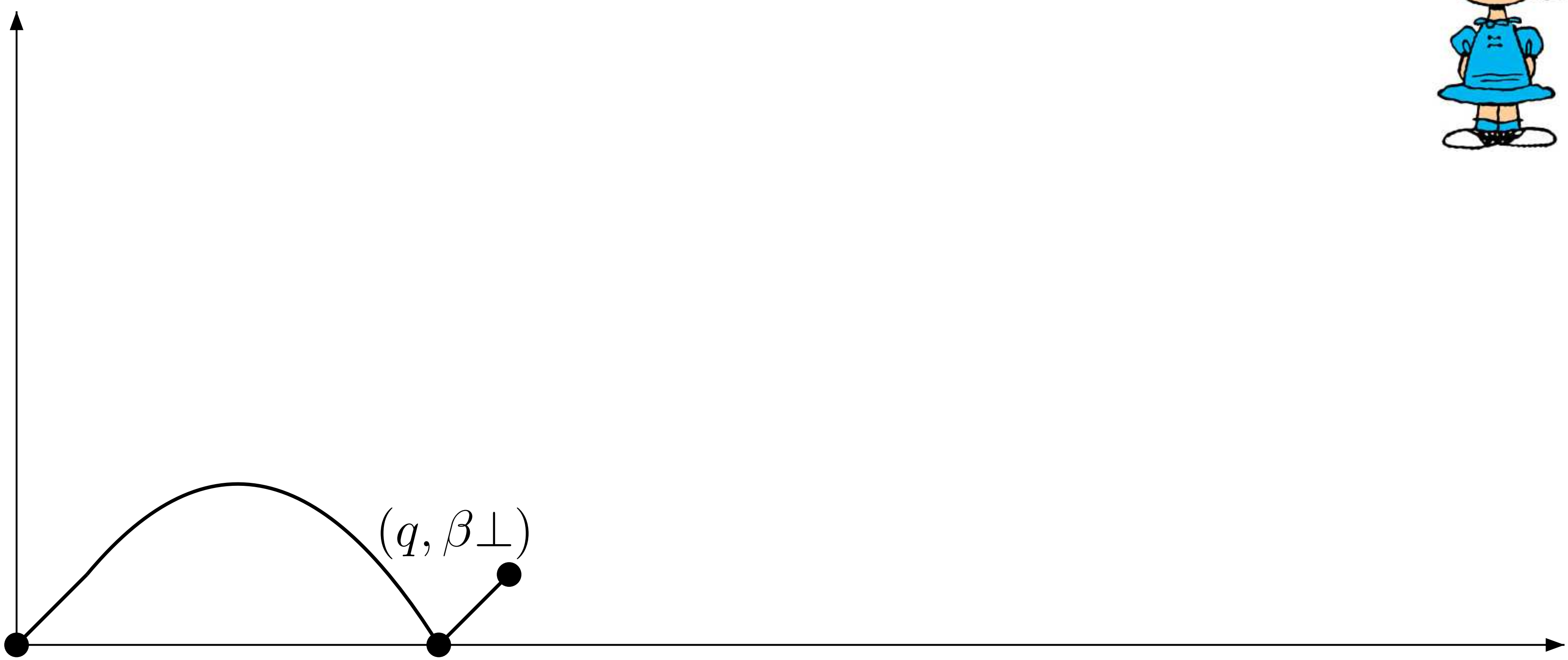


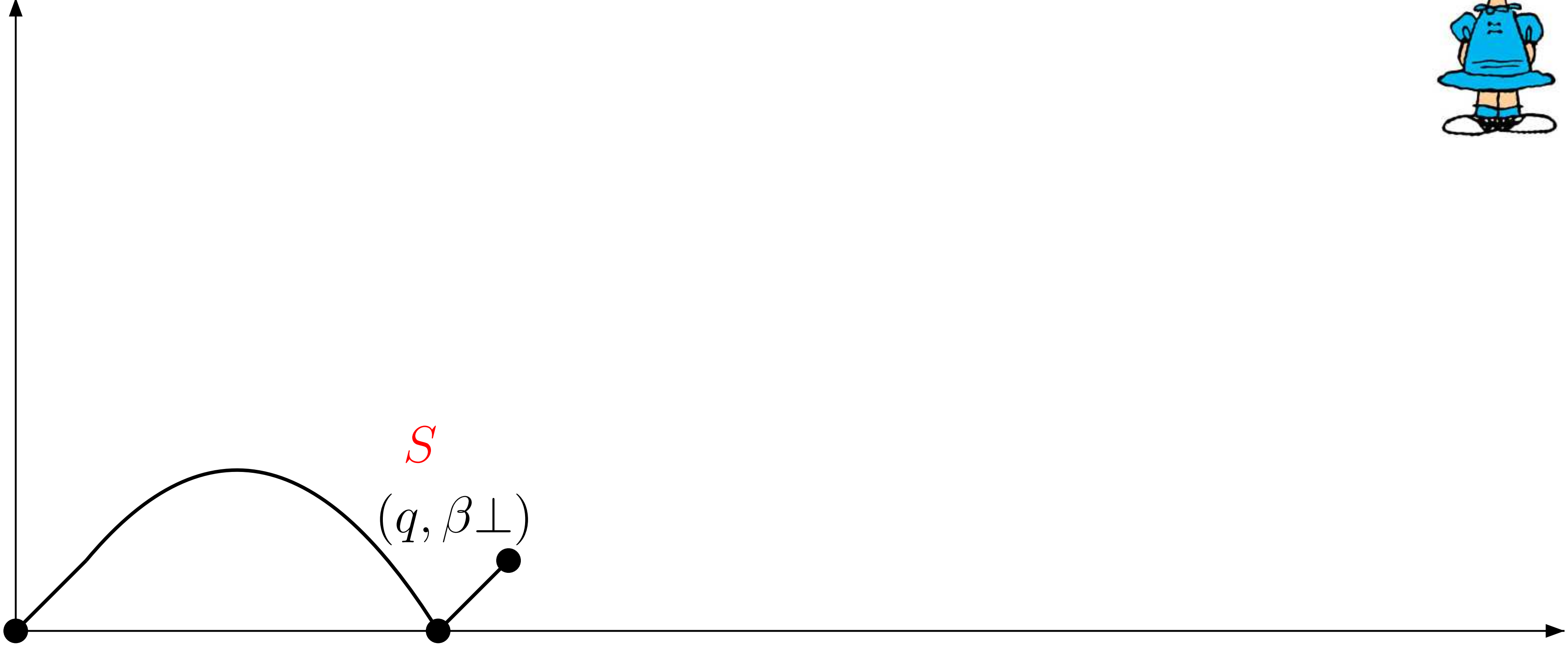
# Jeu d’accessibilité : intuition



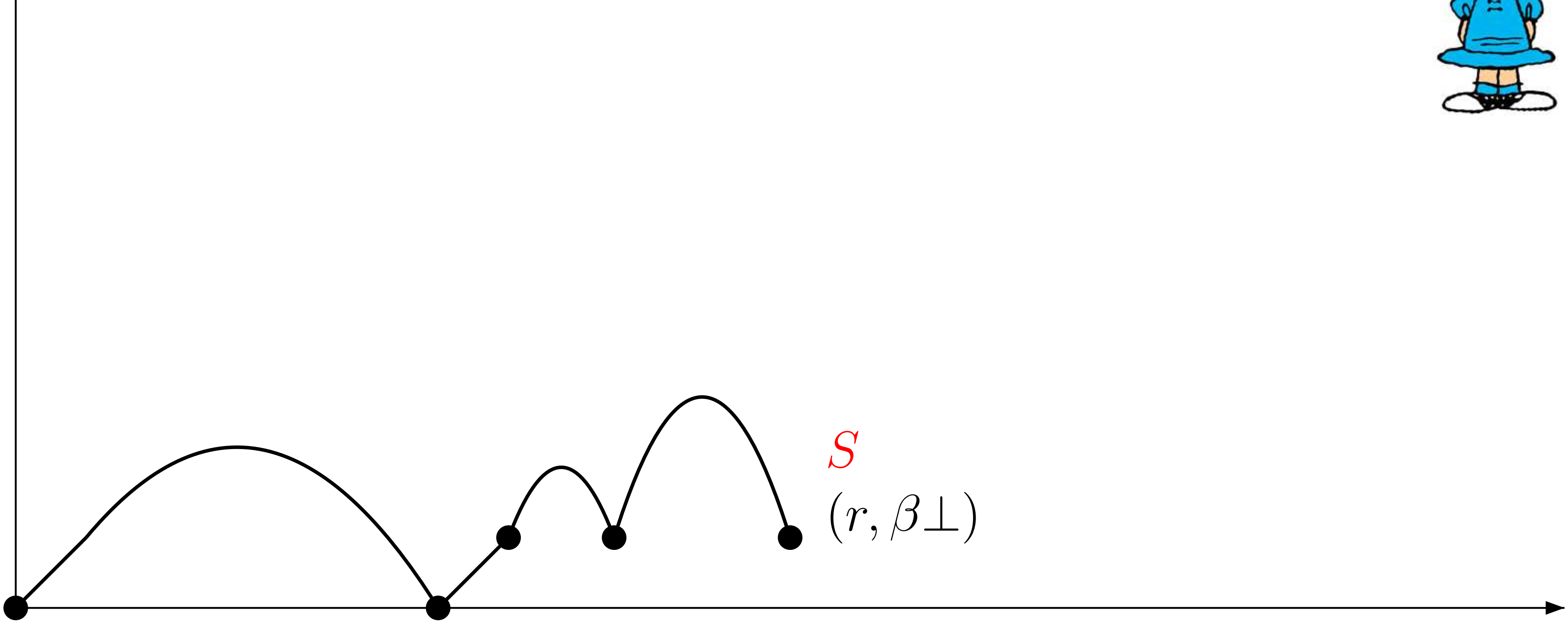




Voyons
ça. . .

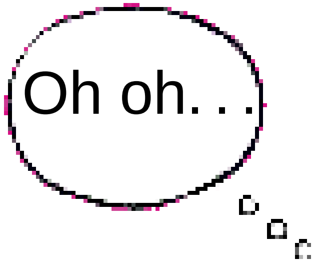

$S$
$(q, \beta\perp)$

# Jeu d'accessibilité : intuition

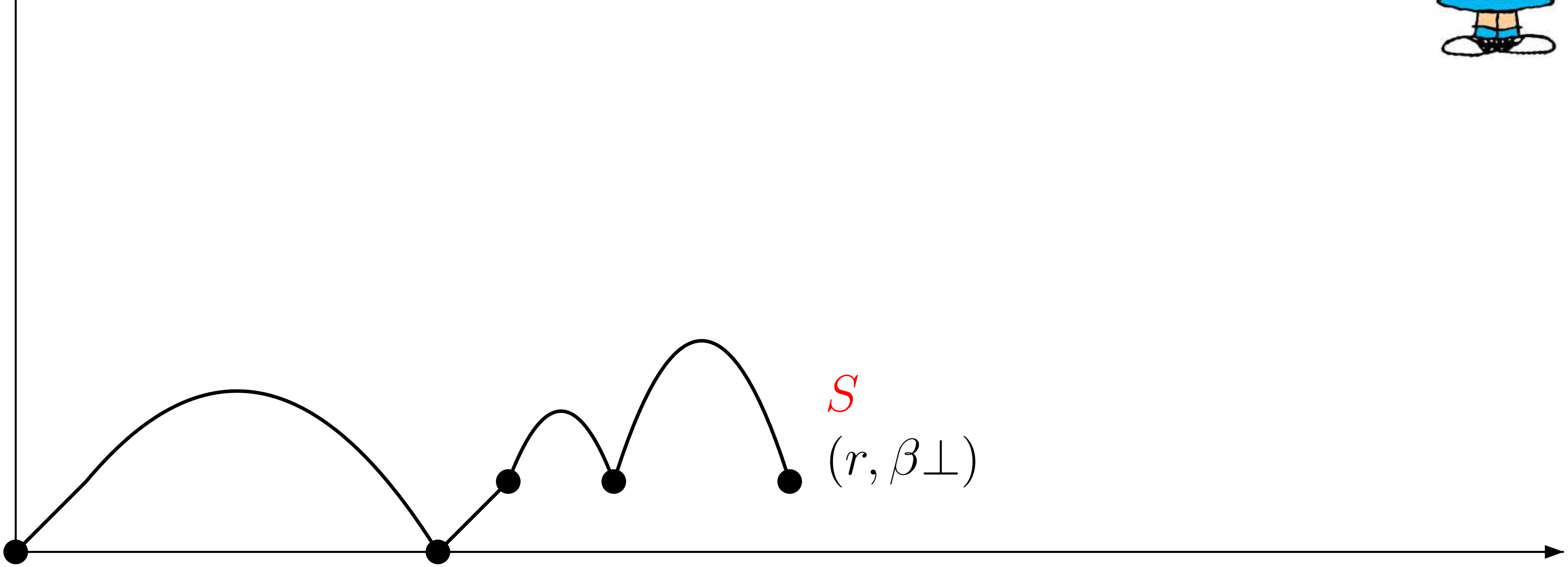
Quelques coups plus tards. . .



