Jeux sur des graphes de processus à pile: régularité des ensembles de positions gagnantes

Olivier Serre

LIAFA, Université Paris 7 & CNRS.

serre@liafa.jussieu.fr

CADRE

Notation

Processus à pile $\mathcal{P} = (Q, A, \Gamma, \perp, \Delta)$:

- Q : ensemble fini d'états de contrôle.
- A : alphabet fini d'entrée.
- Γ : alphabet fini de pile.
- $\perp$: symbole de fond de pile.
- Δ : fonction de transition.

$$\Delta : Q \times \Gamma \times A \longrightarrow \{push(q, \alpha),\ pop(q),\ , skip(q) \mid q \in Q,\ \alpha \in \Gamma \setminus \{\perp\}\}$$

and s.t. $\forall q, q' \in Q$, $\forall a \in A$, $pop(q') \notin \Delta(q, \perp, a)$.

Notation

Processus à pile $\mathcal{P} = (Q, A, \Gamma, \perp, \Delta)$:

- Q : ensemble fini d'états de contrôle.
- A : alphabet fini d'entrée.
- Γ : alphabet fini de pile.
- $\perp$: symbole de fond de pile.
- Δ : fonction de transition.

$$\Delta : Q \times \Gamma \times A \to \{push(q,\alpha),\ pop(q),\ ,skip(q) \mid q \in Q,\ \alpha \in \Gamma \setminus \{\perp\}\}$$

and s.t. $\forall q, q' \in Q$, $\forall a \in A$, $pop(q') \notin \Delta(q, \perp, a)$.

Graphe de jeu associé $\mathcal{G}$. Induit par :

- $Q = Q_E \cup Q_A$
- (éventuellement) $\rho : Q \to \mathbb{N}$

On a prouvé :

Théorème. On peut décider le gagnant pour une position donnée dans $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$ quand Ω est d'une des formes suivantes : accessibilité, Büchi, parité, explosion (stricte).

On a prouvé :

Théorème. On peut décider le gagnant pour une position donnée dans $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$ quand Ω est d'une des formes suivantes : accessibilité, Büchi, parité, explosion (stricte).

Peut-on avoir (et calculer) une représentation finie des ensembles de positions gagnantes ? ? ?

On a prouvé :

Théorème. On peut décider le gagnant pour une position donnée dans $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$ quand Ω est d'une des formes suivantes : accessibilité, Büchi, parité, explosion (stricte).