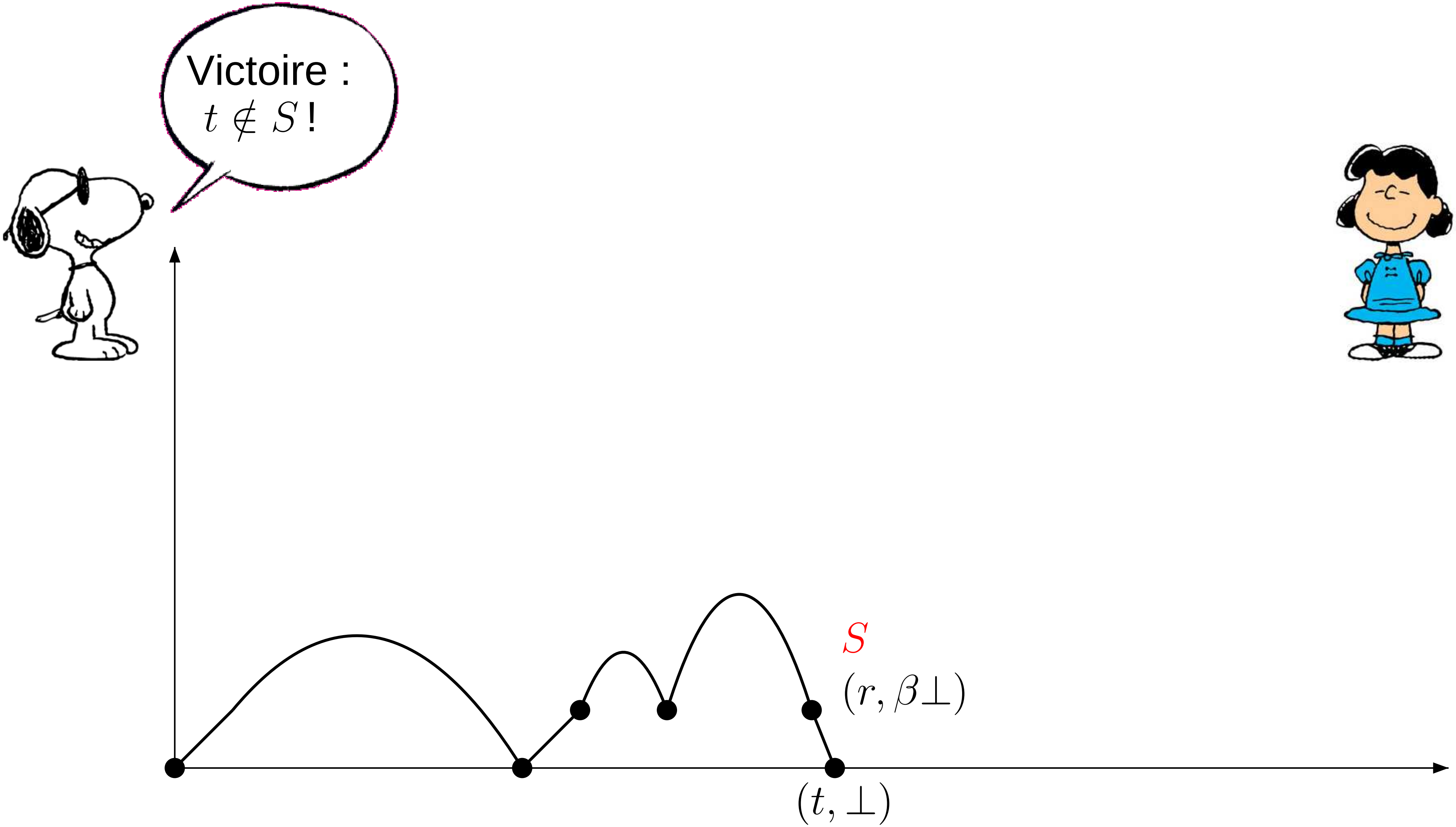
# Jeu d'accessibilité : intuition

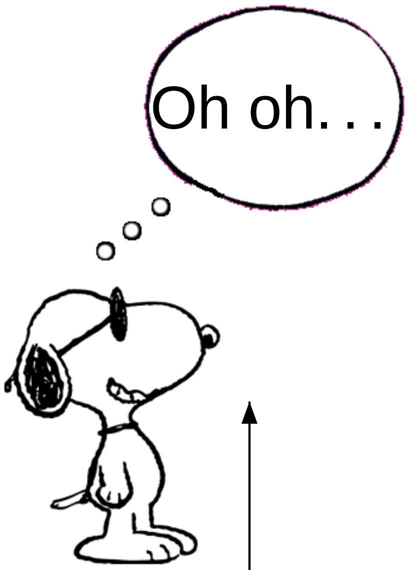



Premier scénario : tu n'aurais pas dû mentir

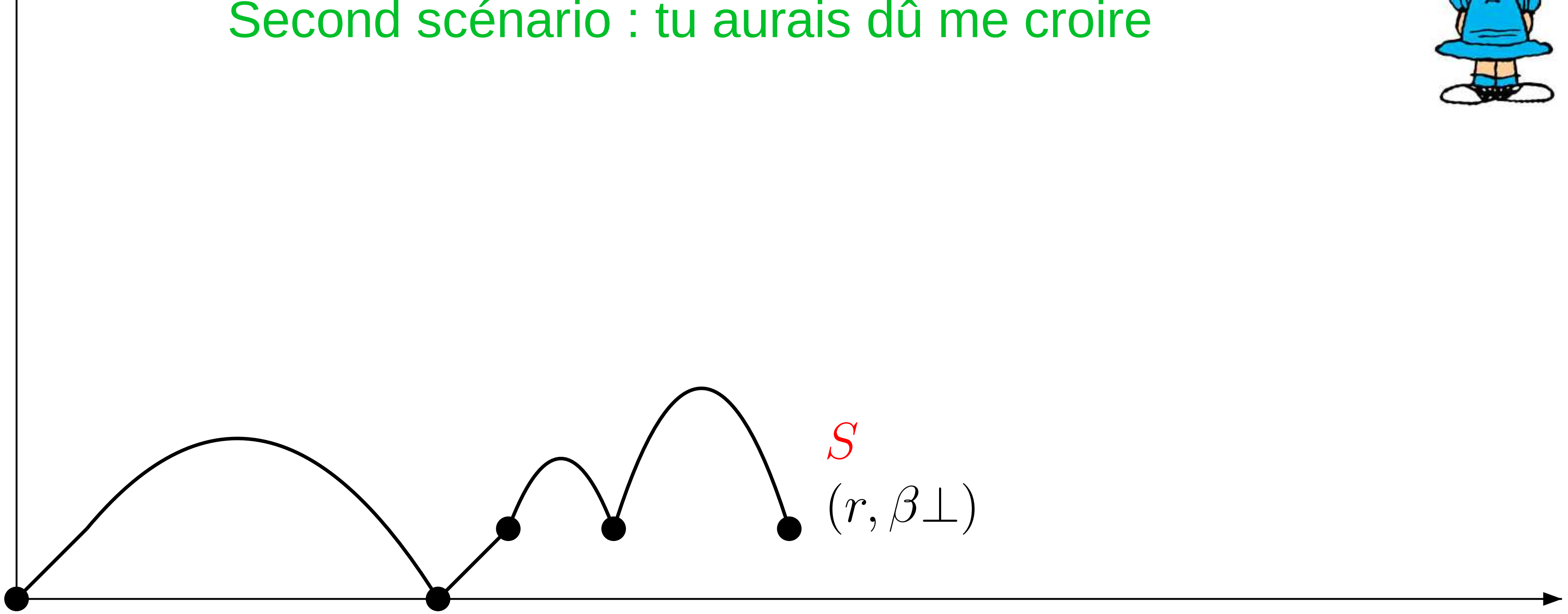


# Jeu d'accessibilité : intuition

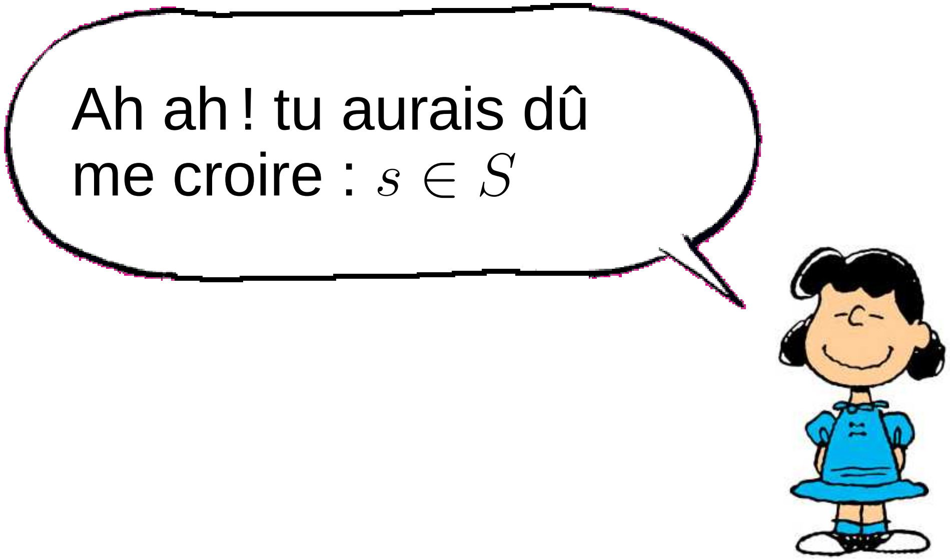


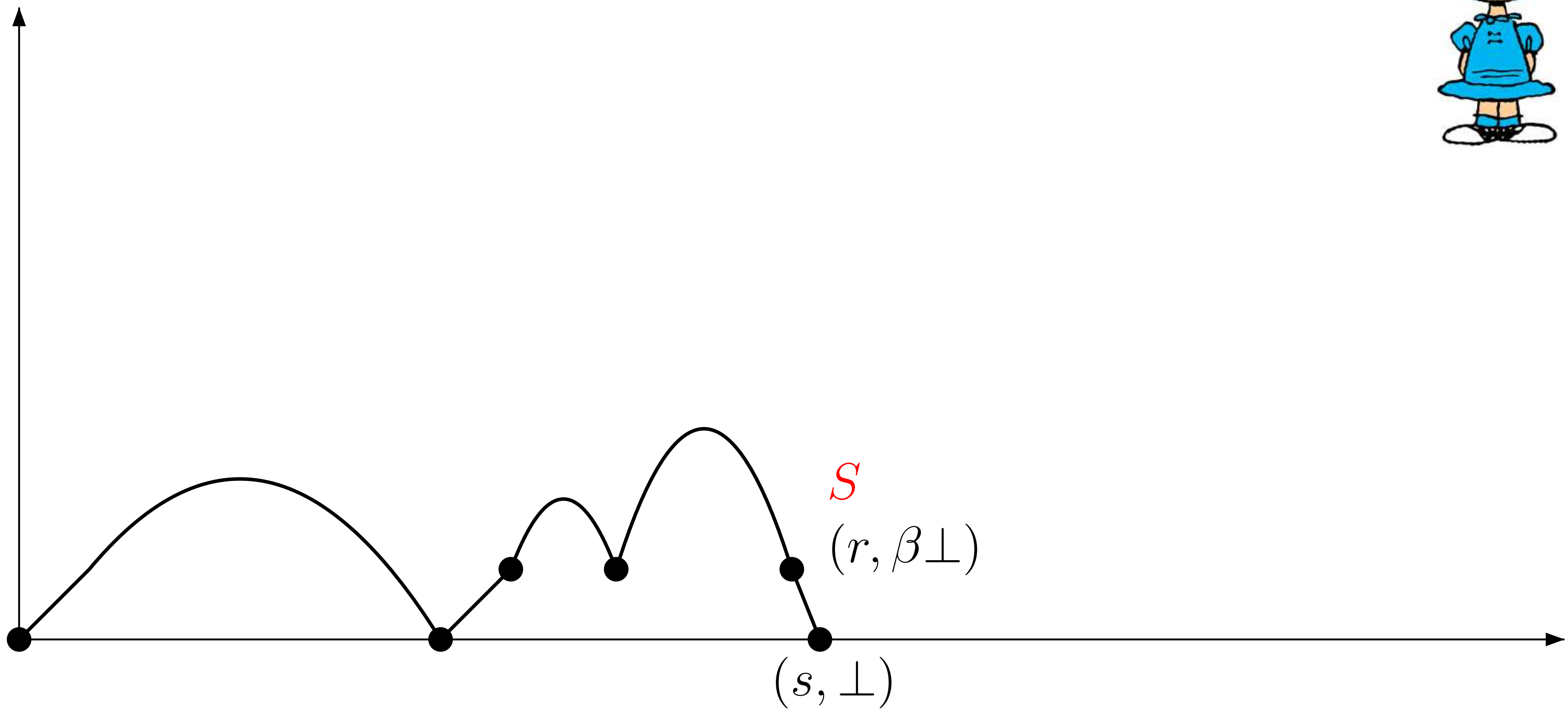



Second scénario : tu aurais dû me croire

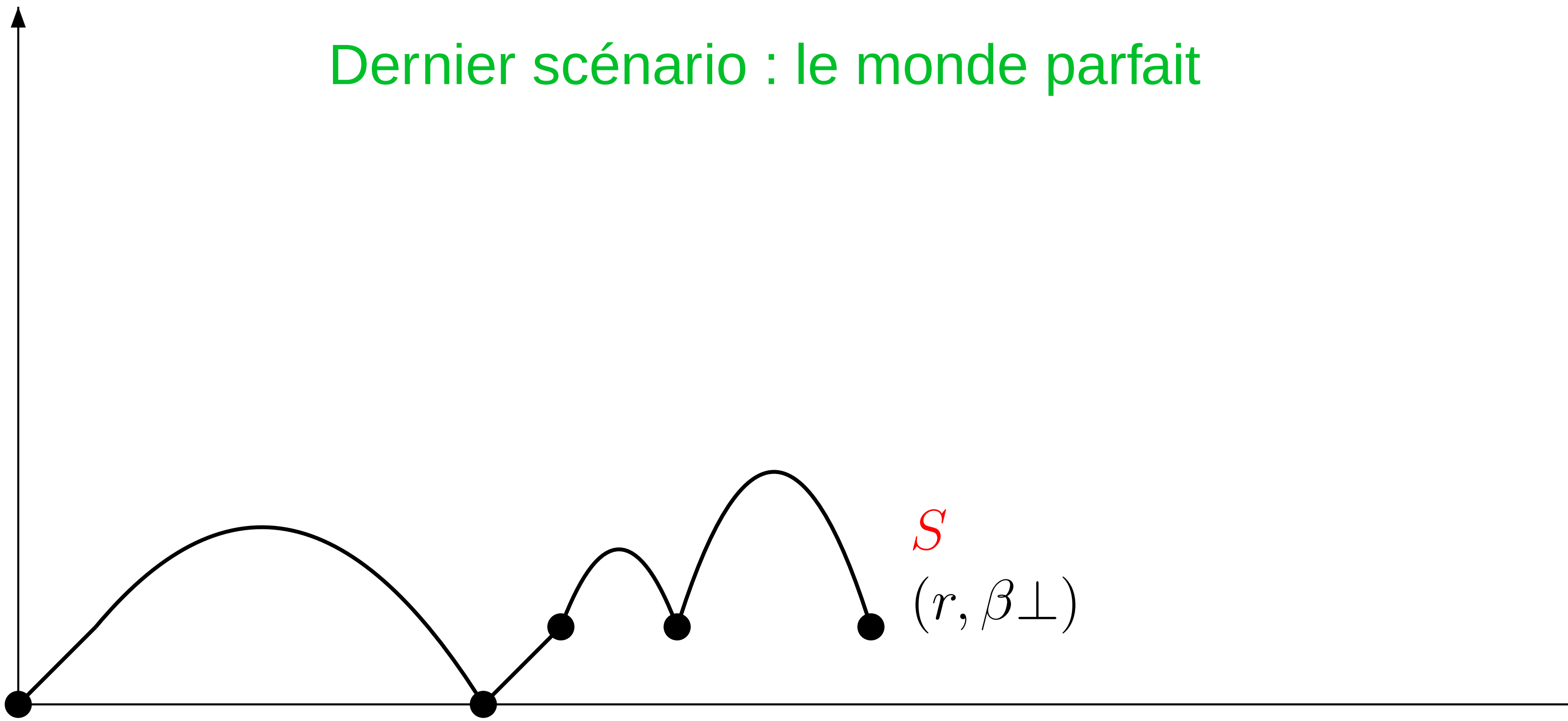


# Jeu d'accessibilité : intuition

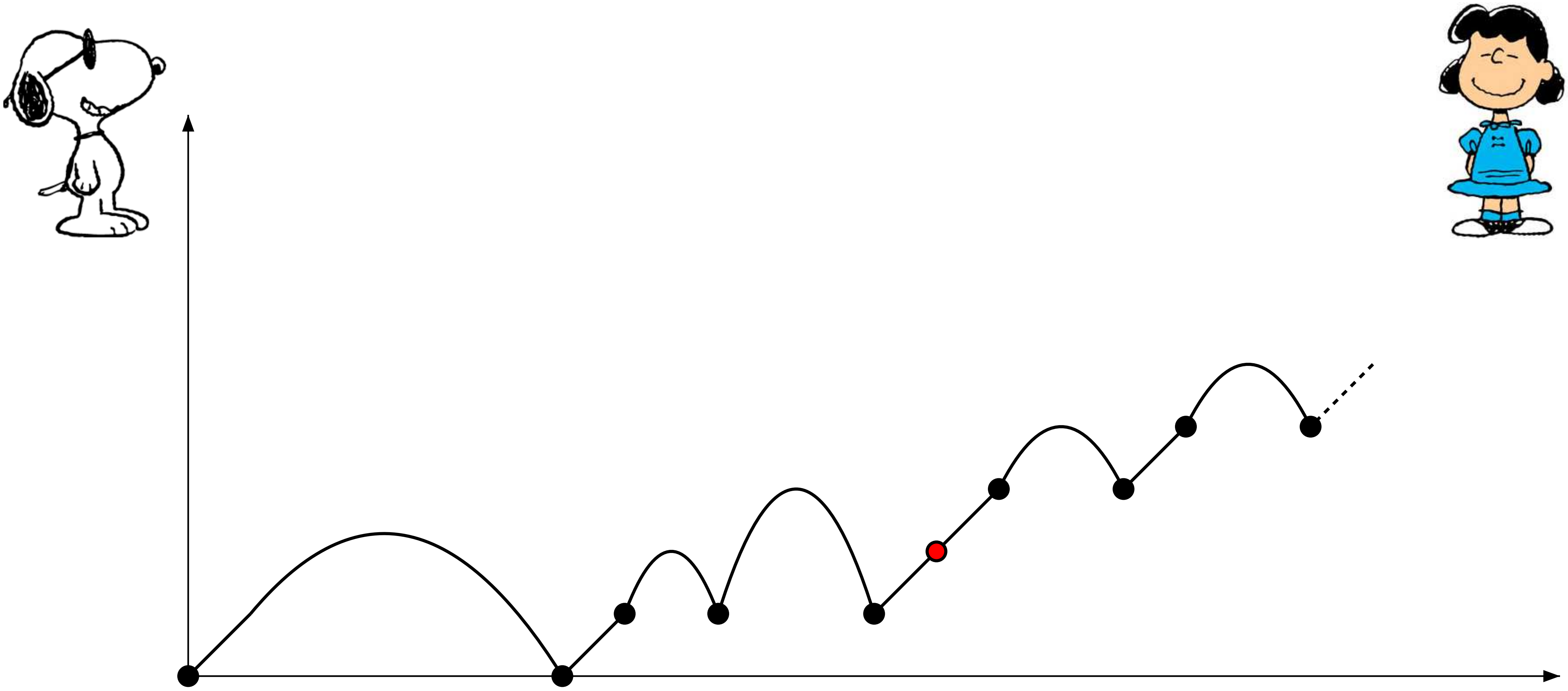


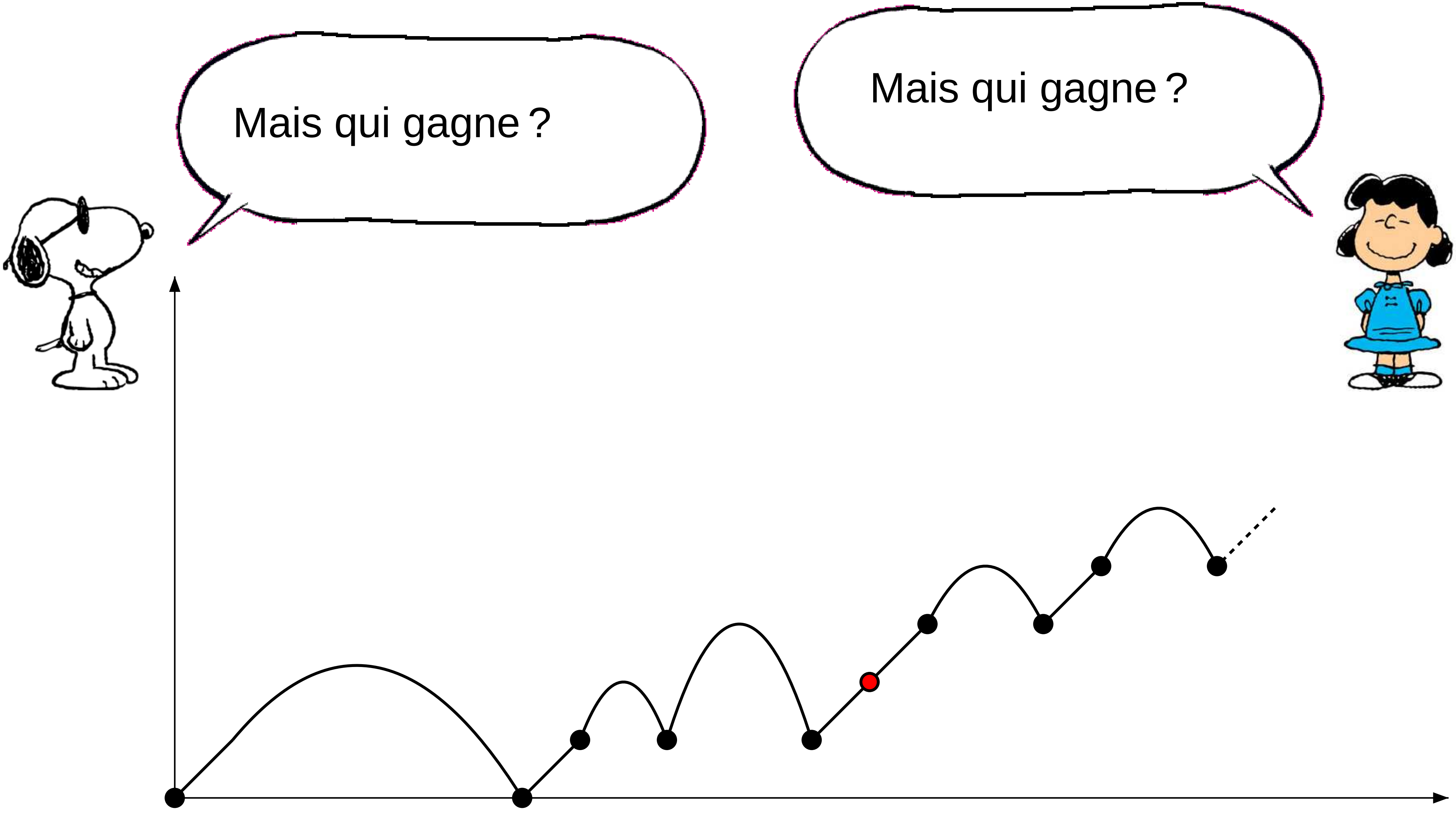



# Jeu d’accessibilité : intuition

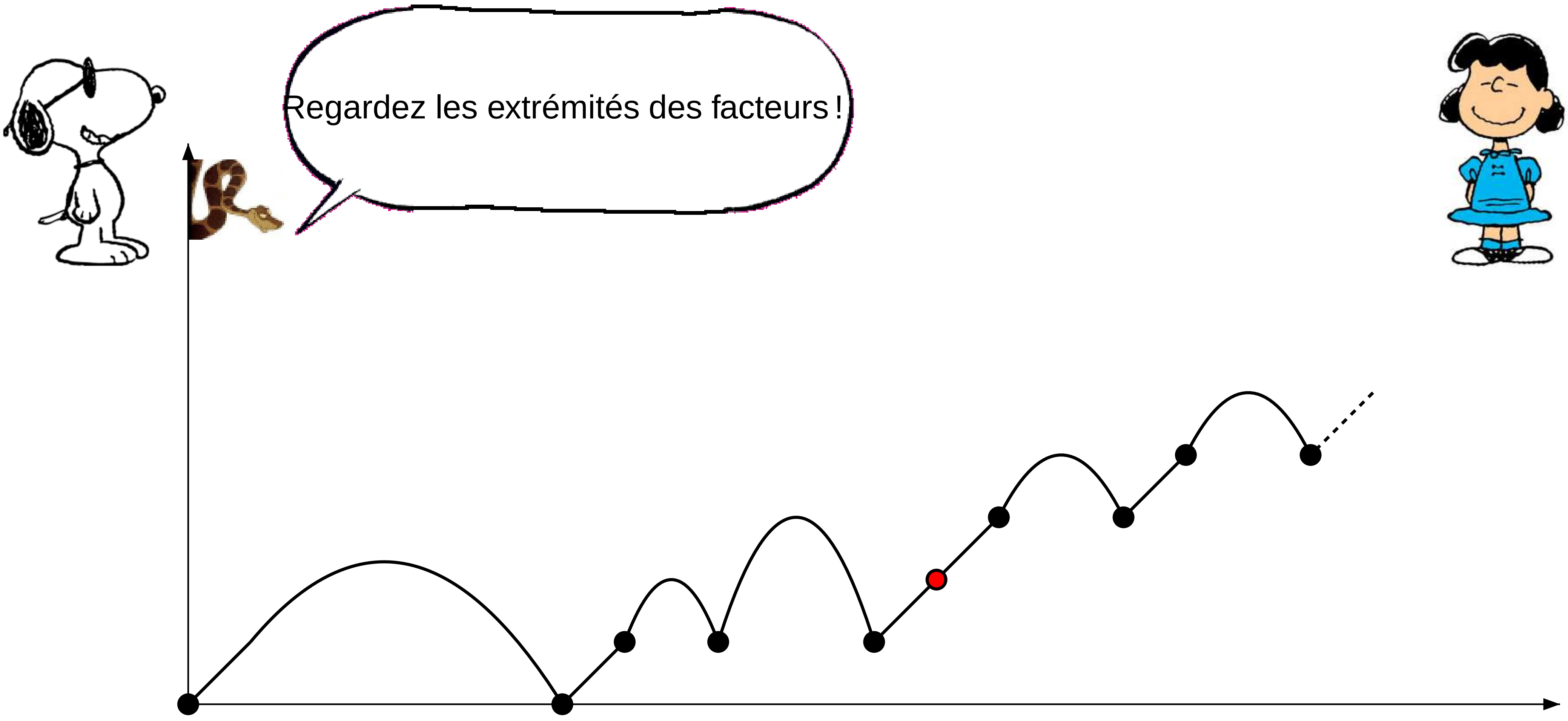



# Jeu d'accessibilité : intuition




Mais qui gagne ?
Mais qui gagne ?

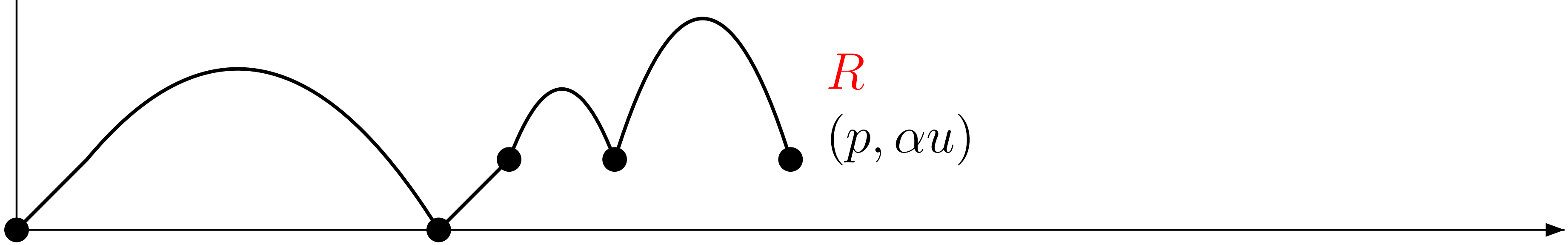
# Jeu d'accessibilité : intuition



# Mais c'est un jeu sur un graphe fini !

Les informations importantes :

- l'état de contrôle ($p$) et son caractère final ou non
- le sommet de pile ($\alpha$)
- le dernier ensemble annoncé par Eve ($(R)$)



# Mais c'est un jeu sur un graphe fini !

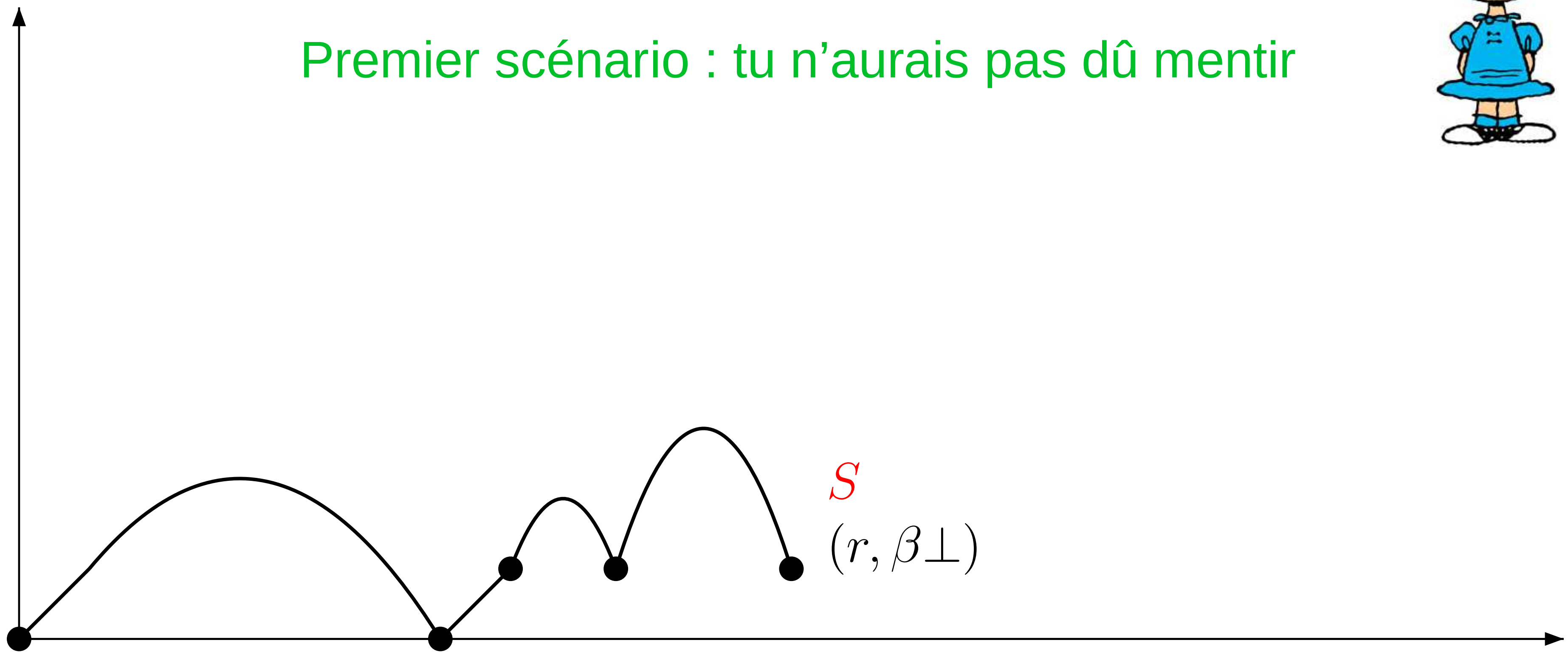
$$(p, \alpha, R)$$

Les informations importantes :

- l'état de contrôle ($p$) et son caractère final ou non
- le sommet de pile ($\alpha$)
- le dernier ensemble annoncé par Eve (($R$))

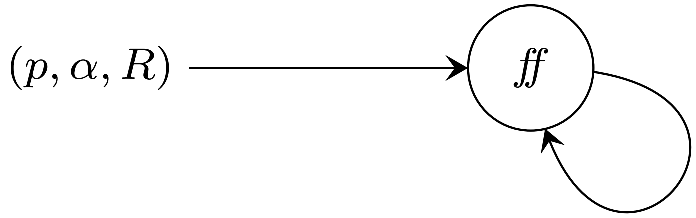
# Mais c’est un jeu sur un graphe fini !


Premier scénario : tu n’aurais pas dû mentir

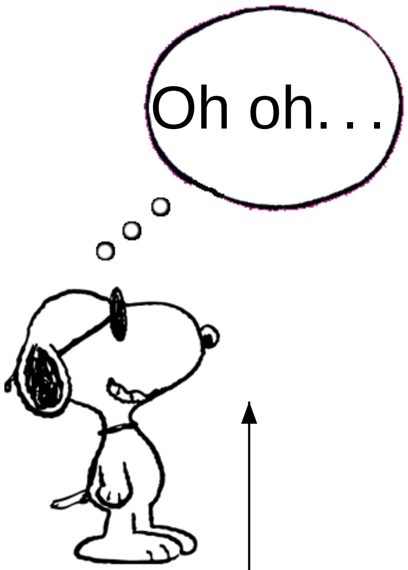


# Mais c'est un jeu sur un graphe fini !

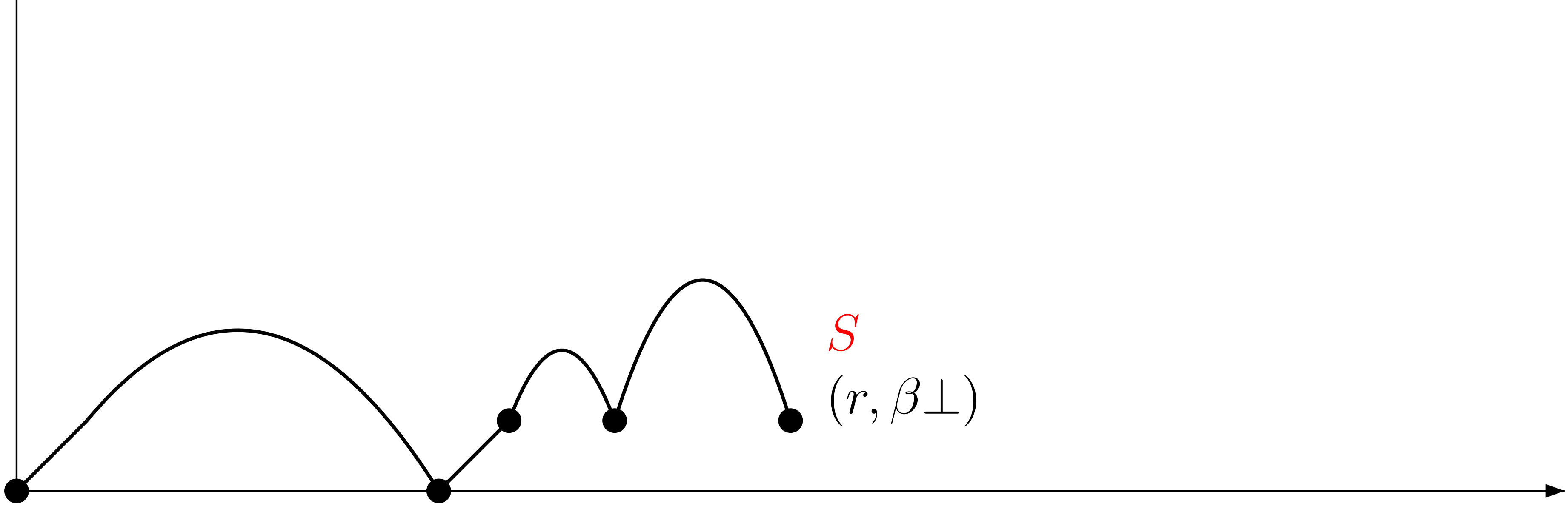
Si $\exists\, pop(r) \in \Delta(p, \alpha)$ t.q. $r \notin R$



# Mais c’est un jeu sur un graphe fini !



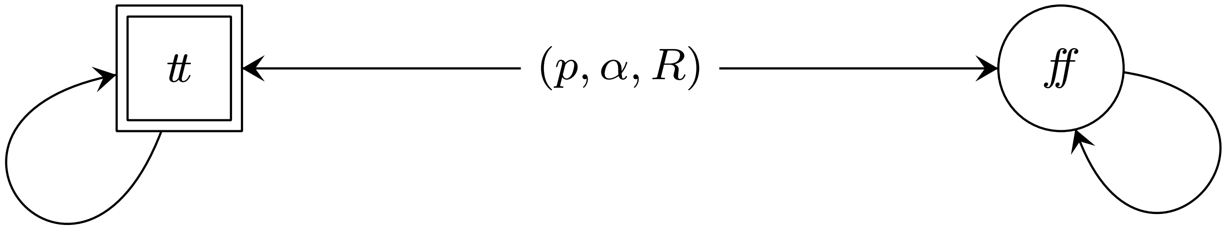

Second scénario : tu aurais dû me croire



# Mais c'est un jeu sur un graphe fini !

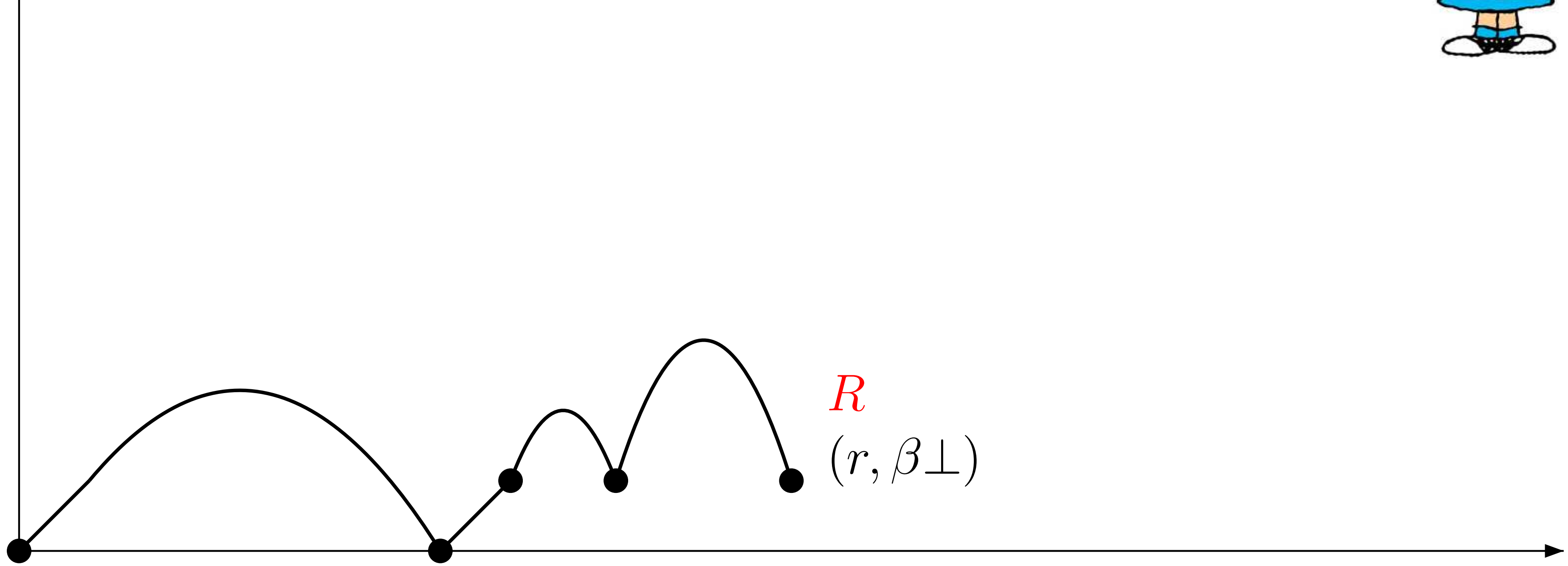
Si $\exists\, pop(r) \in \Delta(p,\alpha)$ t.q. $r \in R$

Si $\exists\, pop(r) \in \Delta(p,\alpha)$ t.q. $r \notin R$

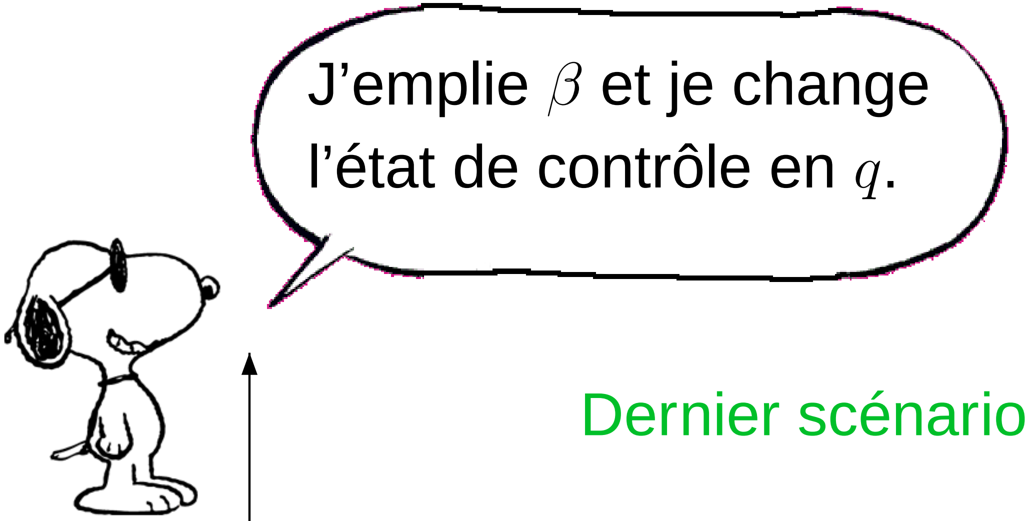


# Mais c’est un jeu sur un graphe fini !

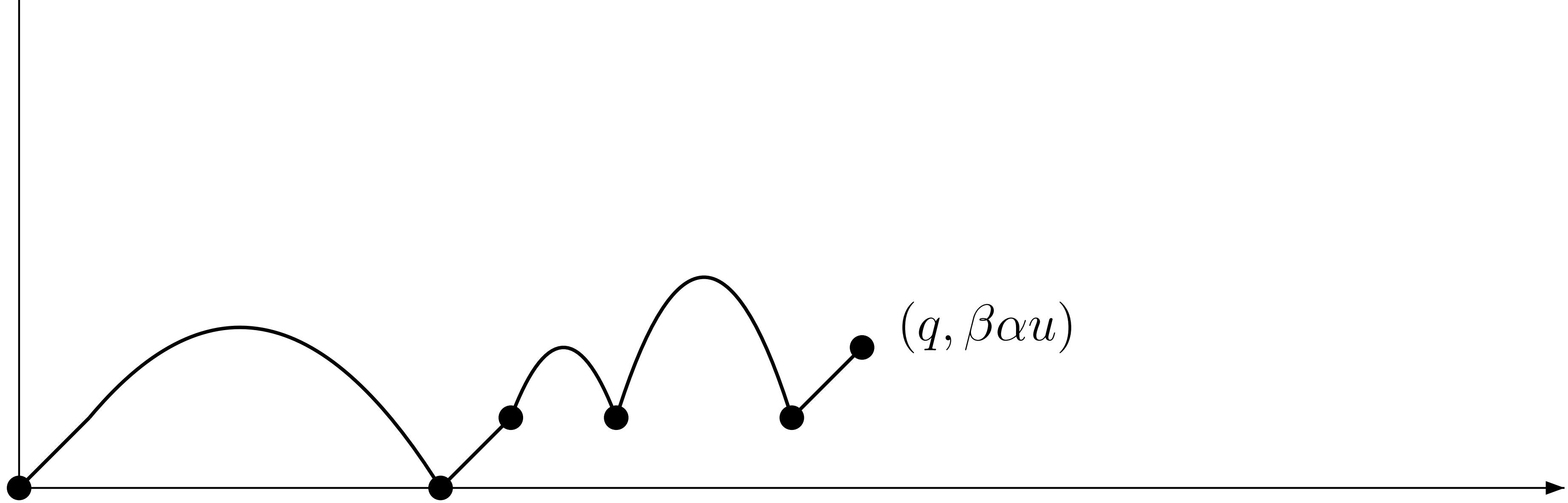
Dernier scénario : le monde parfait



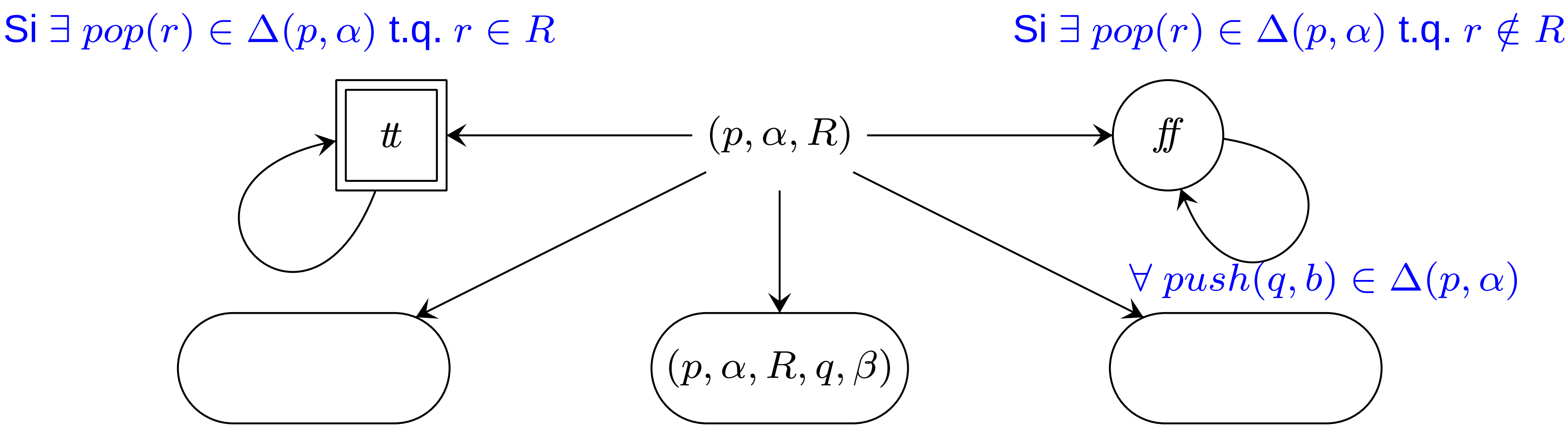

# Mais c’est un jeu sur un graphe fini !



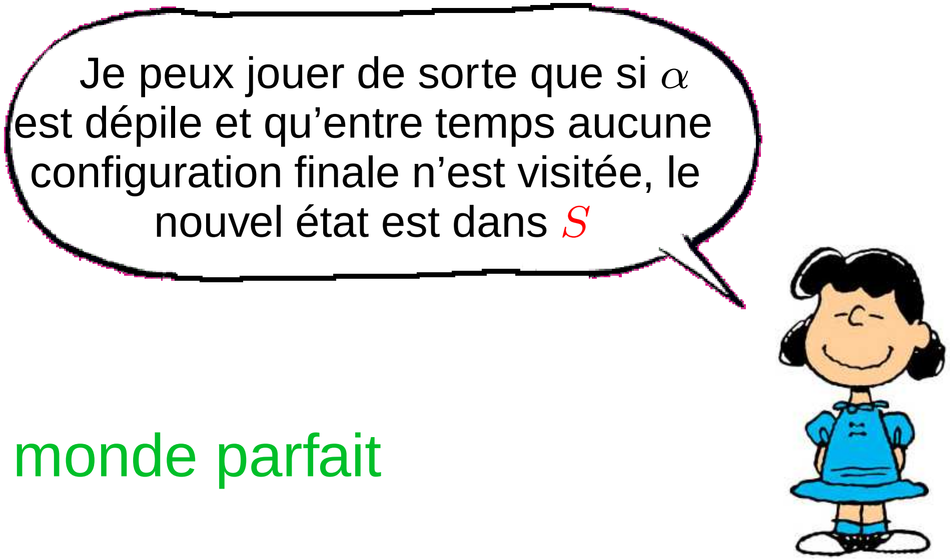

Dernier scénario : le monde parfait



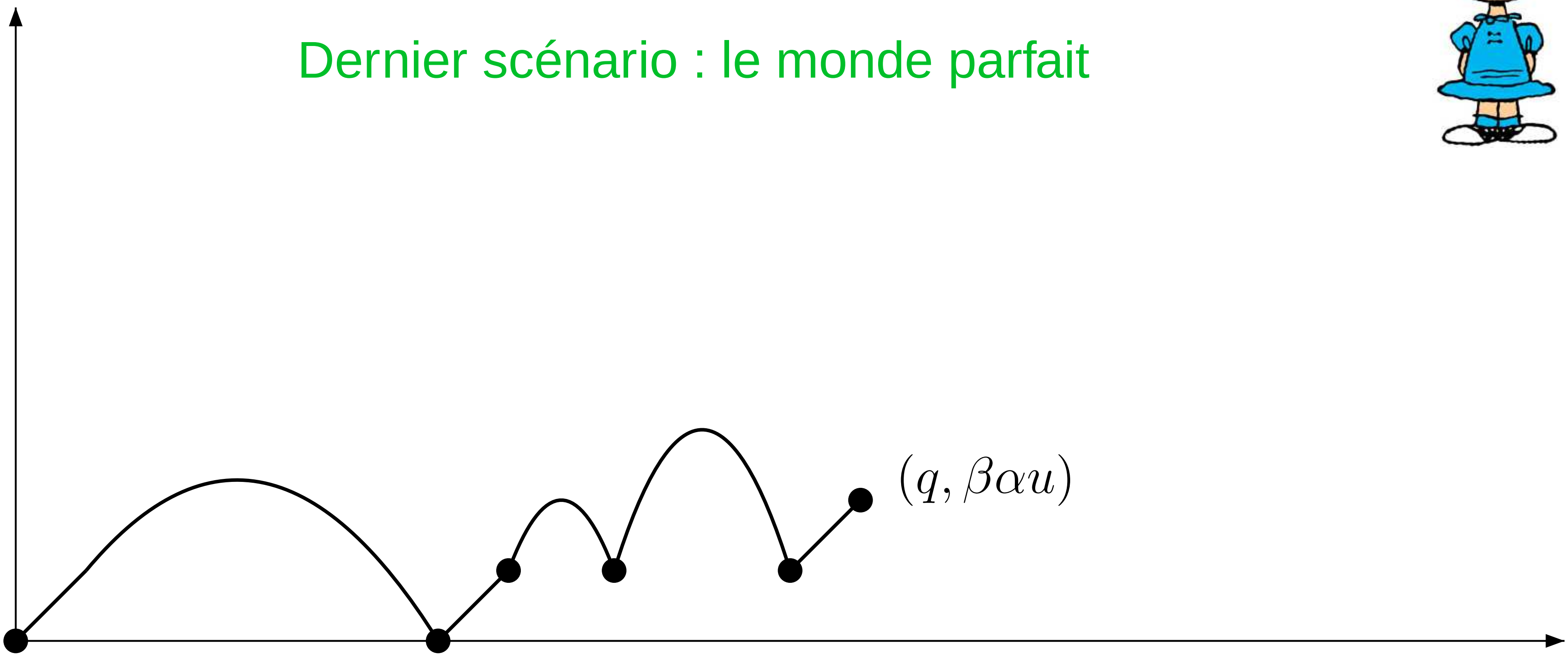
# Mais c'est un jeu sur un graphe fini !



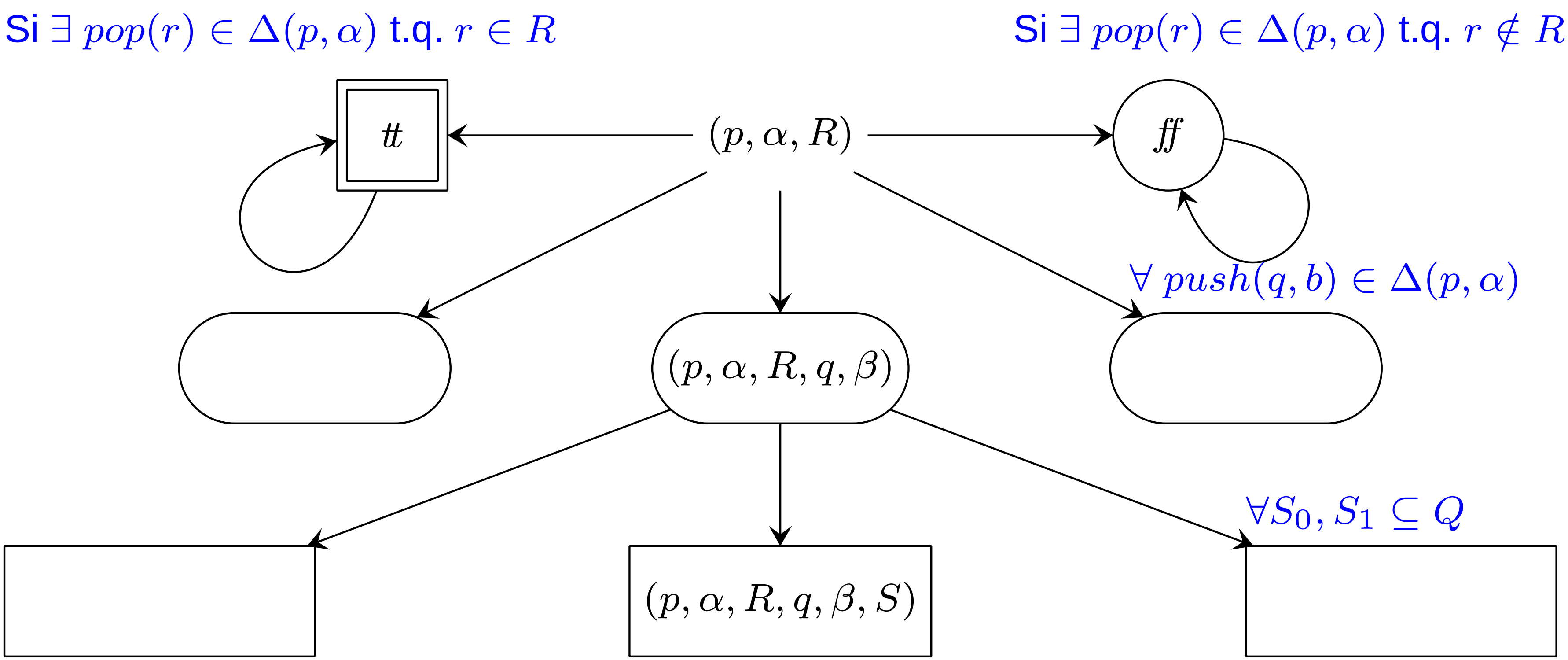
# Mais c'est un jeu sur un graphe fini !