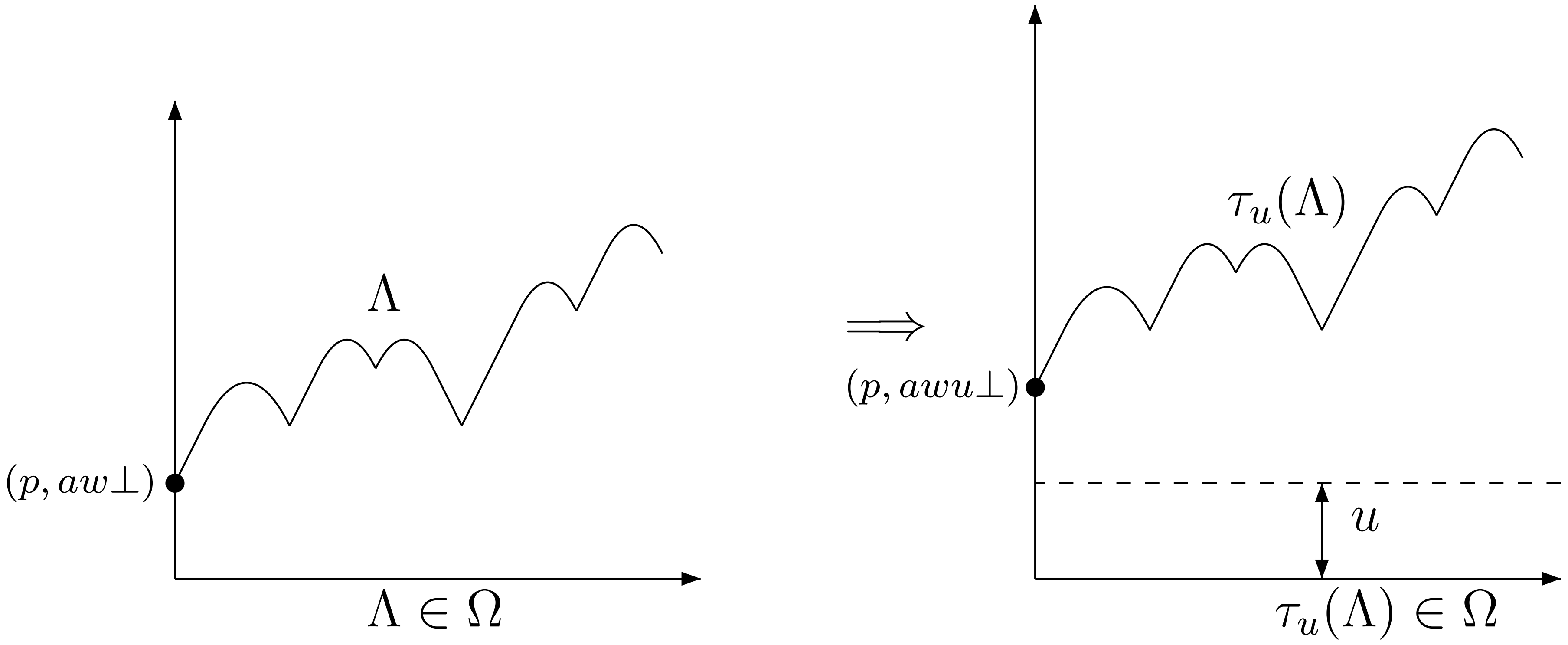
Aujourd'hui :

Théorème. On peut construire un automate fini représentant l'ensemble des positions gagnantes pour Eve (resp. pour Adam) dans $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$ quand Ω est d'une des formes suivantes : accessibilité, Büchi, parité, explosion (stricte).

Ensembles de positions gagnantes.

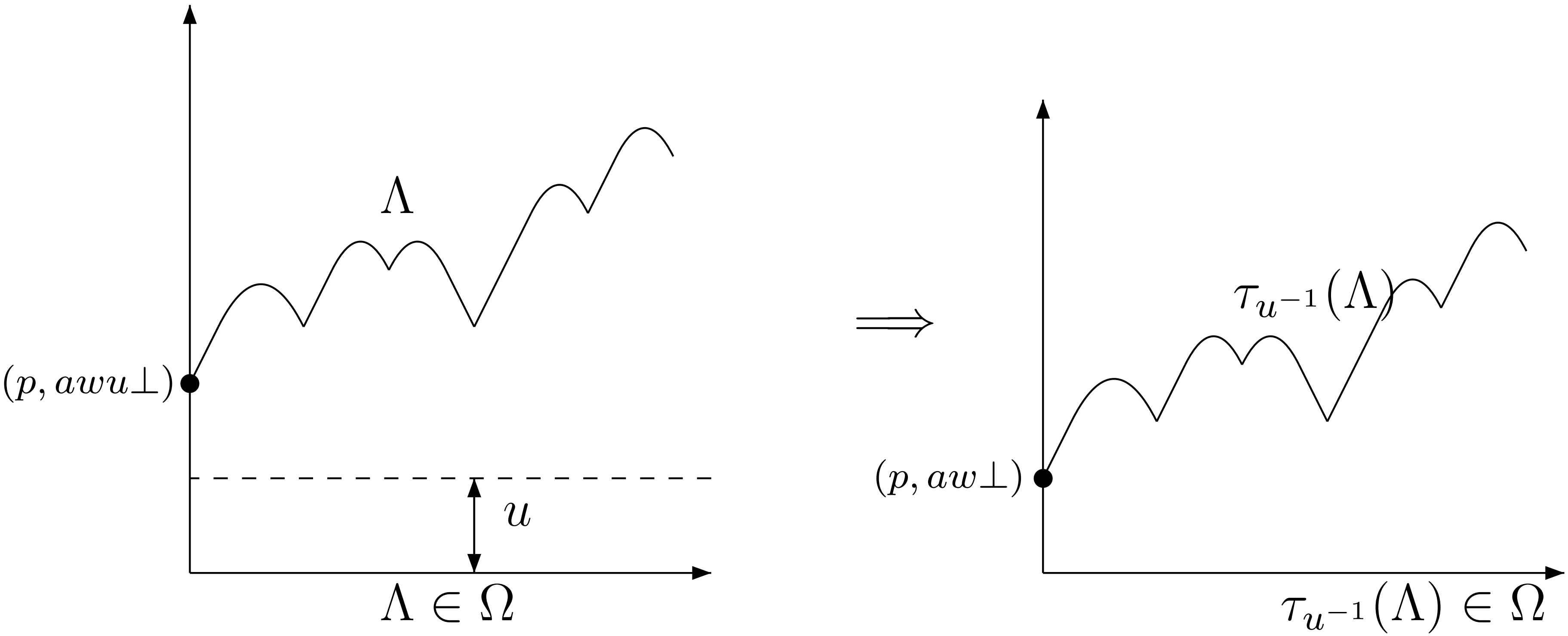
Condition de gain invariante par translations verticales