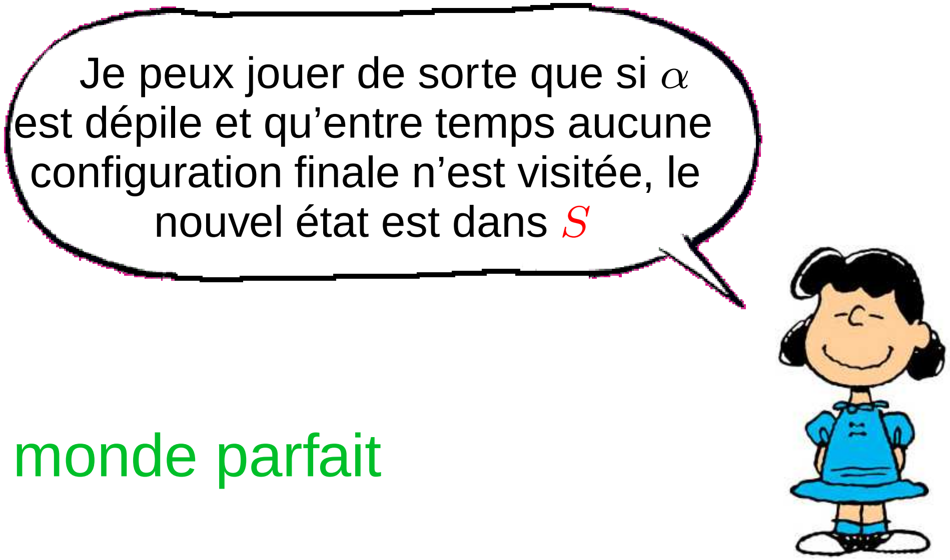

Dernier scénario : le monde parfait



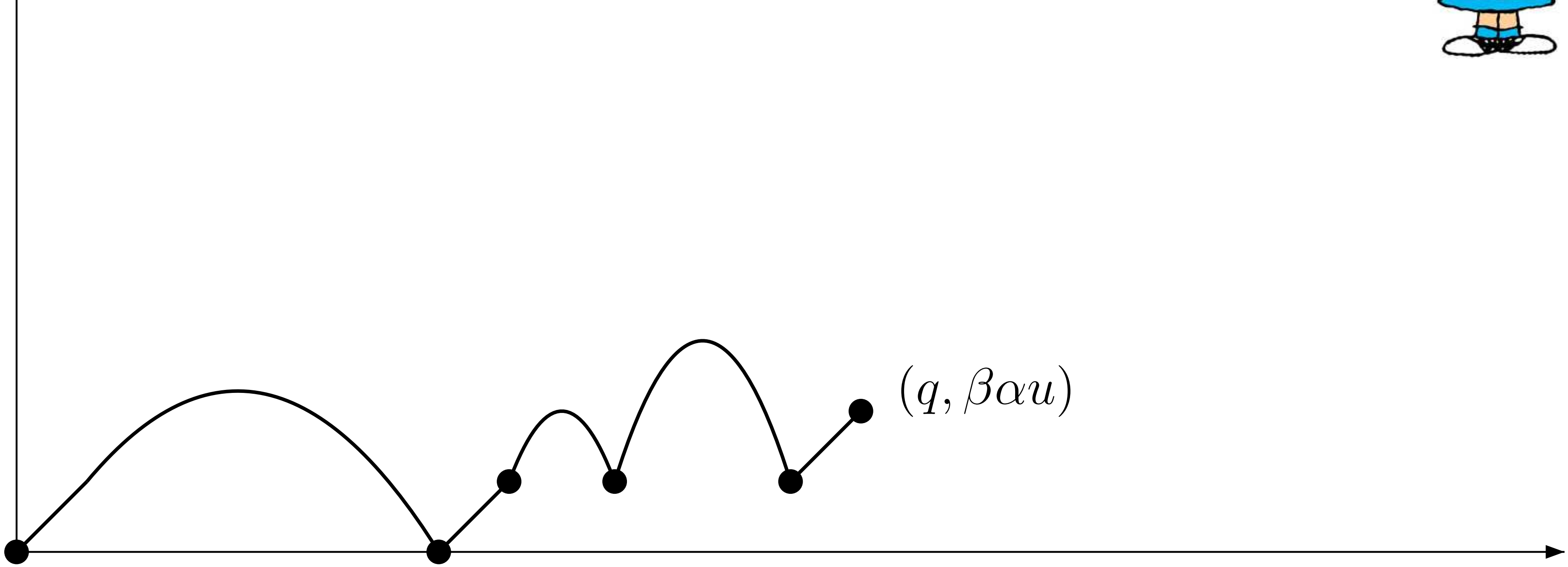
# Mais c'est un jeu sur un graphe fini !



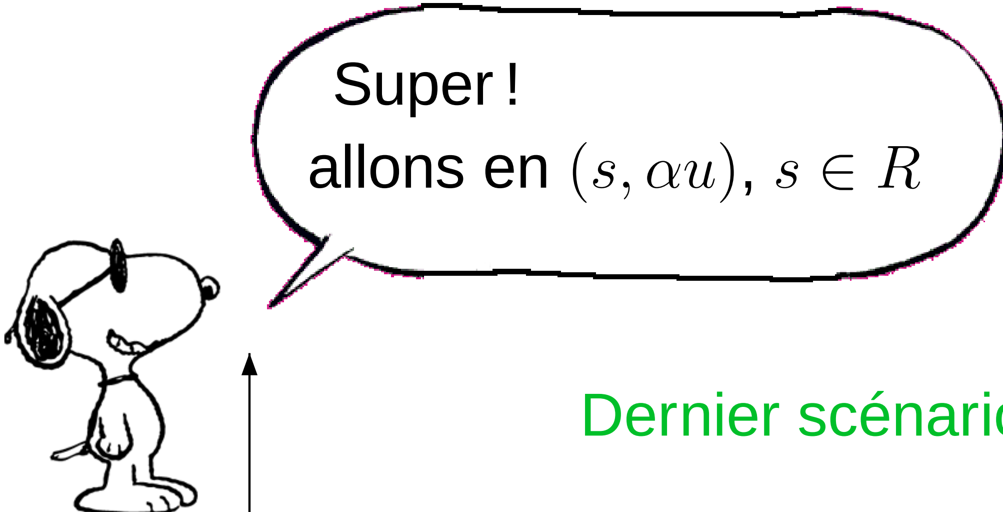
# Mais c’est un jeu sur un graphe fini !



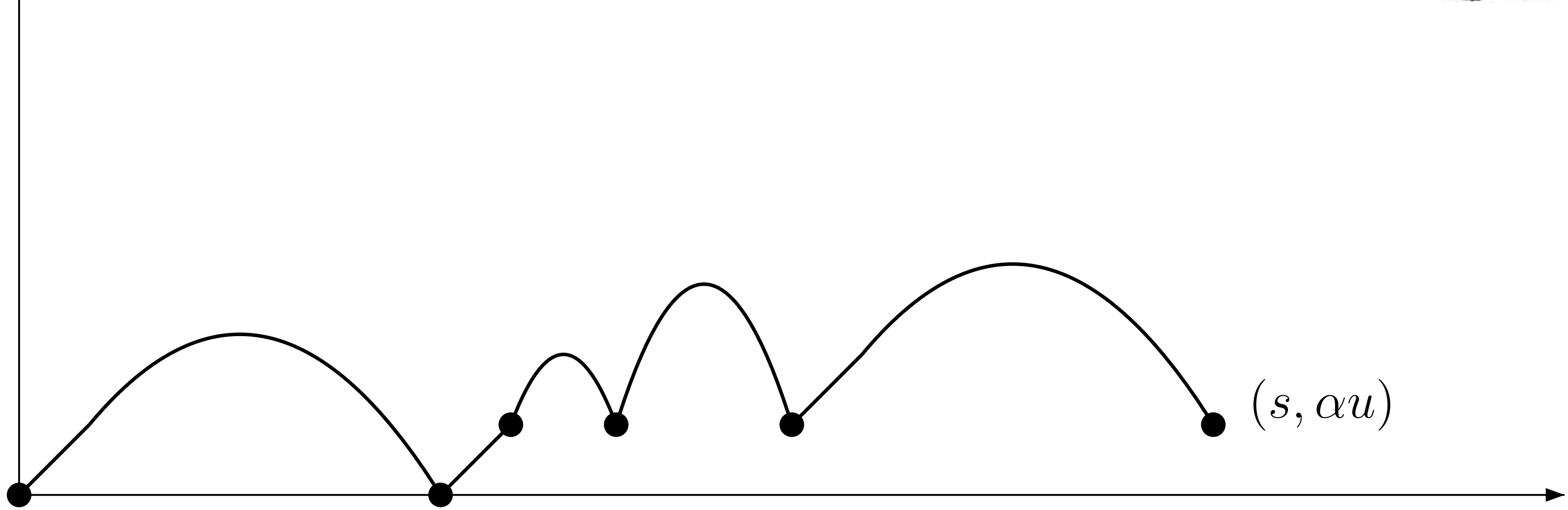

Dernier scénario : le monde parfait



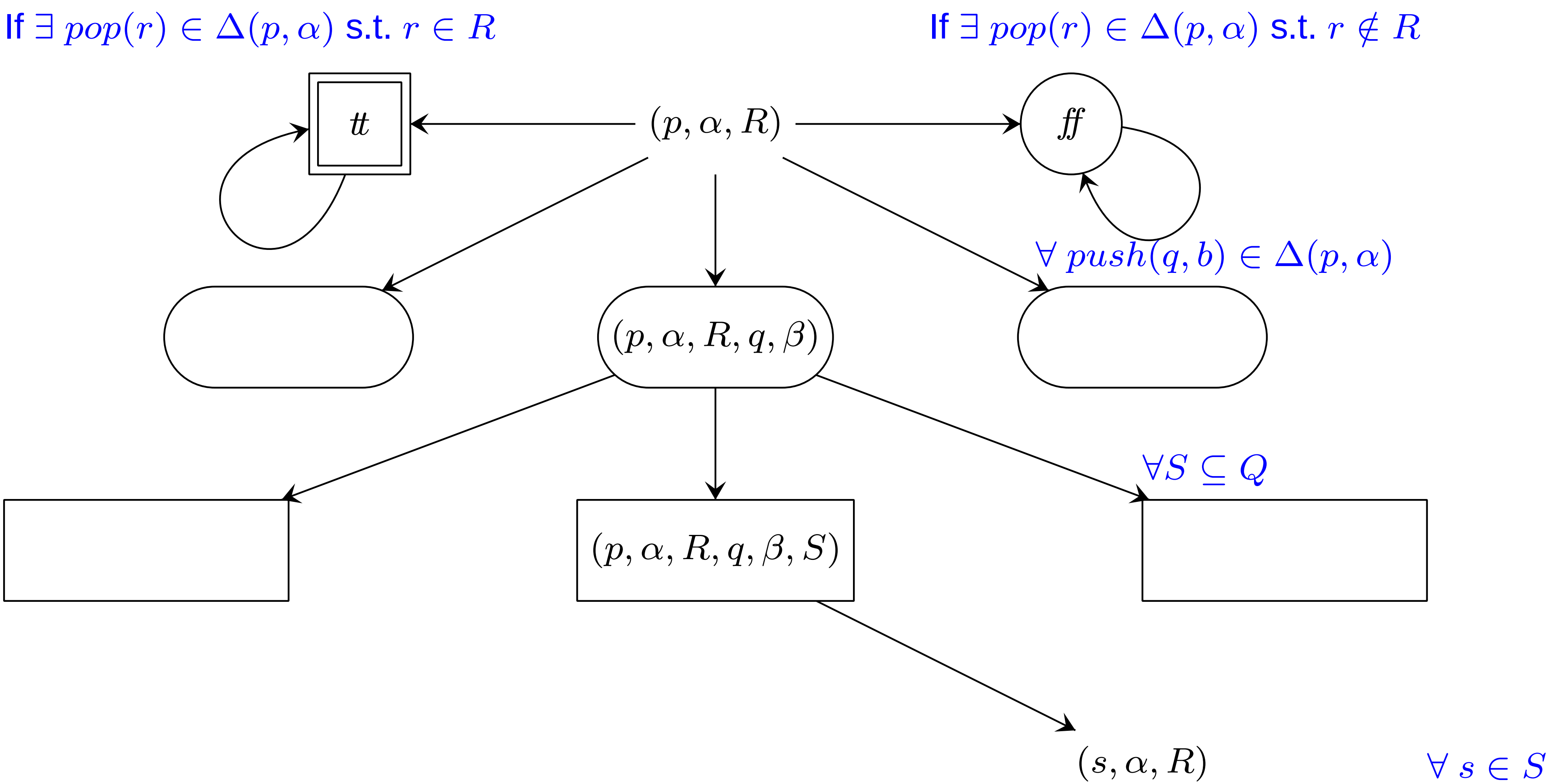
# Mais c’est un jeu sur un graphe fini !




Dernier scénario : le monde parfait



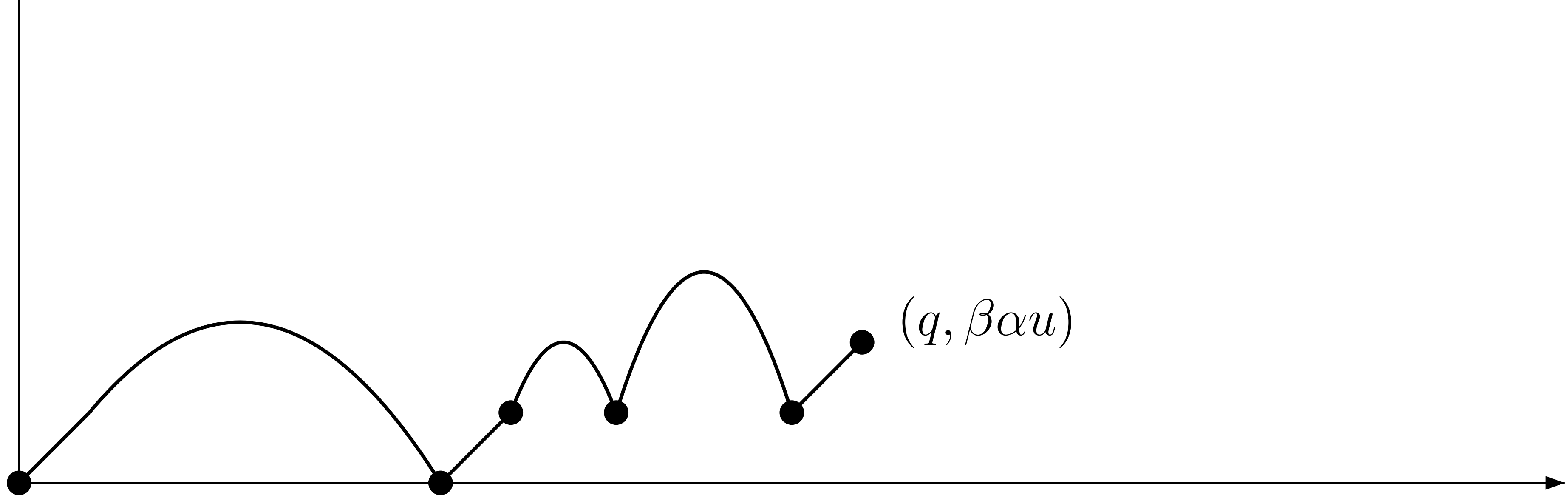
# Mais c'est un jeu sur un graphe fini !



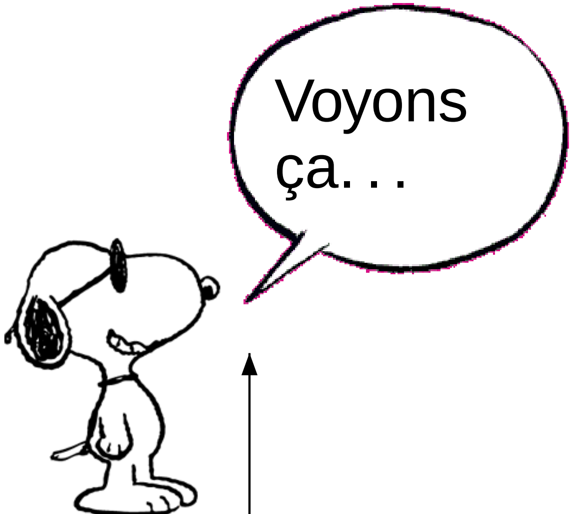
# Mais c’est un jeu sur un graphe fini !

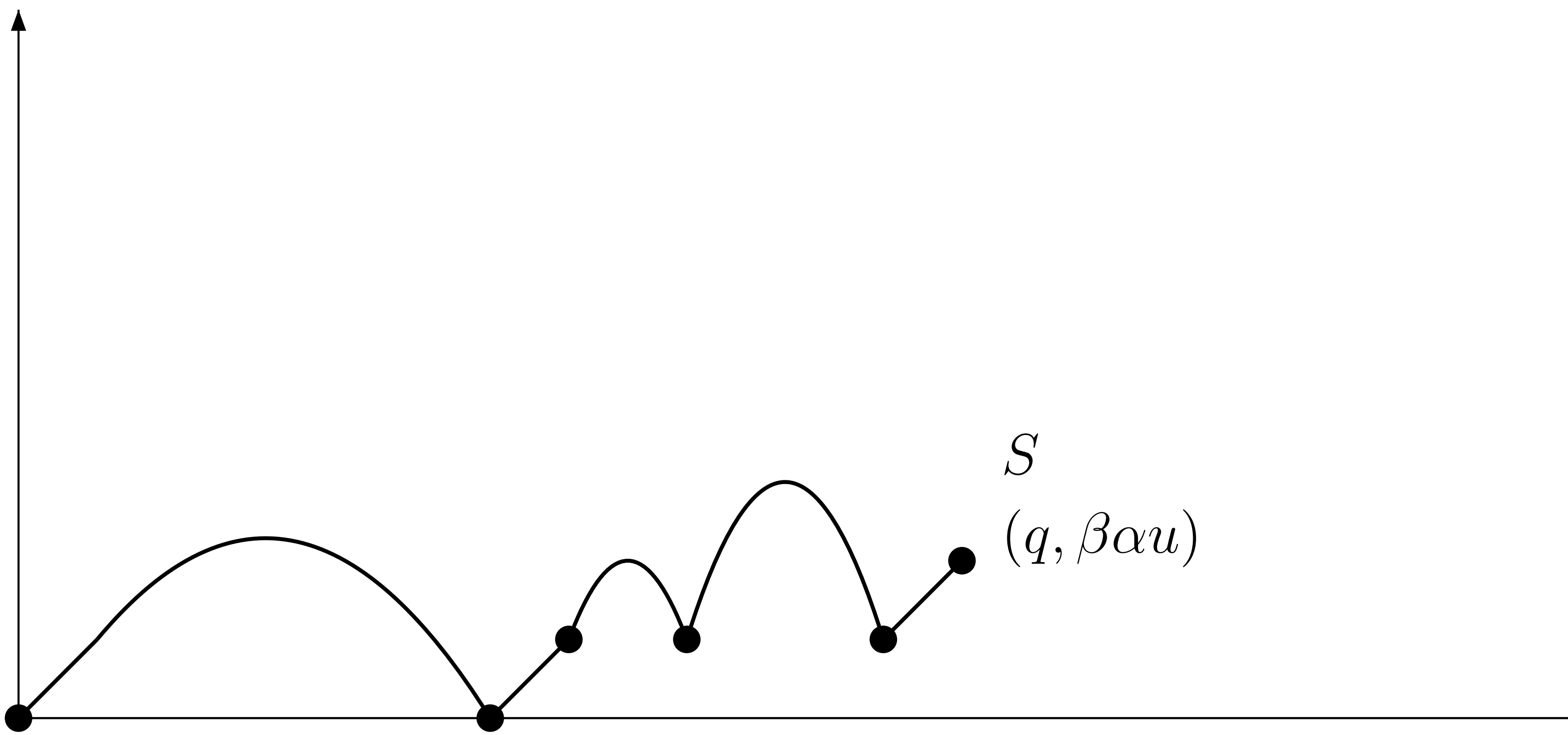
Je peux jouer de sorte que si $\alpha$ est dépile et qu’entre temps aucune configuration finale n’est visitée, le nouvel état est dans $S$

Dernier scénario : le monde parfait

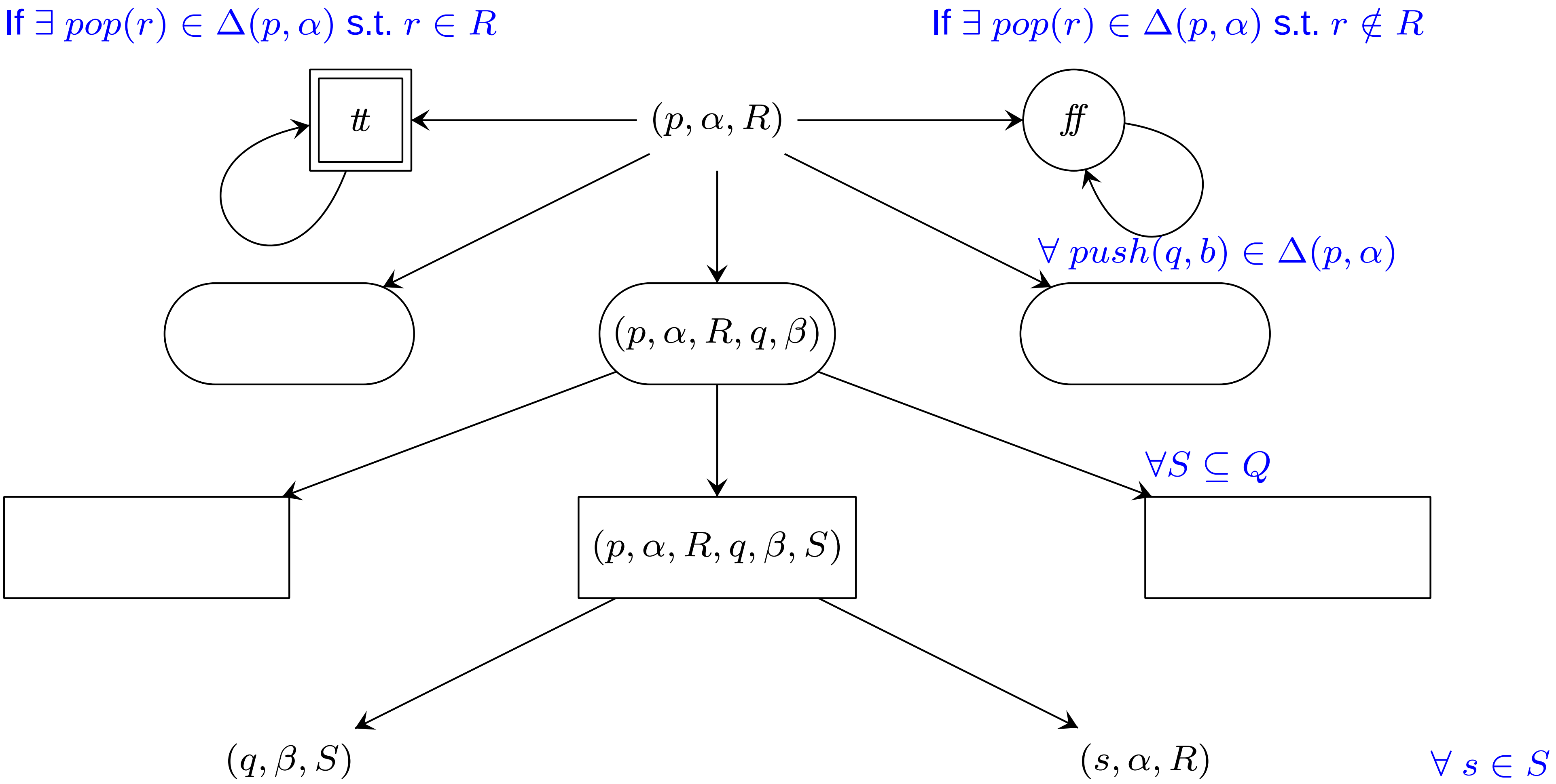


# Mais c'est un jeu sur un graphe fini !



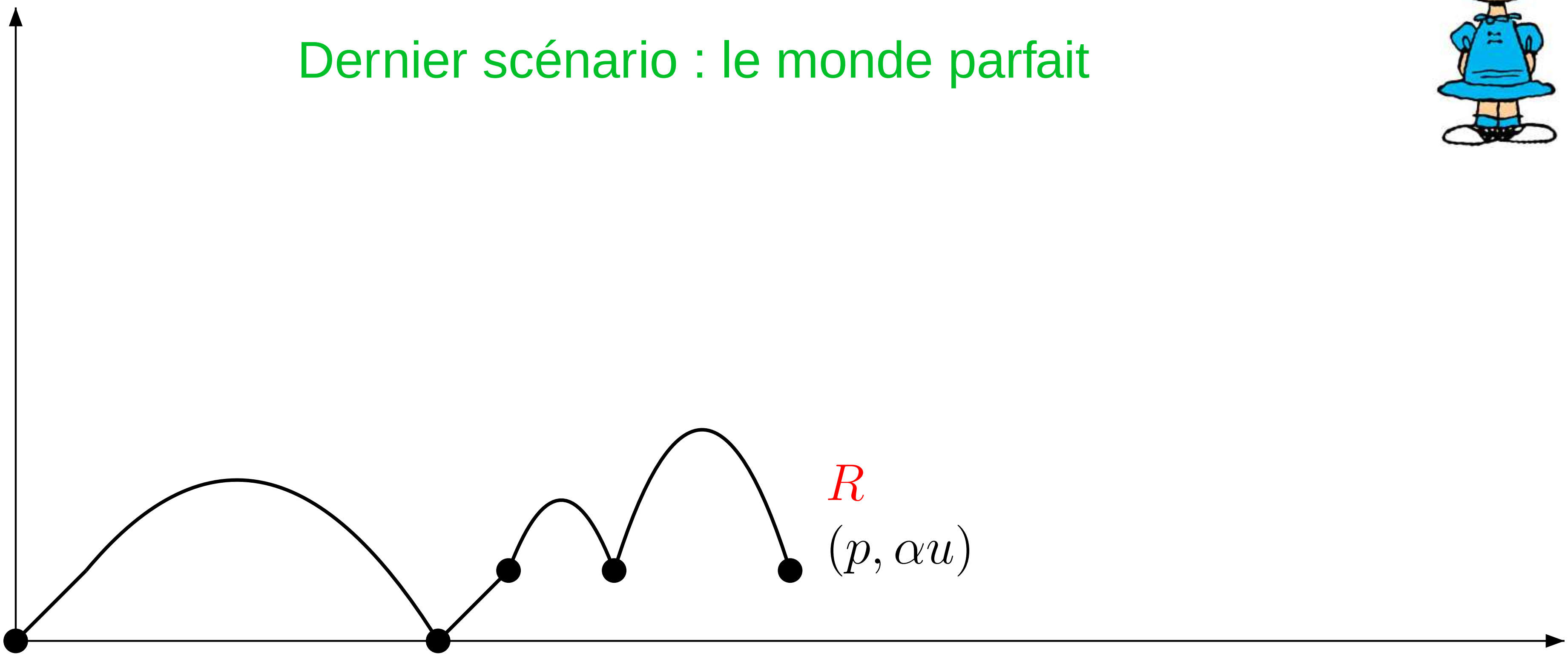



# Mais c'est un jeu sur un graphe fini !

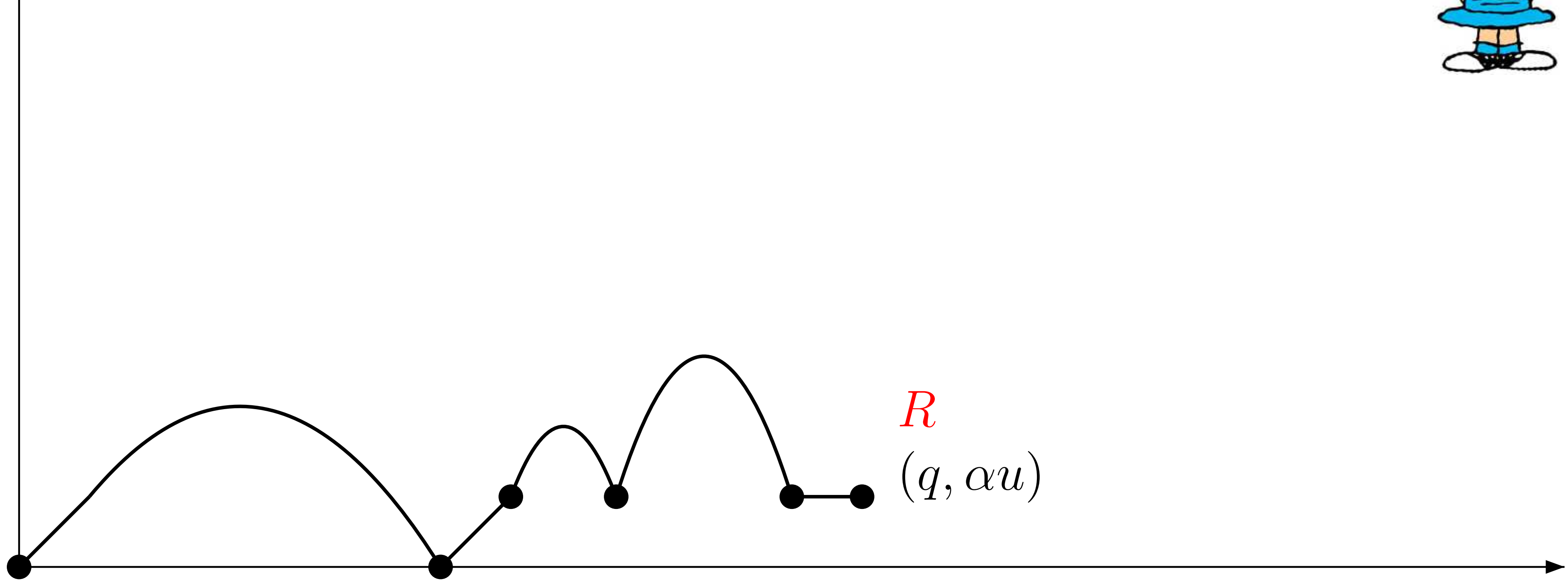


# Mais c’est un jeu sur un graphe fini !

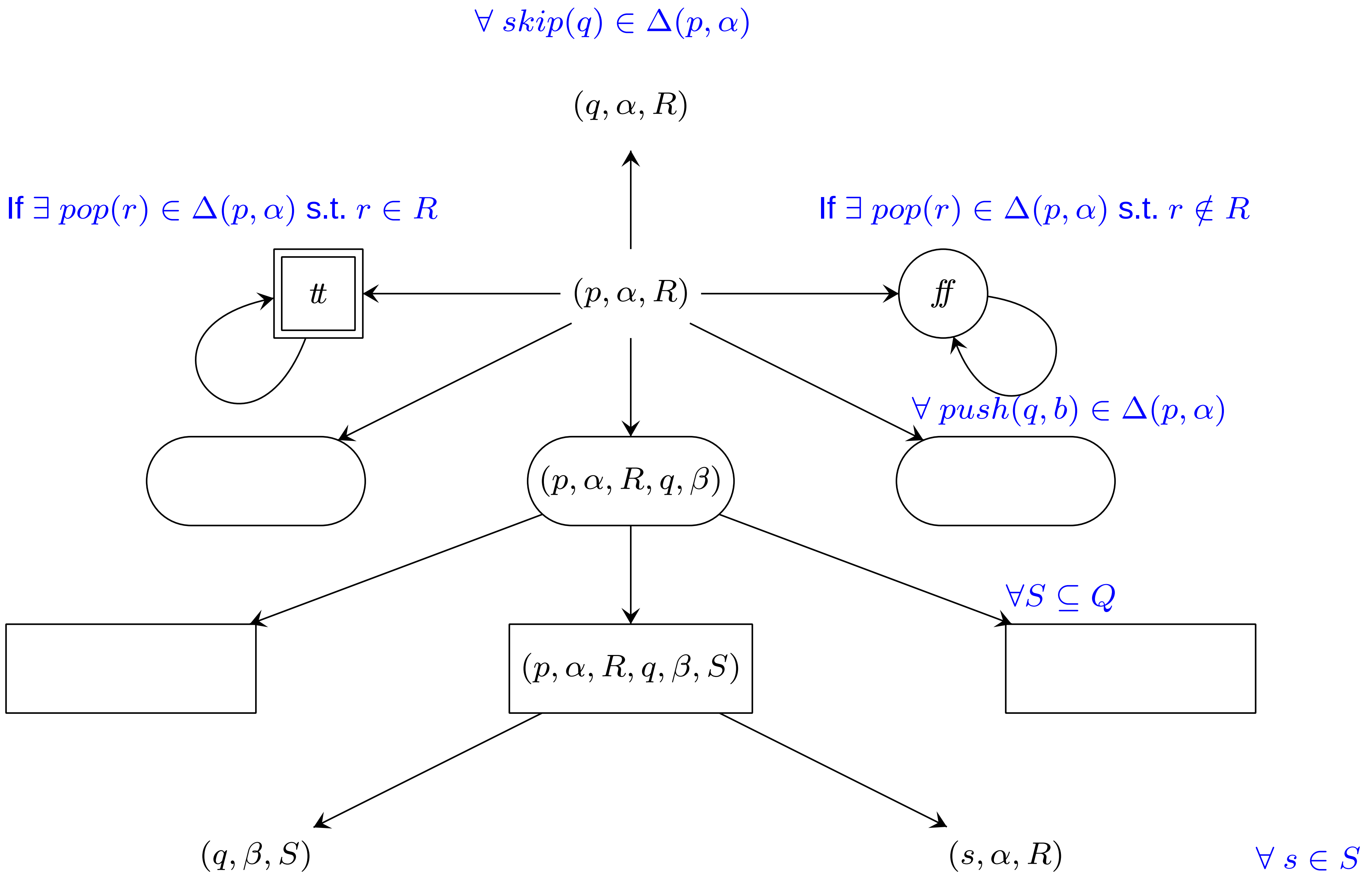
Dernier scénario : le monde parfait




# Mais c’est un jeu sur un graphe fini !

# Mais c'est un jeu sur un graphe fini !

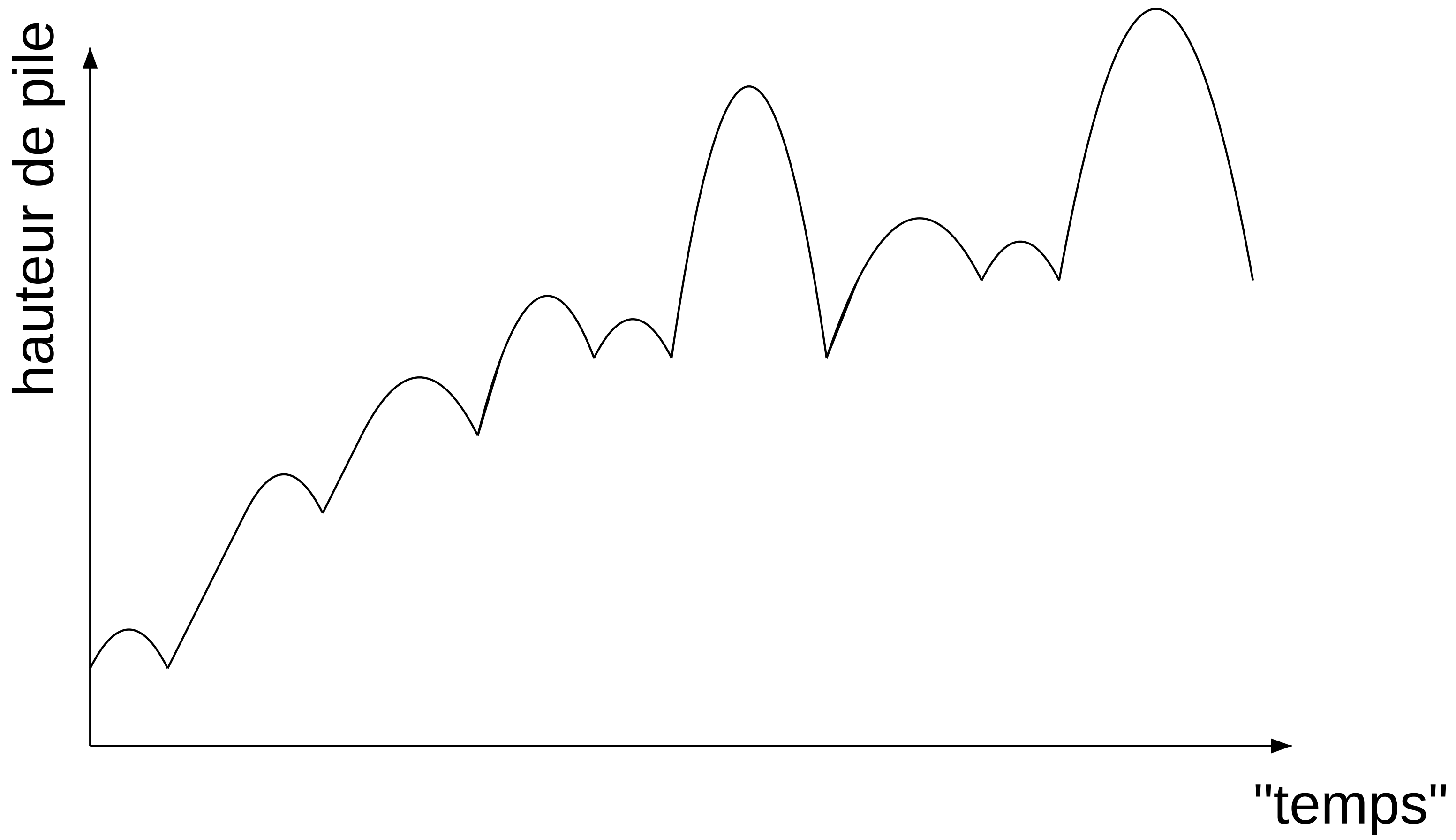


## Validité de la simulation

**Théorème.** Soit $p_{in} \in Q$. Eve possède une stratégie gagnante dans $\mathbb{G}$ depuis $(p_{in}, \perp)$ si et seulement si elle possède une stratégie gagnante dans $\widetilde{\mathbb{G}}$ depuis $(p_{in}, \perp, \emptyset)$.

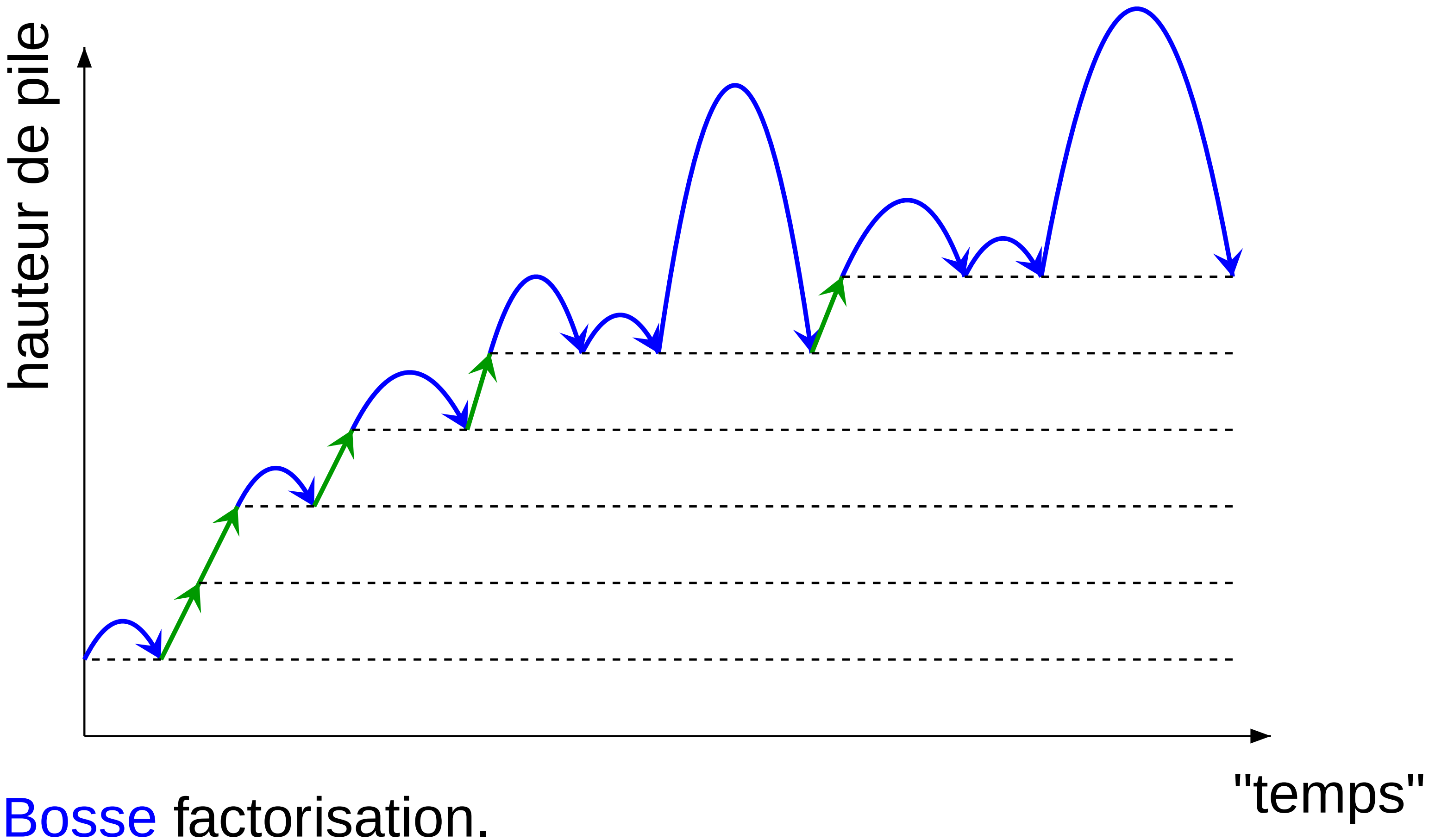
# Représentation graphique d'une partie, factorisation

## Montrer l'évolution de la hauteur de pile



# Représentation graphique d'une partie, factorisation

## Montrer l'évolution de la hauteur de pile




Marche / Bosse factorisation.

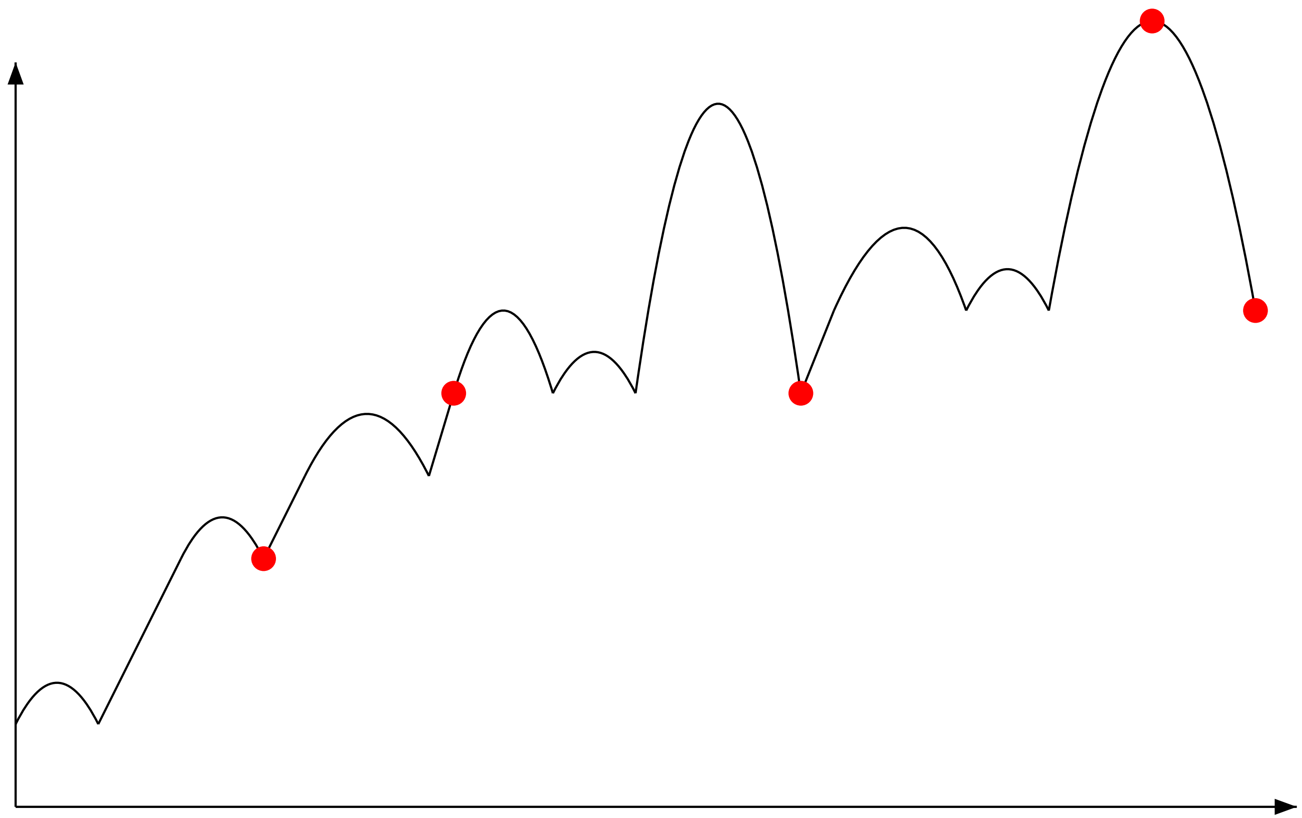
**Théorème** Décider le gagnant dans un jeu d'accessibilité sur un graphe de processus à pile depuis une configuration quelconque est un problème EXPTIME-complet.

# Büchi, Parité ?

**Théorème** Décider le gagnant dans un jeu de parité sur un graphe de processus à pile depuis une configuration quelconque est un problème EXPTIME-complet.