Invariance par translation vers le haut



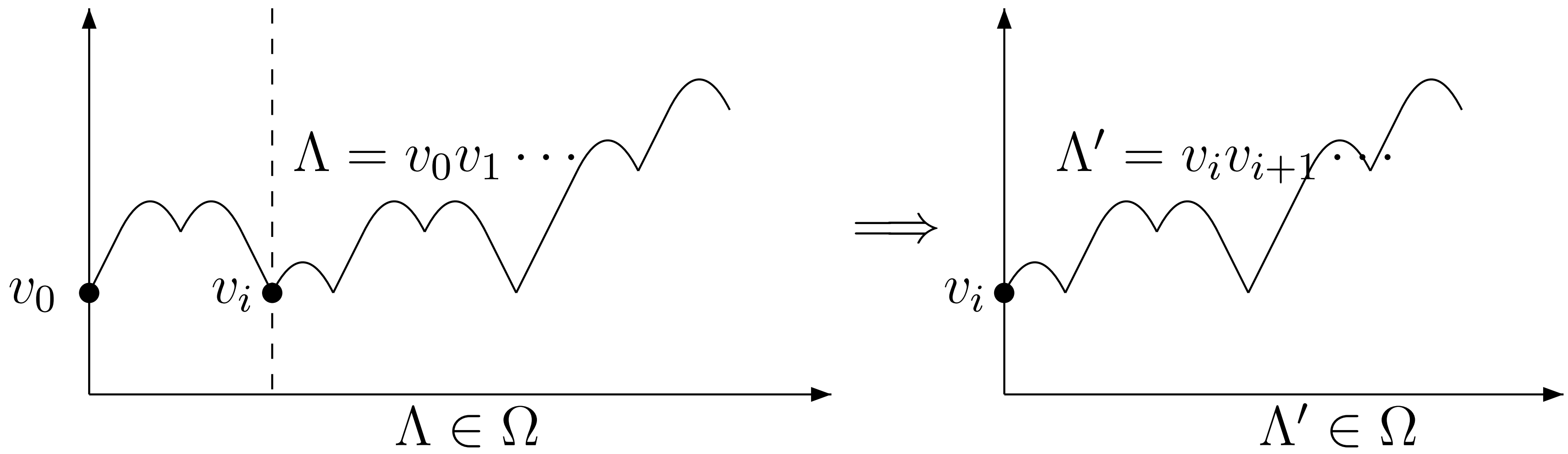
Condition de gain invariante par translations verticales

Invariance par translation vers le bas



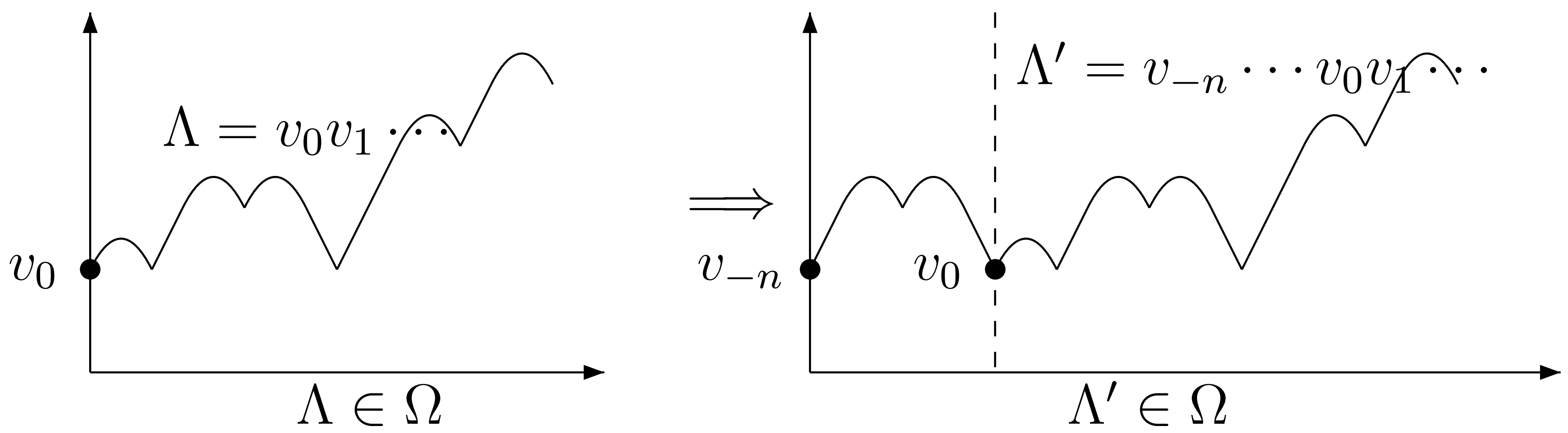
Condition de gain invariante par translations horizontales

Invariance par translation vers la gauche



Condition de gain invariante par translations horizontales

Invariance par translation vers la droite



Définition :

- $R \subseteq Q$
- $\Omega(R) = (\Omega \setminus V^*(Q \times \{\perp\})V^\omega) \cup (V \setminus (Q \times \{\perp\}))^*(R \times \{\perp\})V^\omega$
- $\mathbb{G}(R) = (\mathcal{G}, \Omega(R))$: jeu conditionné.

Définition :

- $R \subseteq Q$
- $\Omega(R) = (\Omega \setminus V^*(Q \times \{\perp\})V^\omega) \cup (V \setminus (Q \times \{\perp\}))^*(R \times \{\perp\})V^\omega$
- $\mathbb{G}(R) = (\mathcal{G}, \Omega(R))$: jeu conditionné. Parties gagnantes :
  - Pile jamais vide et partie dans Ω,
  - Pile vidée en arrivant dans $(r, \perp)$ avec $r \in R$.