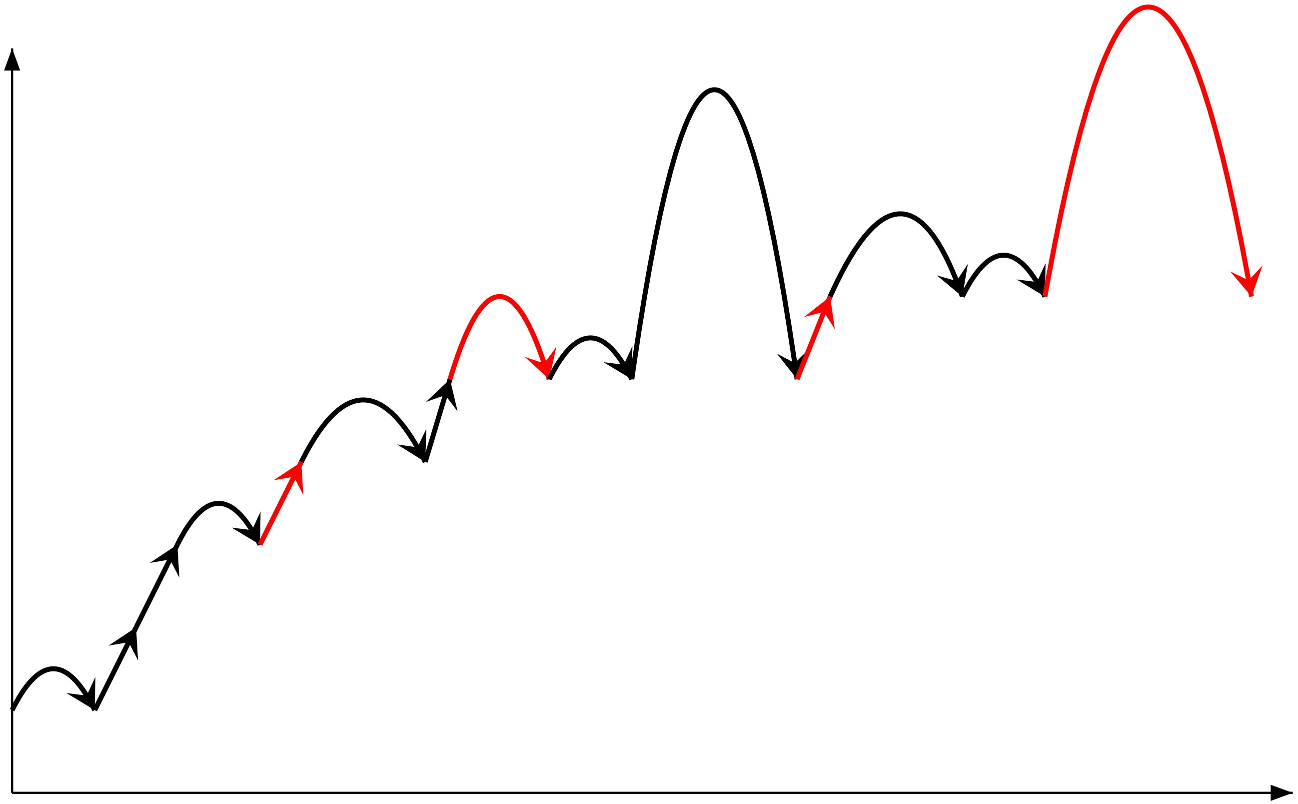
# Un peu d’intuition pour le cas des jeux de Büchi (1/3)

**Condition de Büchi :** visiter infiniment souvent une configuration avec un état de contrôle final.



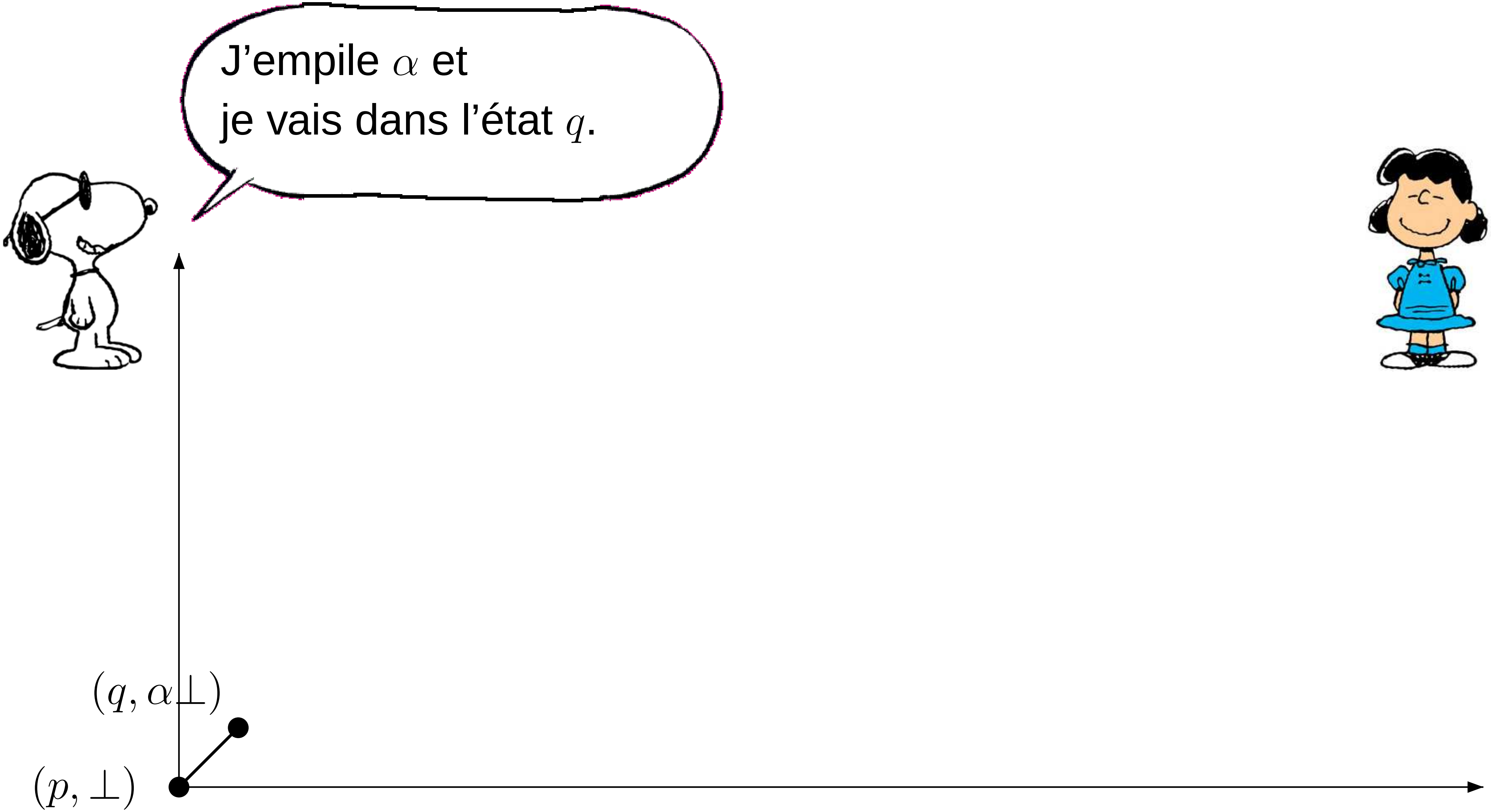
# Un peu d'intuition pour le cas des jeux de Büchi (1/3)

**Condition de Büchi :** il existe une infinité de facteurs finaux.



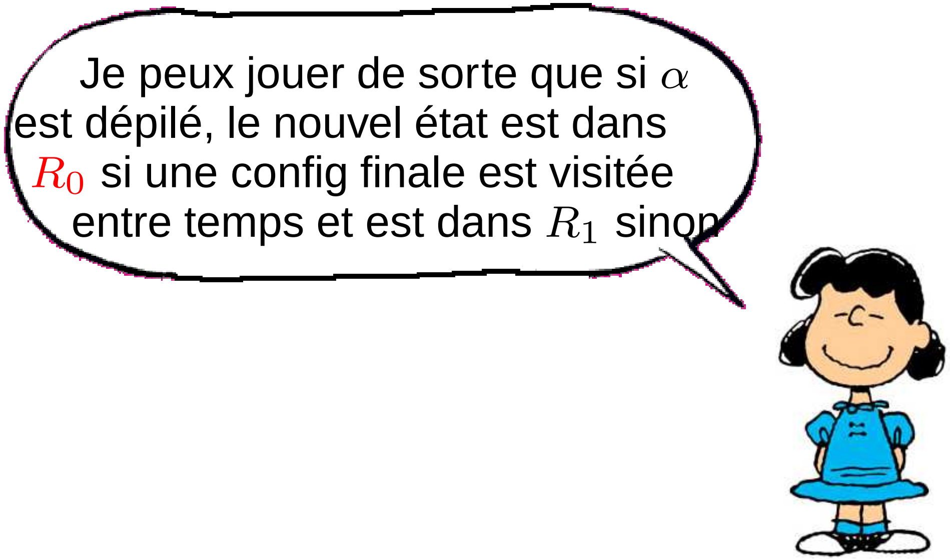
# Un peu d’intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)

# Un peu d'intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)

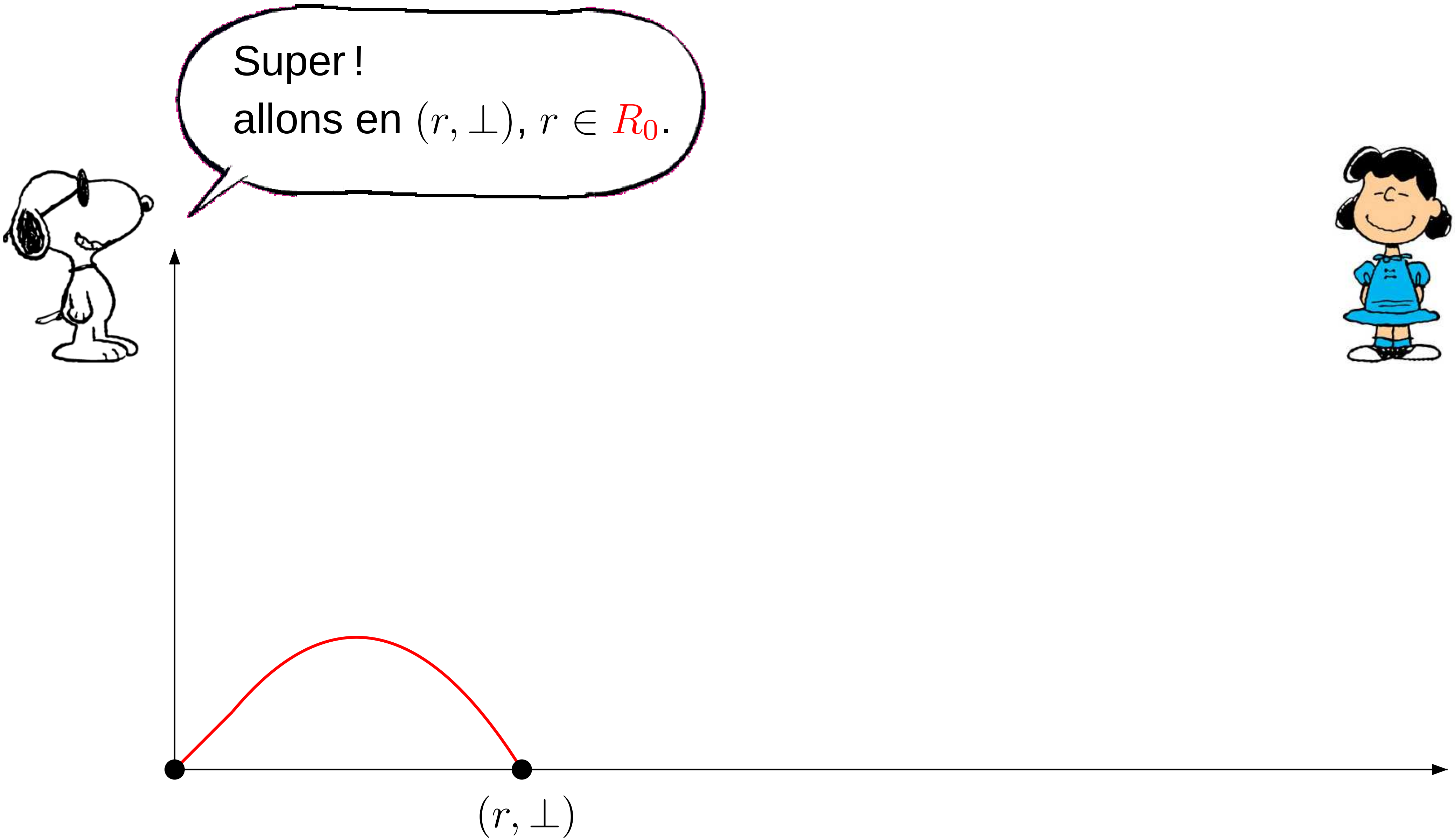


# Un peu d'intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)

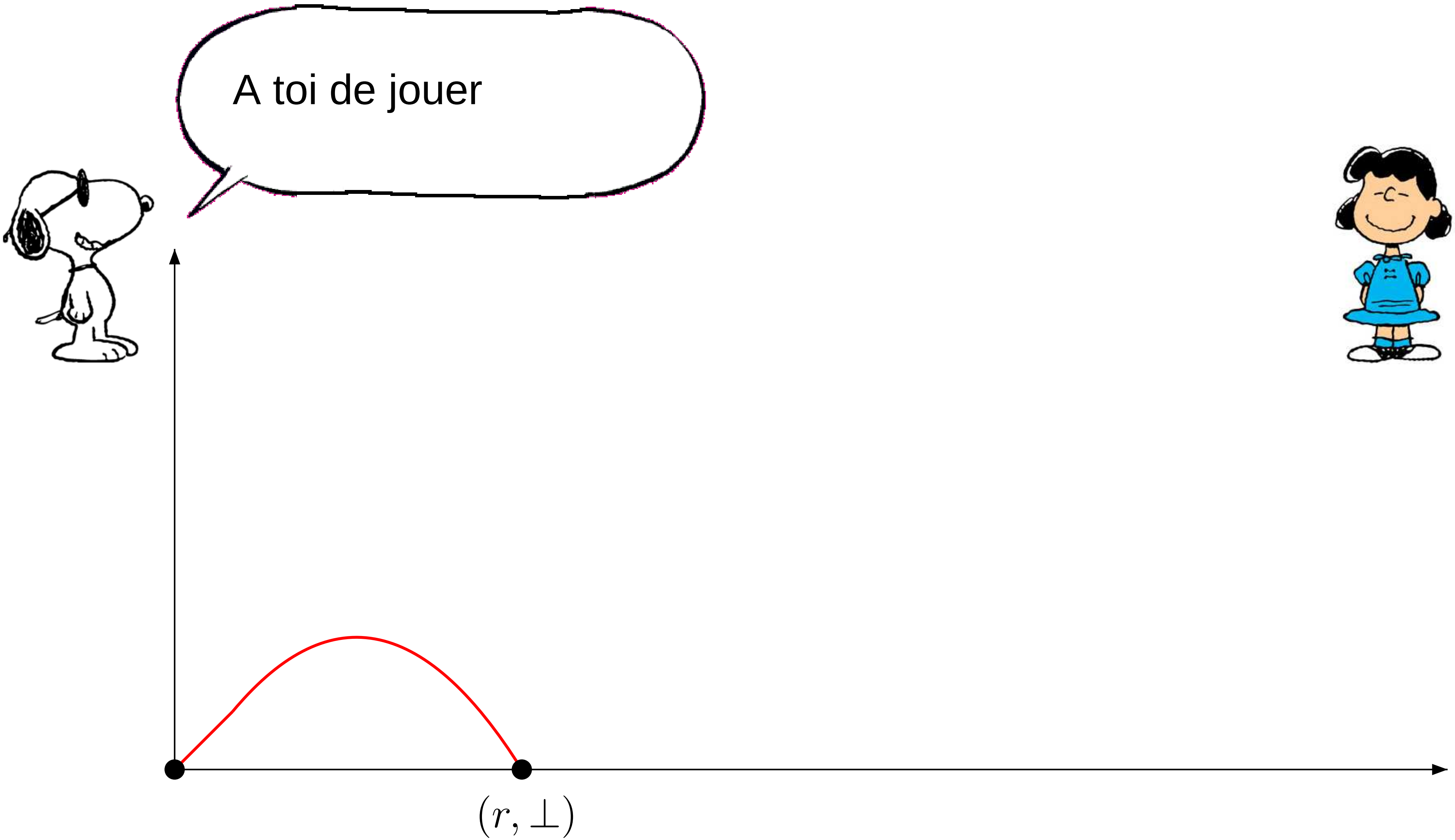
# Un peu d'intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)



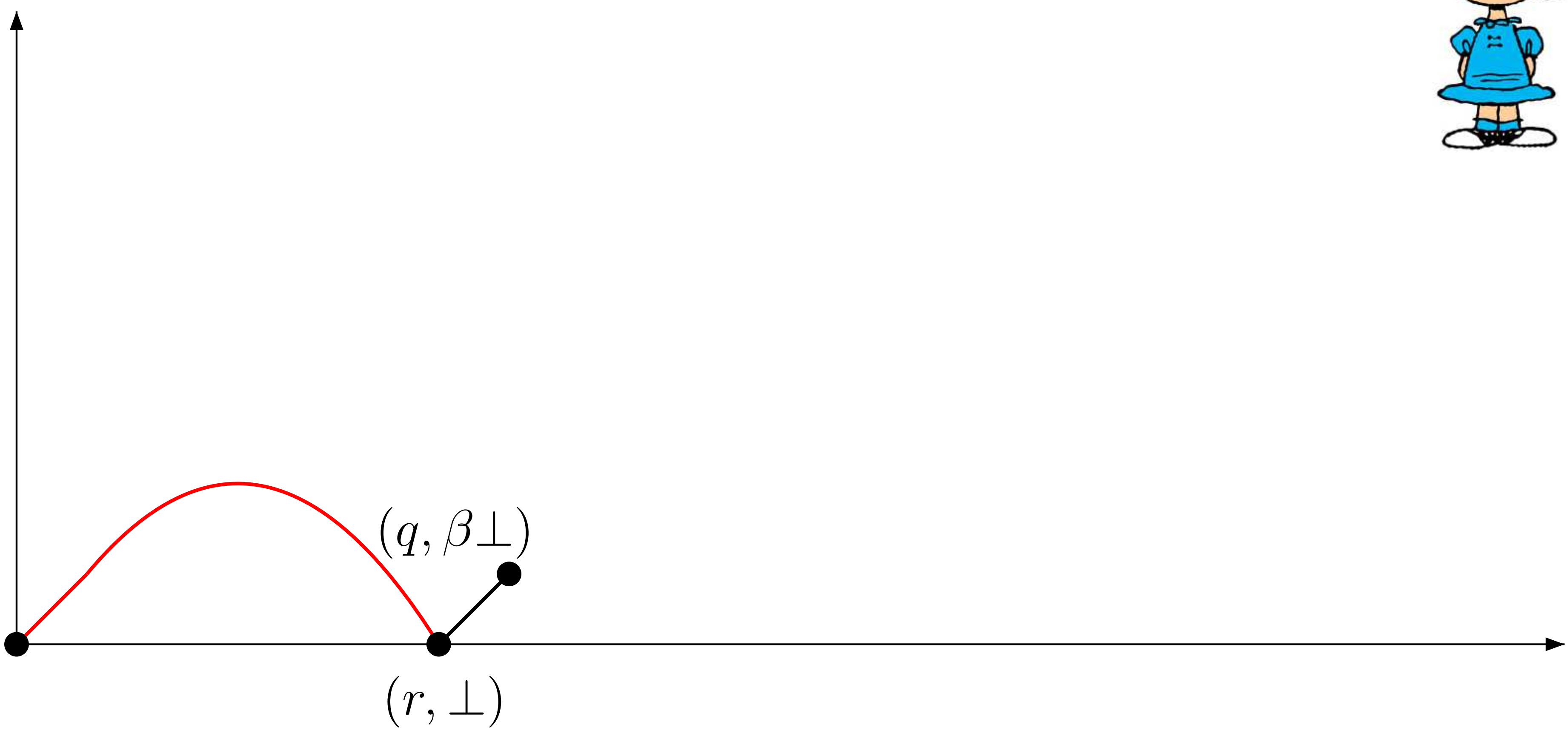

# Un peu d'intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)



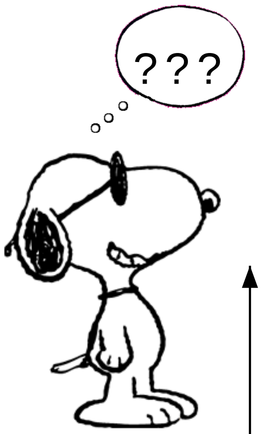
# Un peu d’intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)

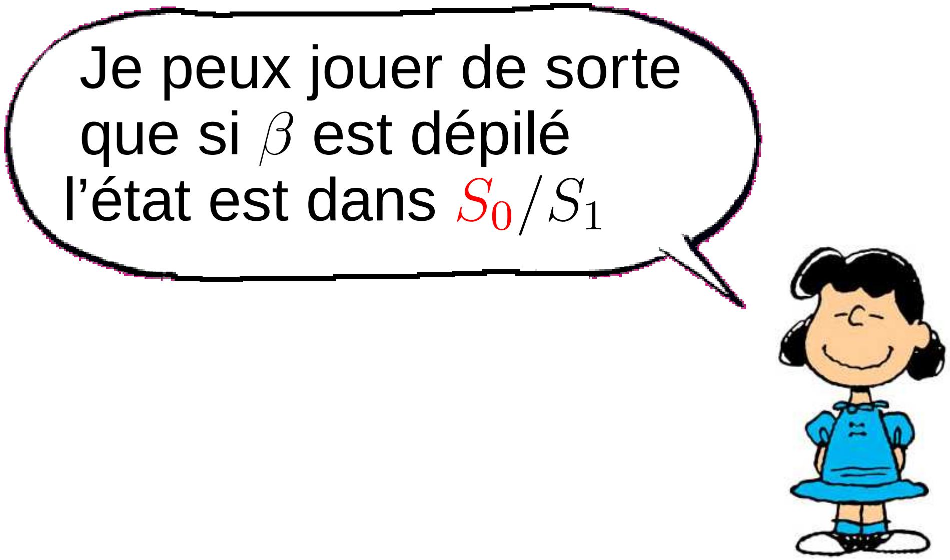


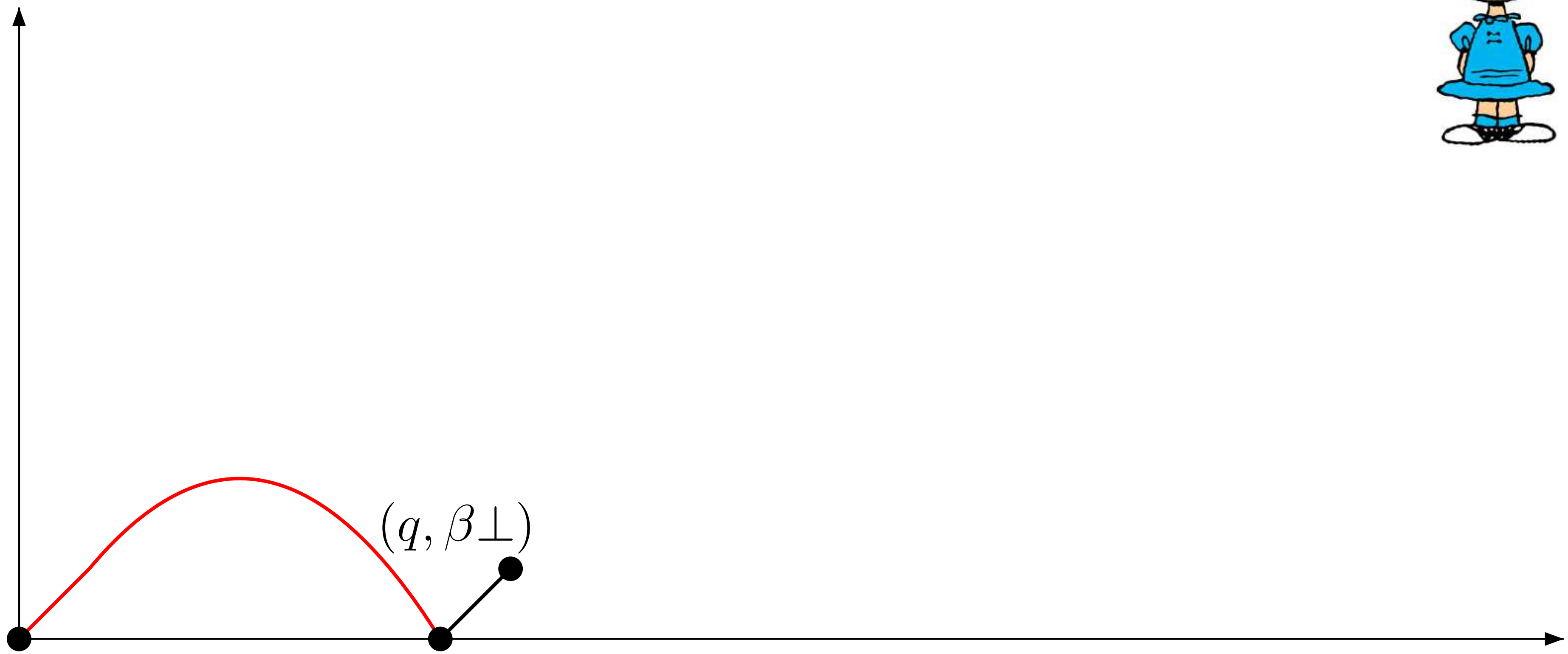
# Un peu d’intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)