Jeux conditionnés :

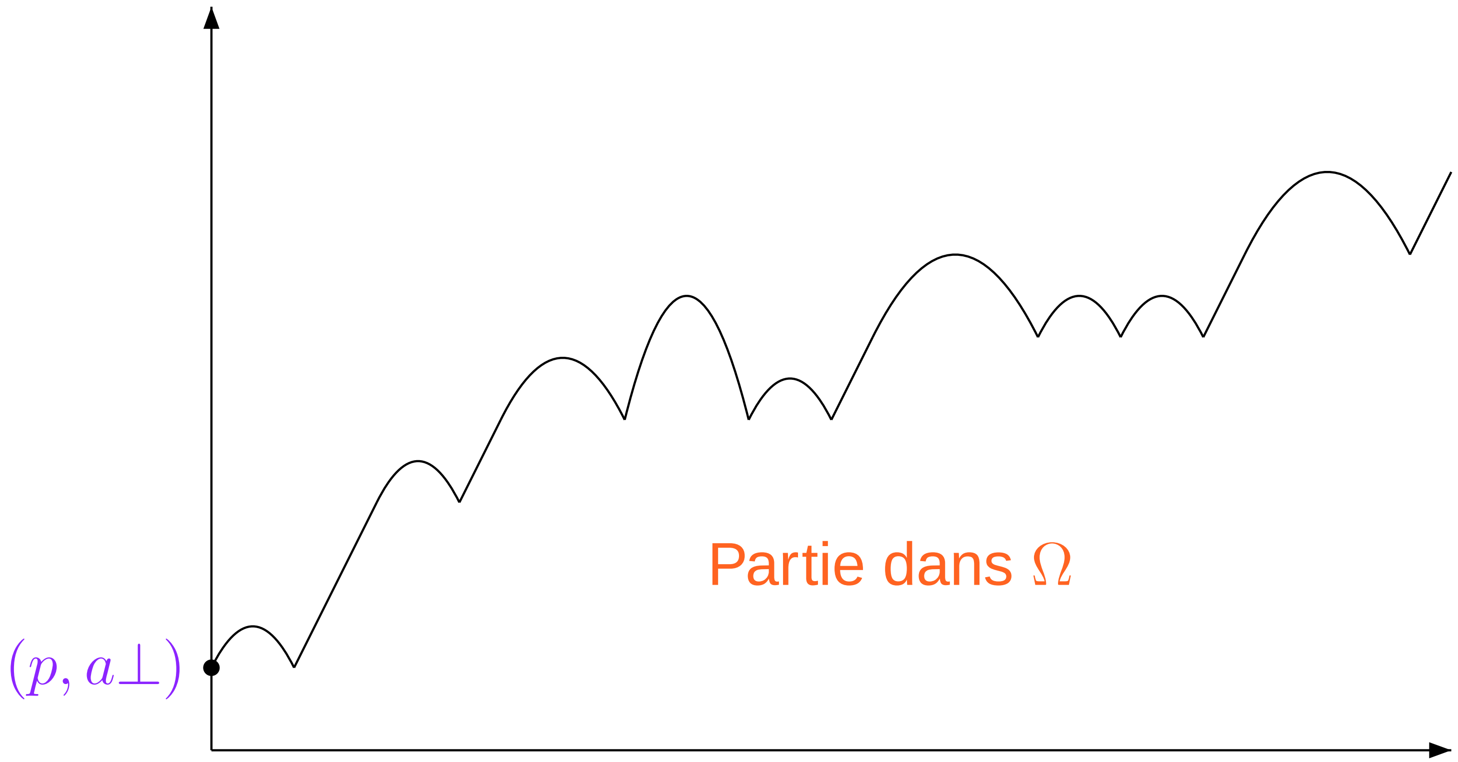
Définition :

- $R \subseteq Q$
- $\Omega(R) = (\Omega \setminus V^*(Q \times \{\perp\})V^\omega) \cup (V \setminus (Q \times \{\perp\}))^*(R \times \{\perp\})V^\omega$
- $\mathbb{G}(R) = (\mathcal{G}, \Omega(R))$: jeu conditionné. Parties gagnantes :
  - Pile jamais vide et partie dans Ω,
  - Pile vidée en arrivant dans $(r, \perp)$ avec $r \in R$.

Ensemble de retour :

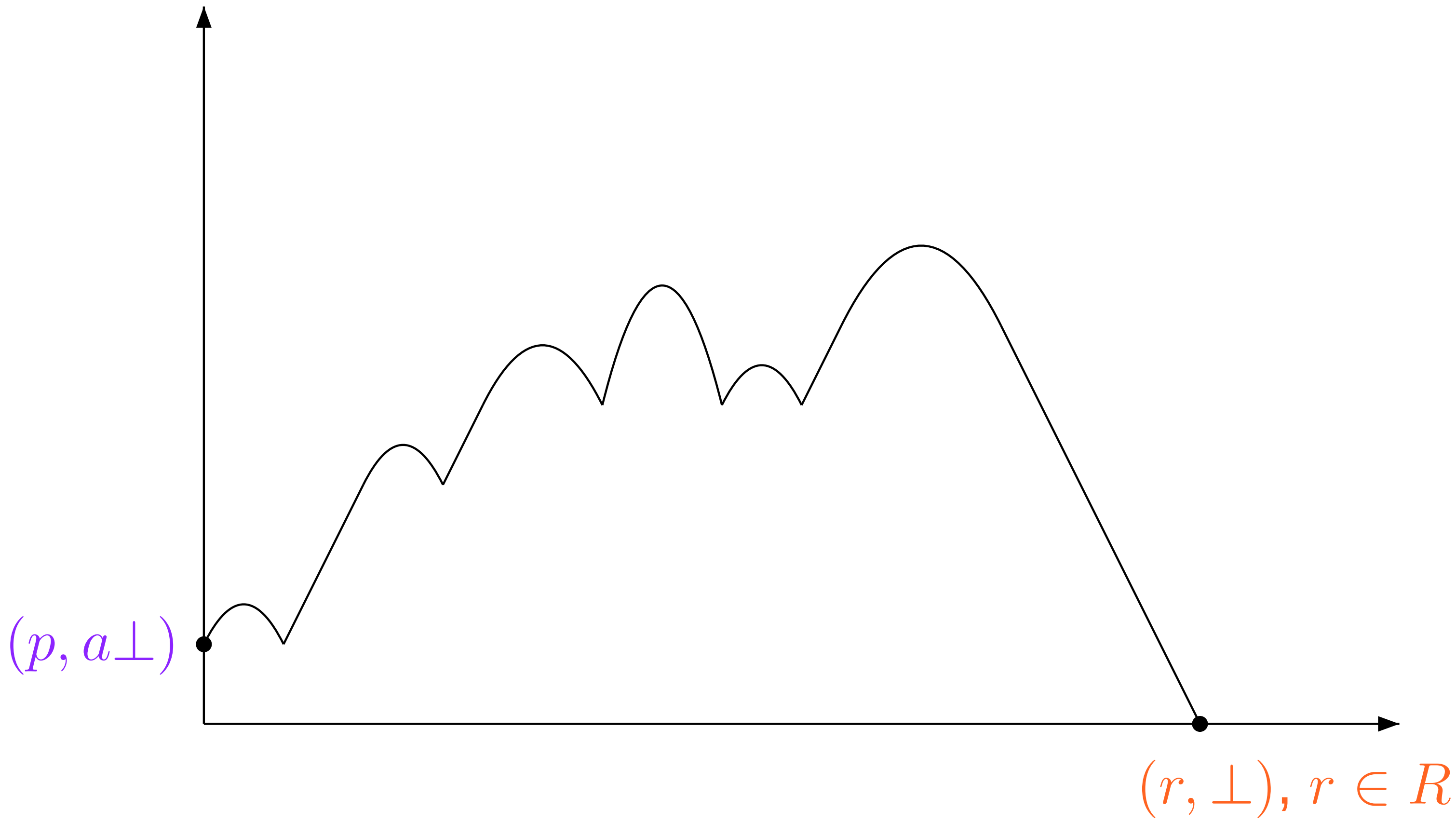
- $\mathcal{R}(p, a) = \{R \subseteq Q \mid (p, a\perp)$ gagnant pour Eve dans $\mathbb{G}(R)\}$.