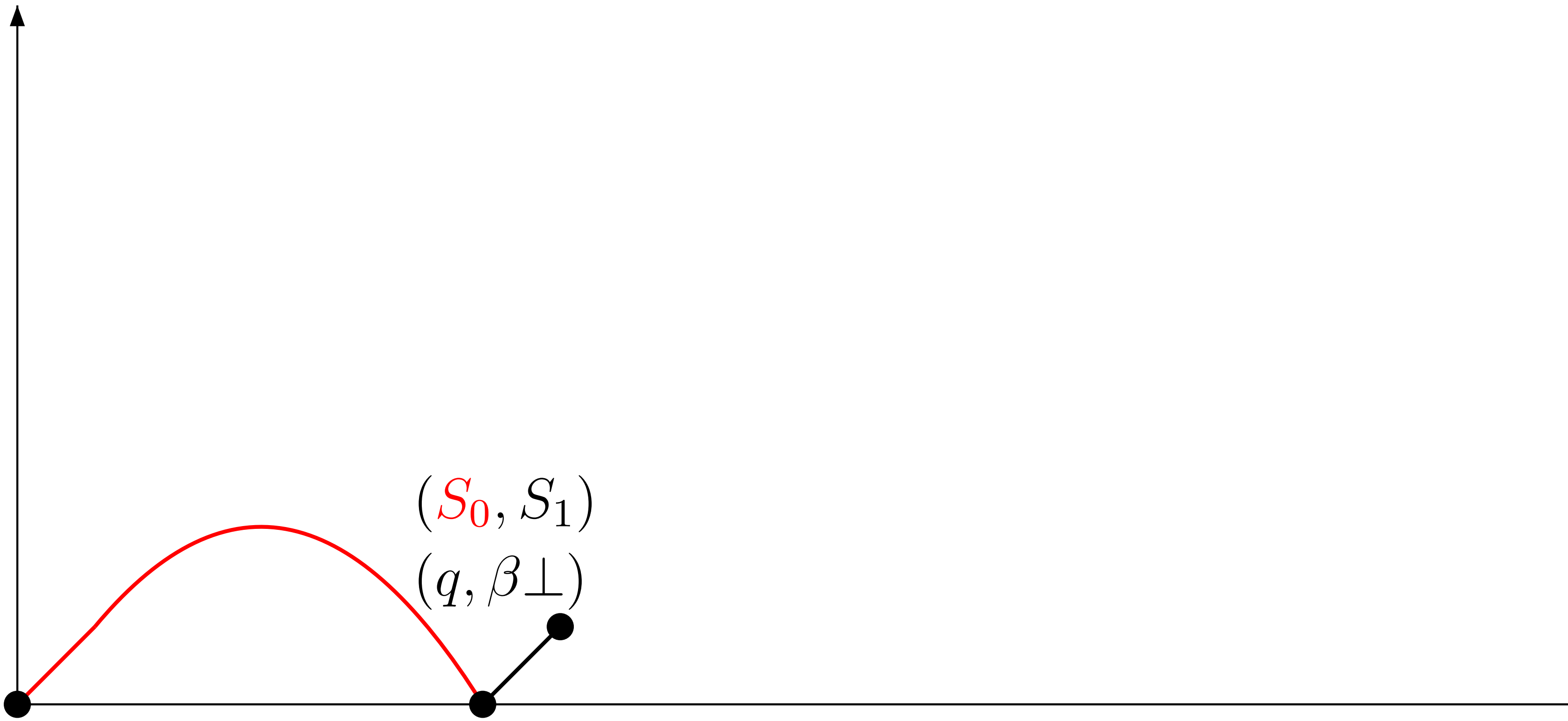
# Un peu d'intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)



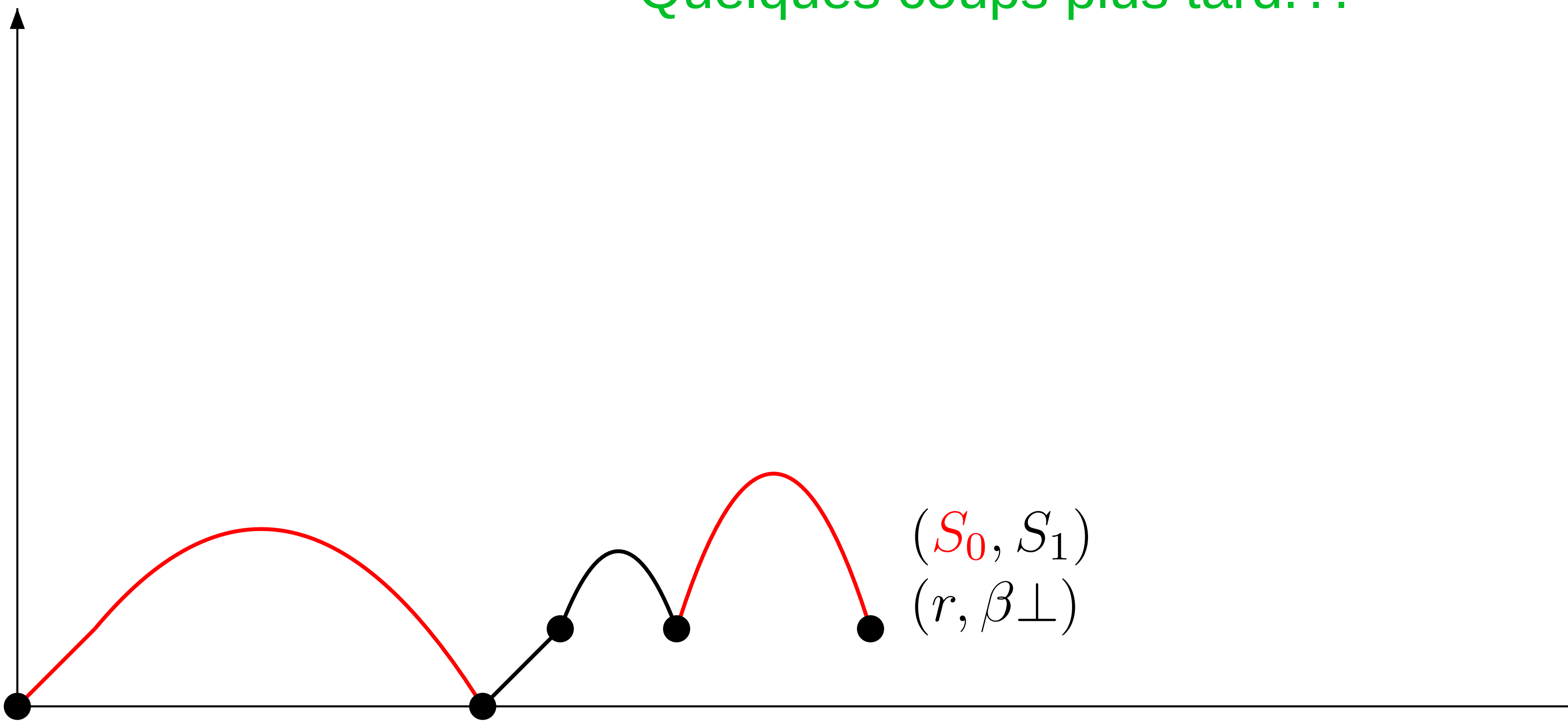



# Un peu d'intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)

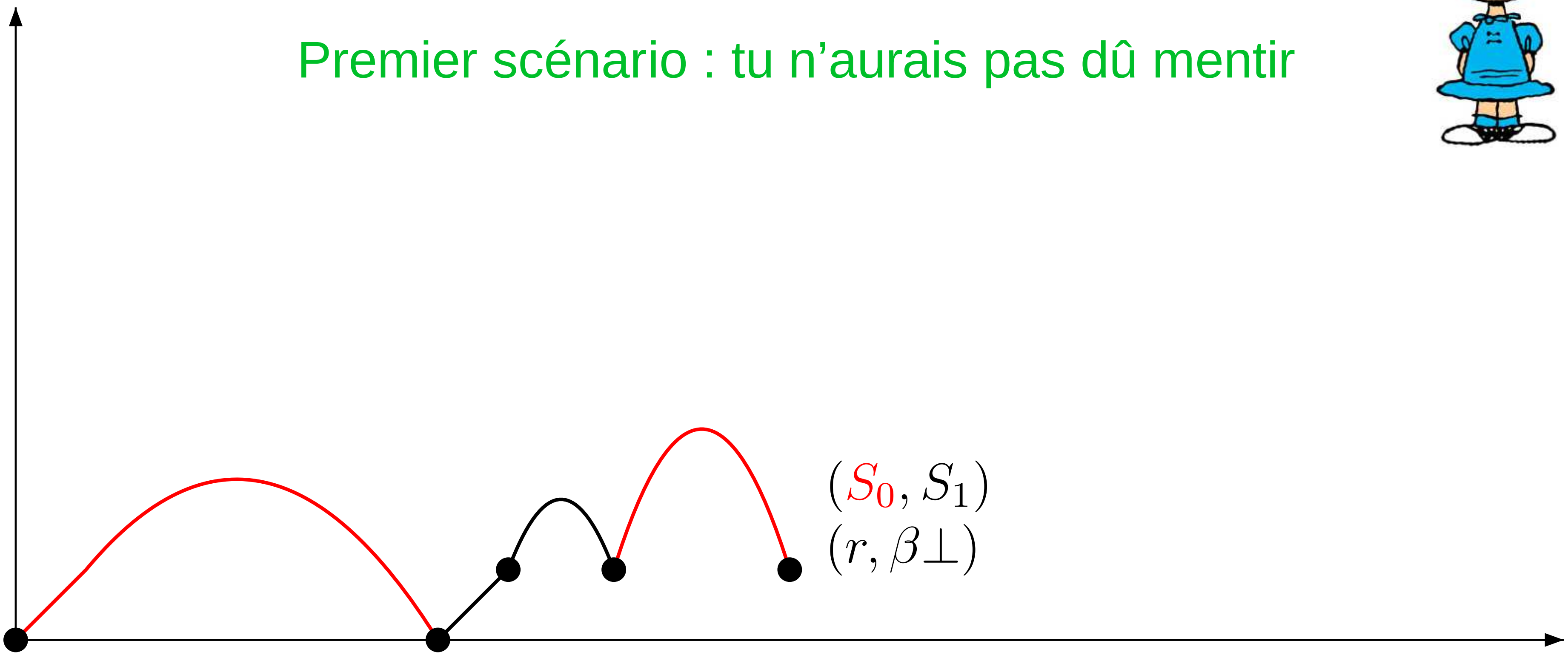
# Un peu d'intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)

Quelques coups plus tard…

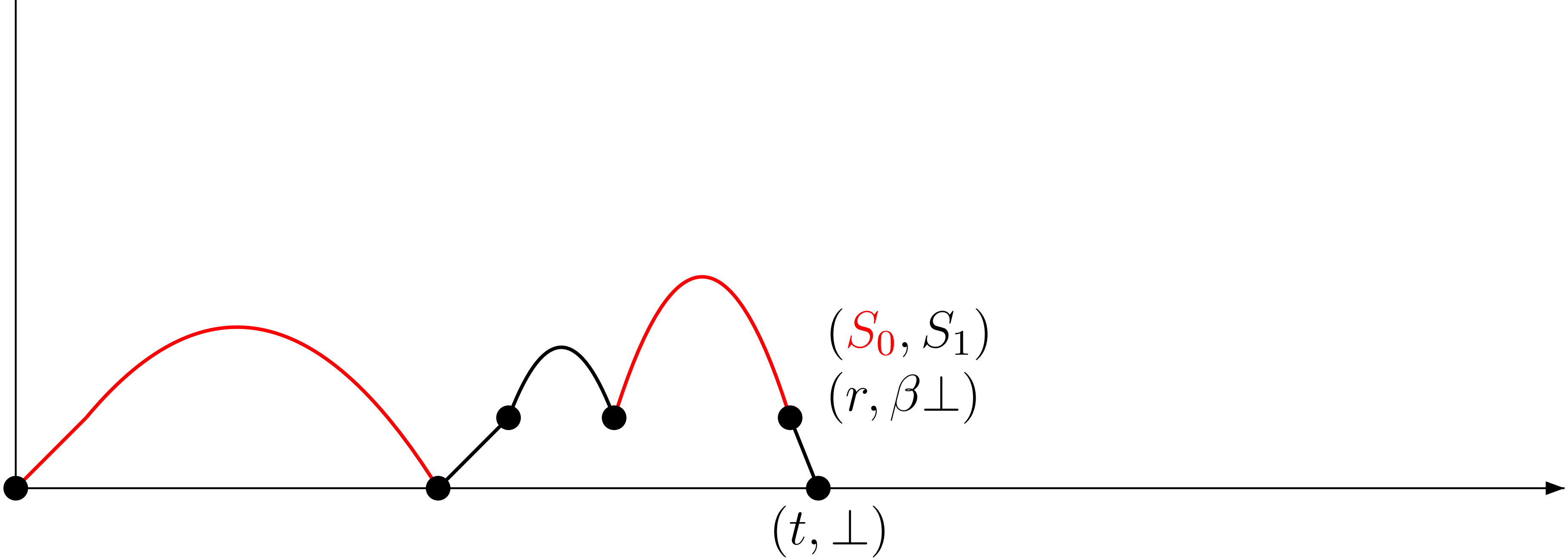


# Un peu d’intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)

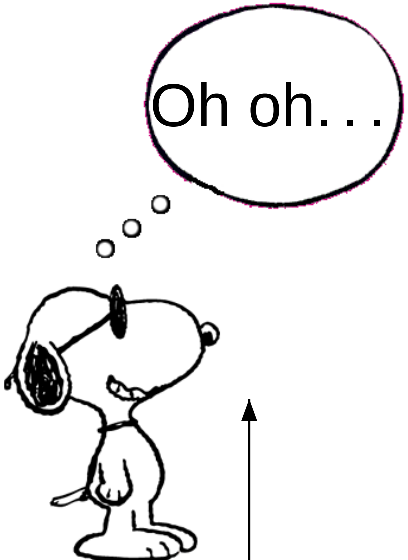

Premier scénario : tu n’aurais pas dû mentir



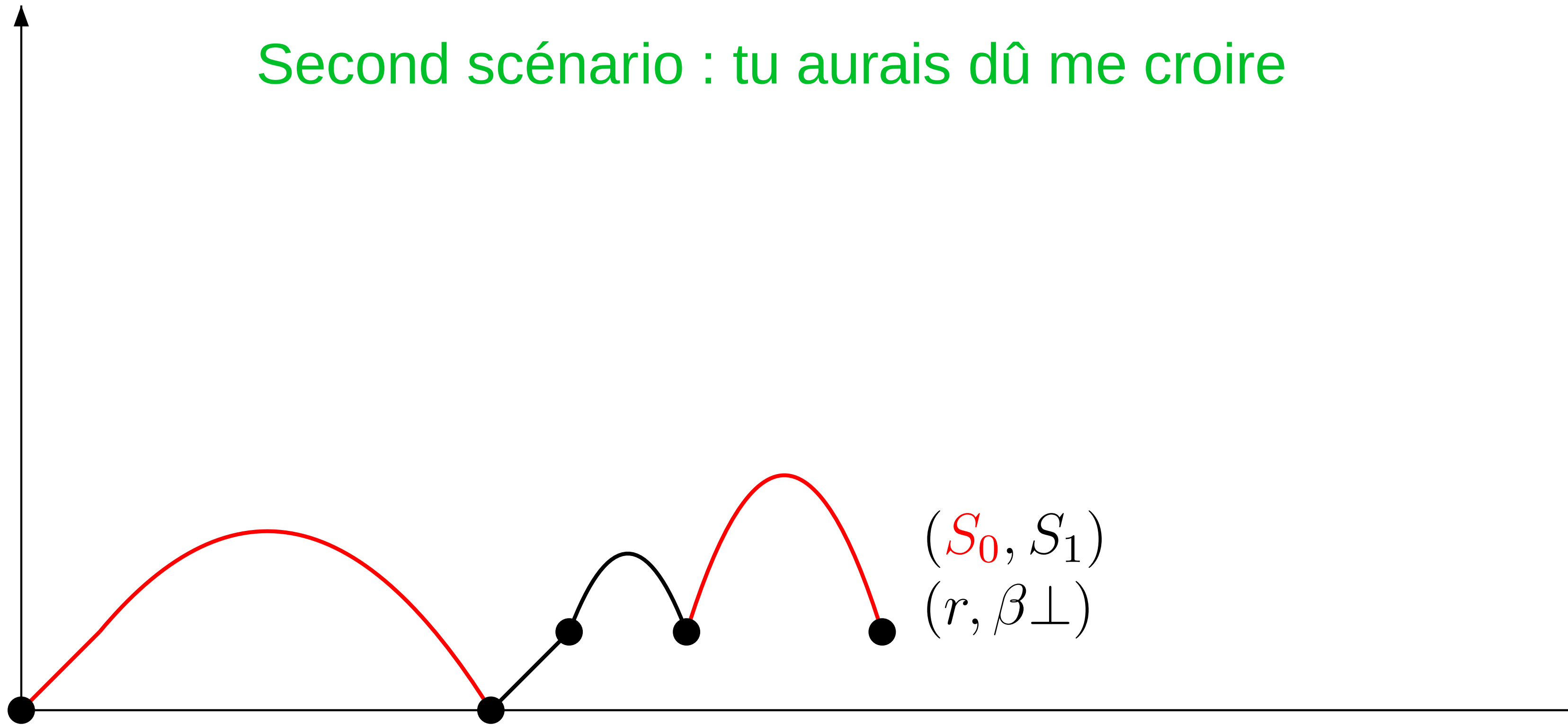
# Un peu d'intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)

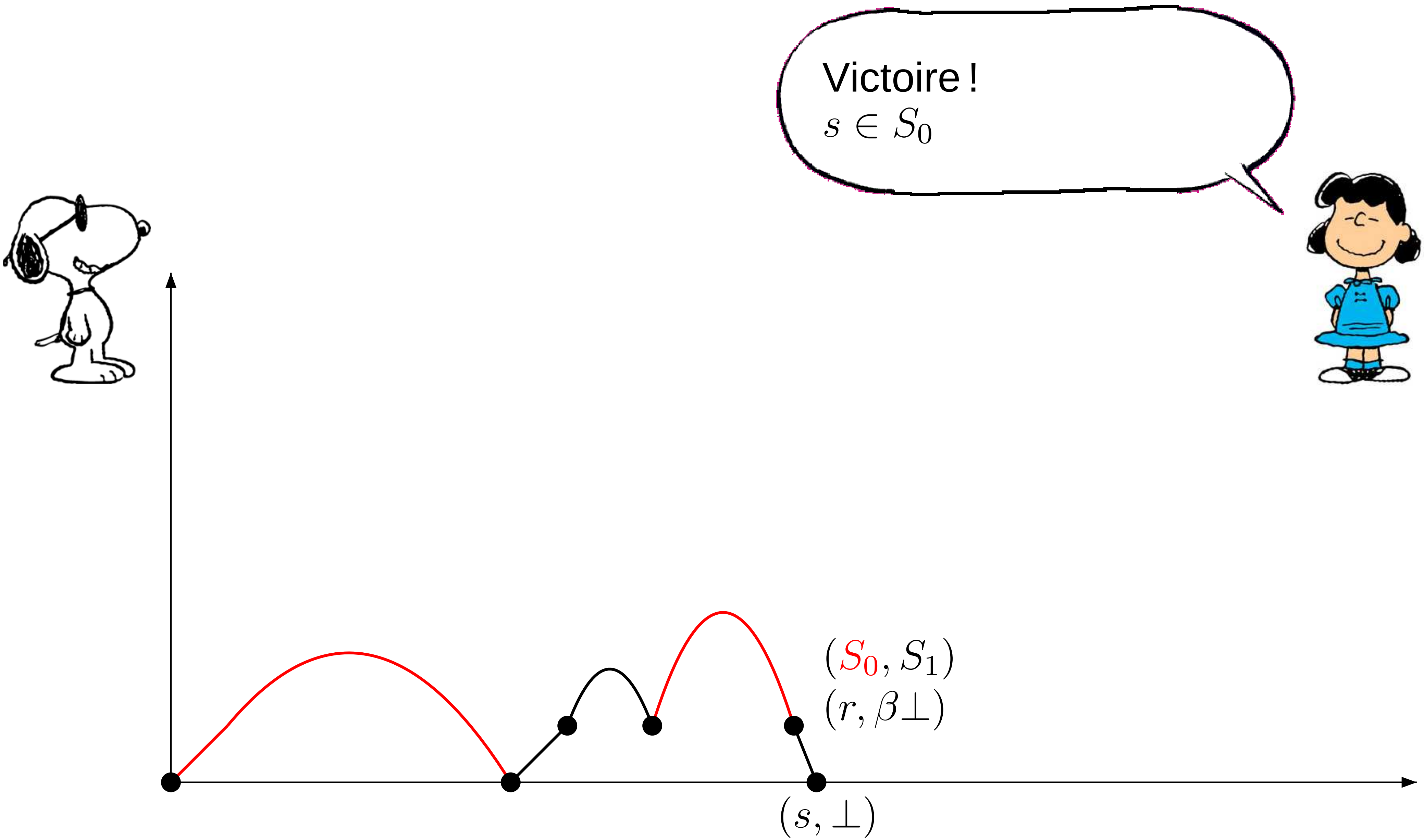
# Un peu d'intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)