$G(R)$: partie gagnée sans vider la pile



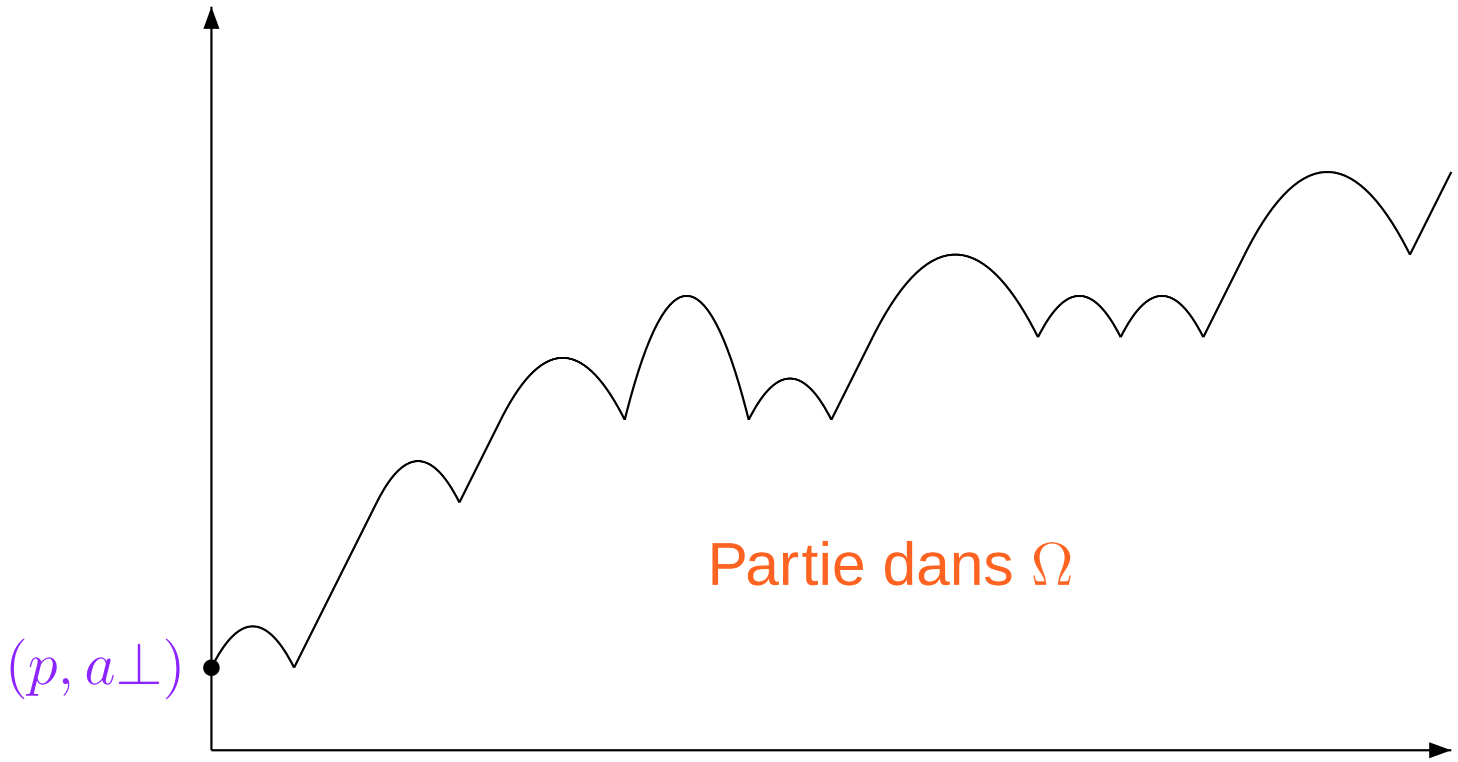
Jeux conditionnés : parties gagnantes