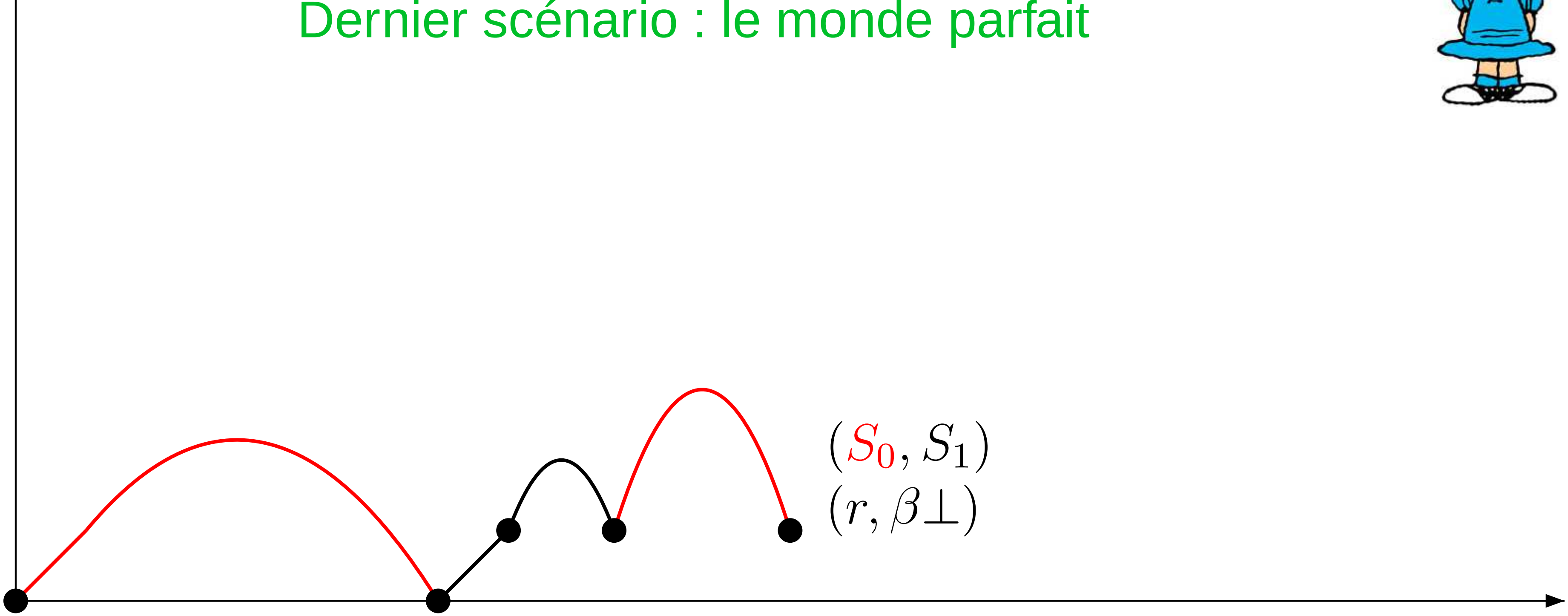

Second scénario : tu aurais dû me croire



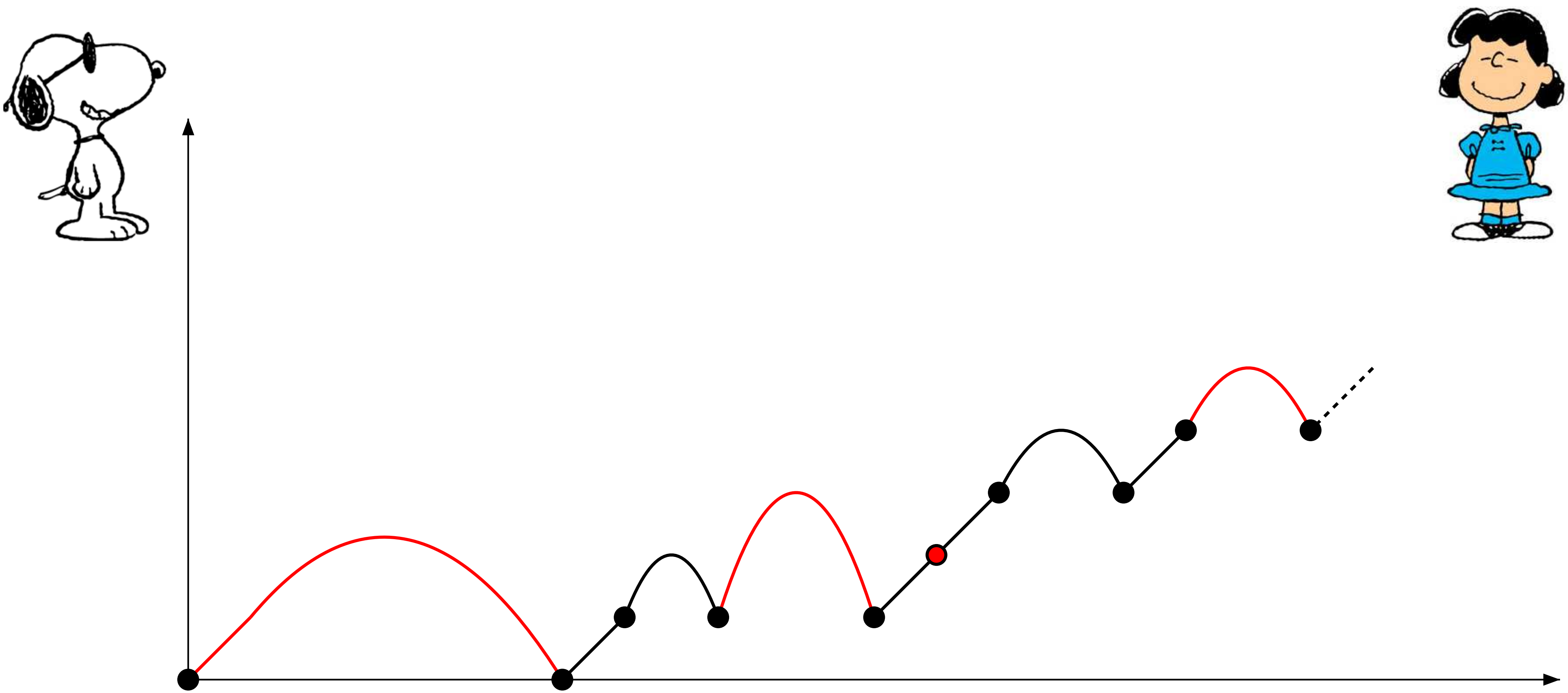
# Un peu d’intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)



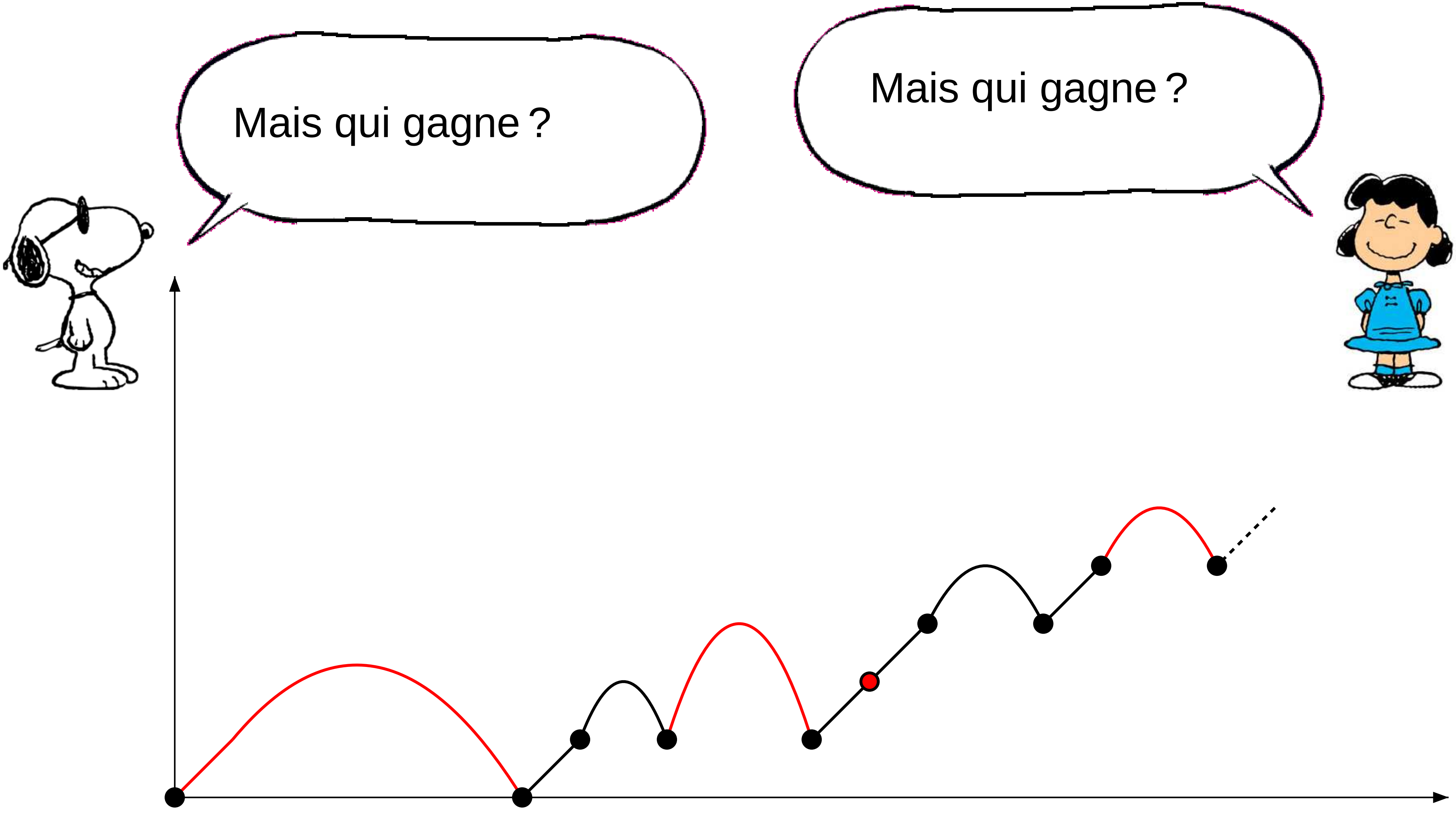
# Un peu d’intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)



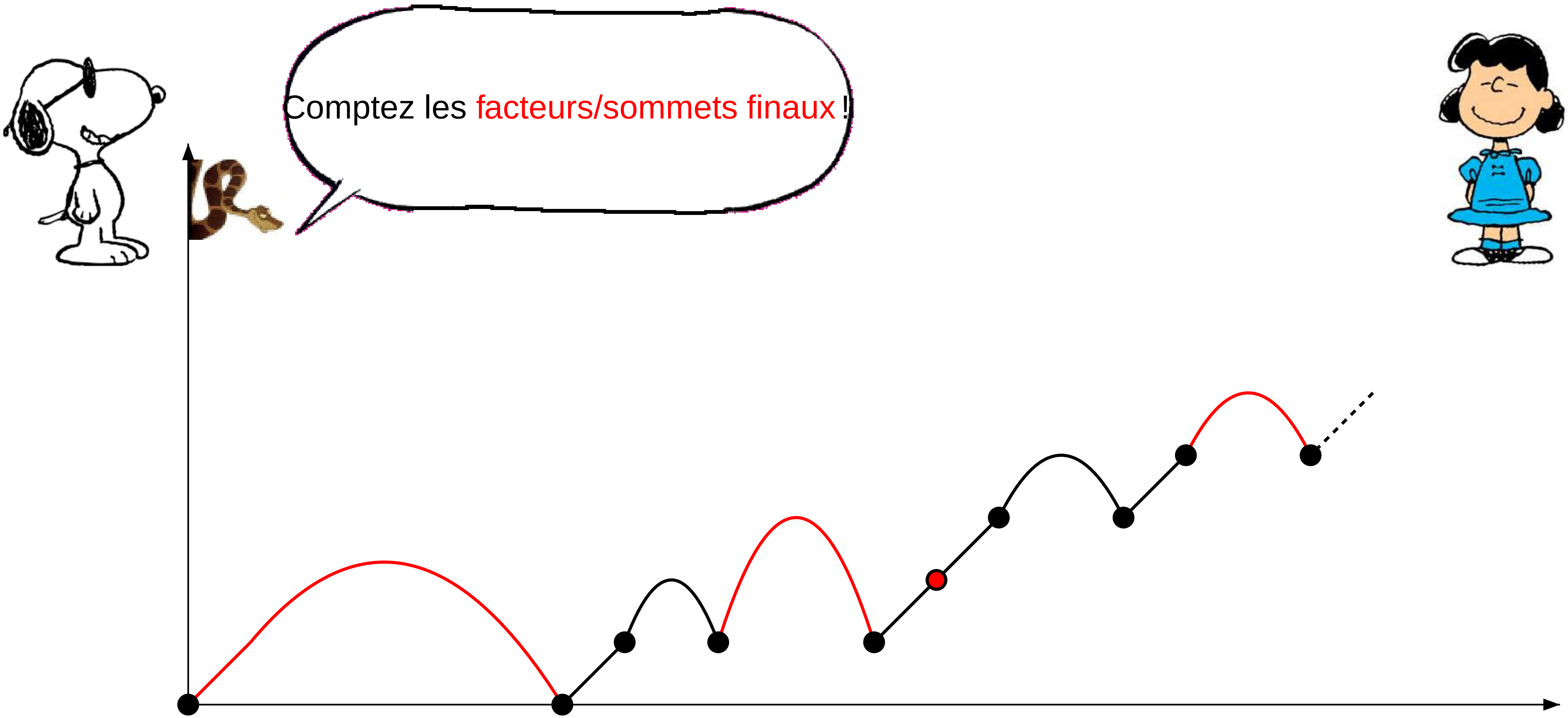
# Un peu d'intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)



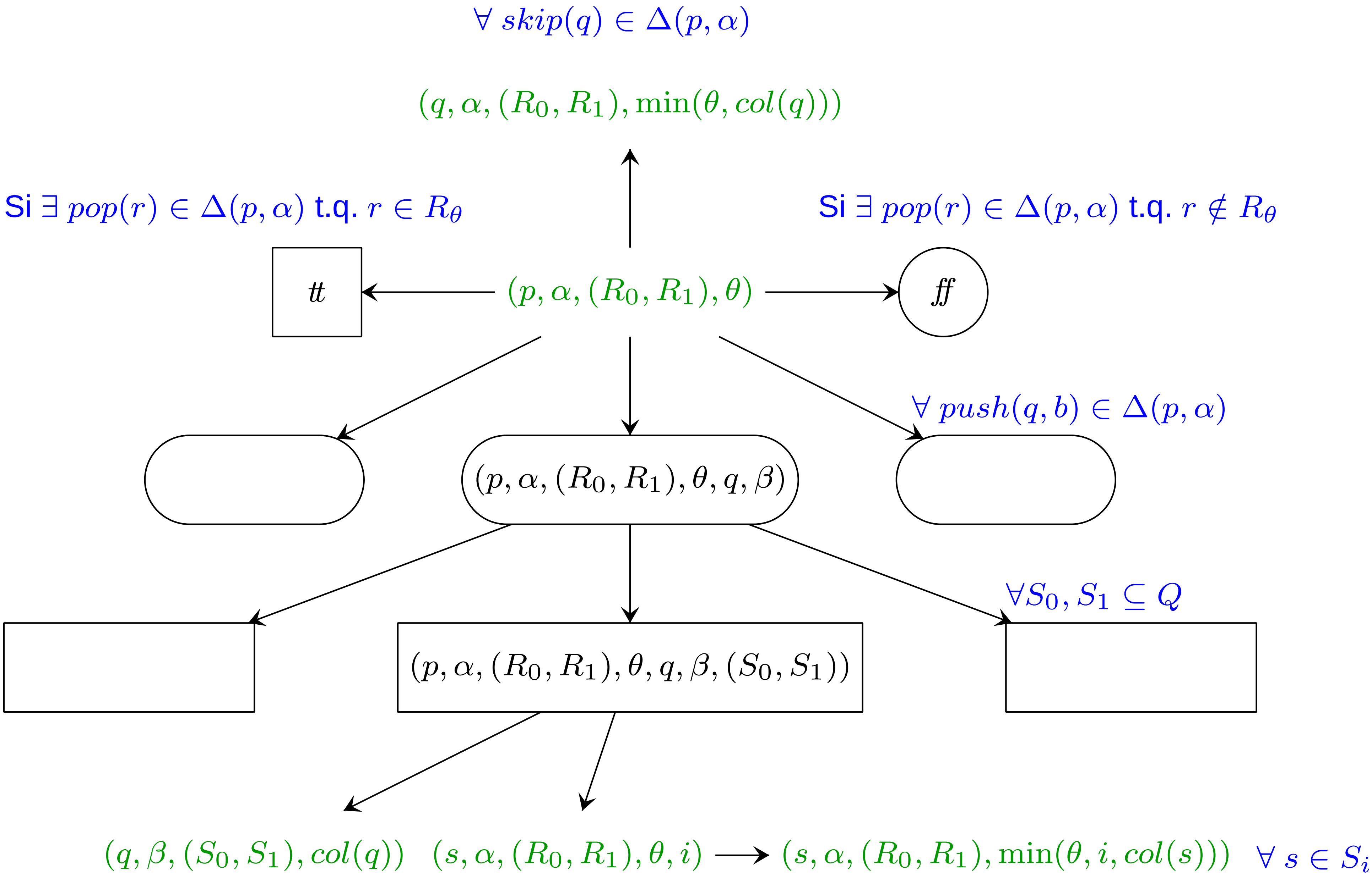
# Un peu d’intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)



# Un peu d’intuition pour le cas des jeux de Büchi (2/3)

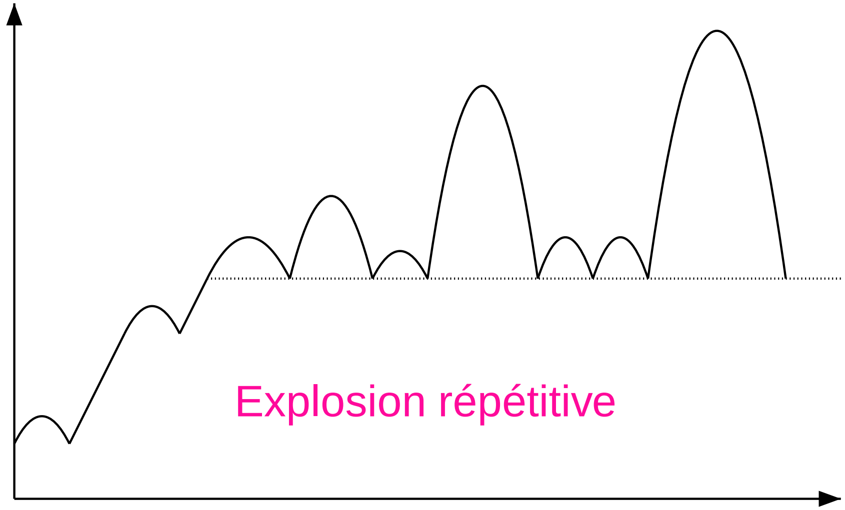


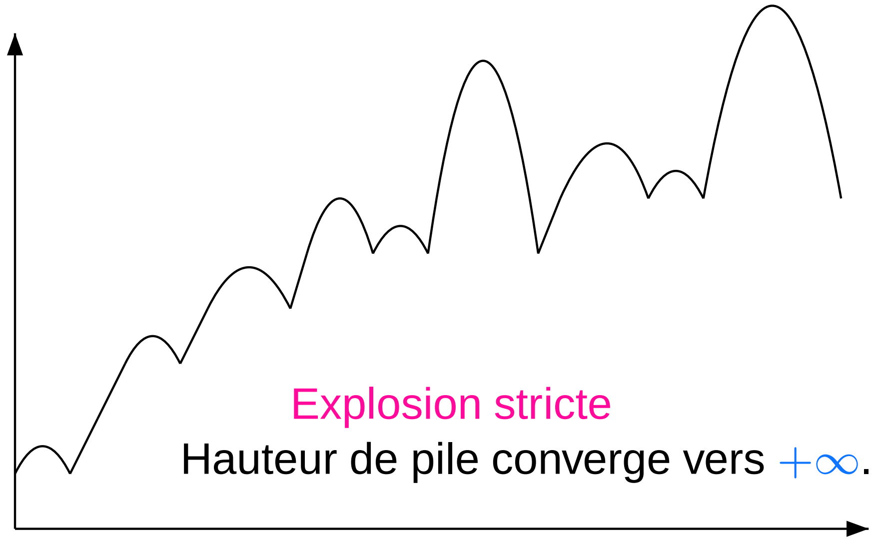
# Un peu d'intuition pour le cas des jeux de Büchi (3/3)



# Jeux d'explosion.

**Condition d'explosion :** la hauteur de pile n'est pas bornée.



**Jeux sur $\mathcal{G}$ :**

- $\mathbb{G}$ : jeu d'explosion.
- $\mathbb{G}_s$ : jeu d'explosion stricte.

**Jeux sur $\mathcal{G}$ :**

- $\mathbb{G}$ : jeu d'explosion.
- $\mathbb{G}_s$ : jeu d'explosion stricte.

**Théorème.** Eve possède des stratégies sans mémoire pour gagner dans $\mathbb{G}$. Les ensembles de positions gagnantes sont donc les mêmes dans $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}_s$ et Eve possède donc des stratégies gagnantes sans mémoire dans les deux jeux. Le même résultat est vrai pour Adam.

# Stratégies gagnantes

**Jeux sur $\mathcal{G}$ :**

- $\mathbb{G}$ : jeu d'explosion.
- $\mathbb{G}_s$ : jeu d'explosion stricte.

**Théorème.** Eve possède des stratégies sans mémoire pour gagner dans $\mathbb{G}$. Les ensembles de positions gagnantes sont donc les mêmes dans $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}_s$ et Eve possède donc des stratégies gagnantes sans mémoire dans les deux jeux. Le même résultat est vrai pour Adam.

**Preuve (point clé).** Ensemble gagnant pour Eve :

$$\bigcap_{i \geq 1} Attr_{\mathbf{E}}(Q \times \Gamma^i)$$

# Reformulation de condition d'explosion

## Bosses bouclantes :

Soit $\lambda = v_0 v_1 \cdots$ une partie dans $\mathcal{G}$. Un facteur $v_k \cdots v_{k+h}$ est une **bosse bouclante** si $|v_k| = |v_{k+h}|$ et $|v_k| \leq |v_{k+i}|$ pour tout $0 \leq i \leq h$.

# Reformulation de condition d'explosion

**Bosses bouclantes :**

Soit $\lambda = v_0 v_1 \cdots$ une partie dans $\mathcal{G}$. Un facteur $v_k \cdots v_{k+h}$ est une **bosse bouclante** si $|v_k| = |v_{k+h}|$ et $|v_k| \leq |v_{k+i}|$ pour tout $0 \leq i \leq h$.

**Nouveau jeu :**

- $\Omega' = \{\lambda \mid \lambda$ ne contient pas de bosse bouclante$\}$,
- $\mathbb{G}' = (\mathcal{G}, \Omega')$.

# Reformulation de condition d'explosion

**Bosses bouclantes :**

Soit $\lambda = v_0 v_1 \cdots$ une partie dans $\mathcal{G}$. Un facteur $v_k \cdots v_{k+h}$ est une **bosse bouclante** si $|v_k| = |v_{k+h}|$ et $|v_k| \leq |v_{k+i}|$ pour tout $0 \leq i \leq h$.

**Nouveau jeu :**

- $\Omega' = \{\lambda \mid \lambda$ ne contient pas de bosse bouclante$\}$,
- $\mathbb{G}' = (\mathcal{G}, \Omega')$.

**Proposition.** Les jeux $\mathbb{G}$, $\mathbb{G}_s$ et $\mathbb{G}'$ ont les mêmes ensembles de positions gagnantes