$G(R)$: partie gagnée en vidant la pile



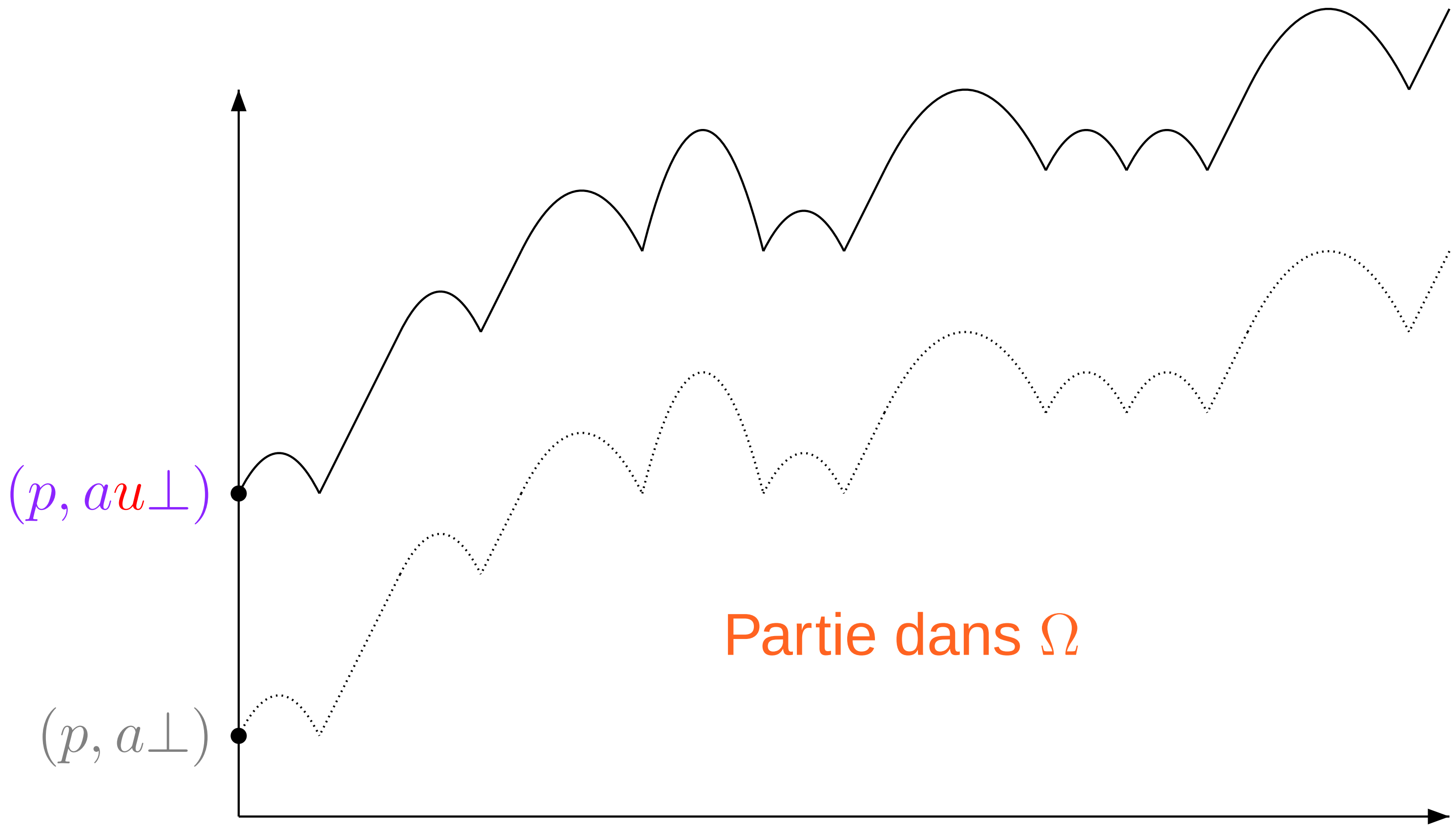
Intuition : cas particuliers (1/2)

$\emptyset \in \mathcal{R}(p, a)$



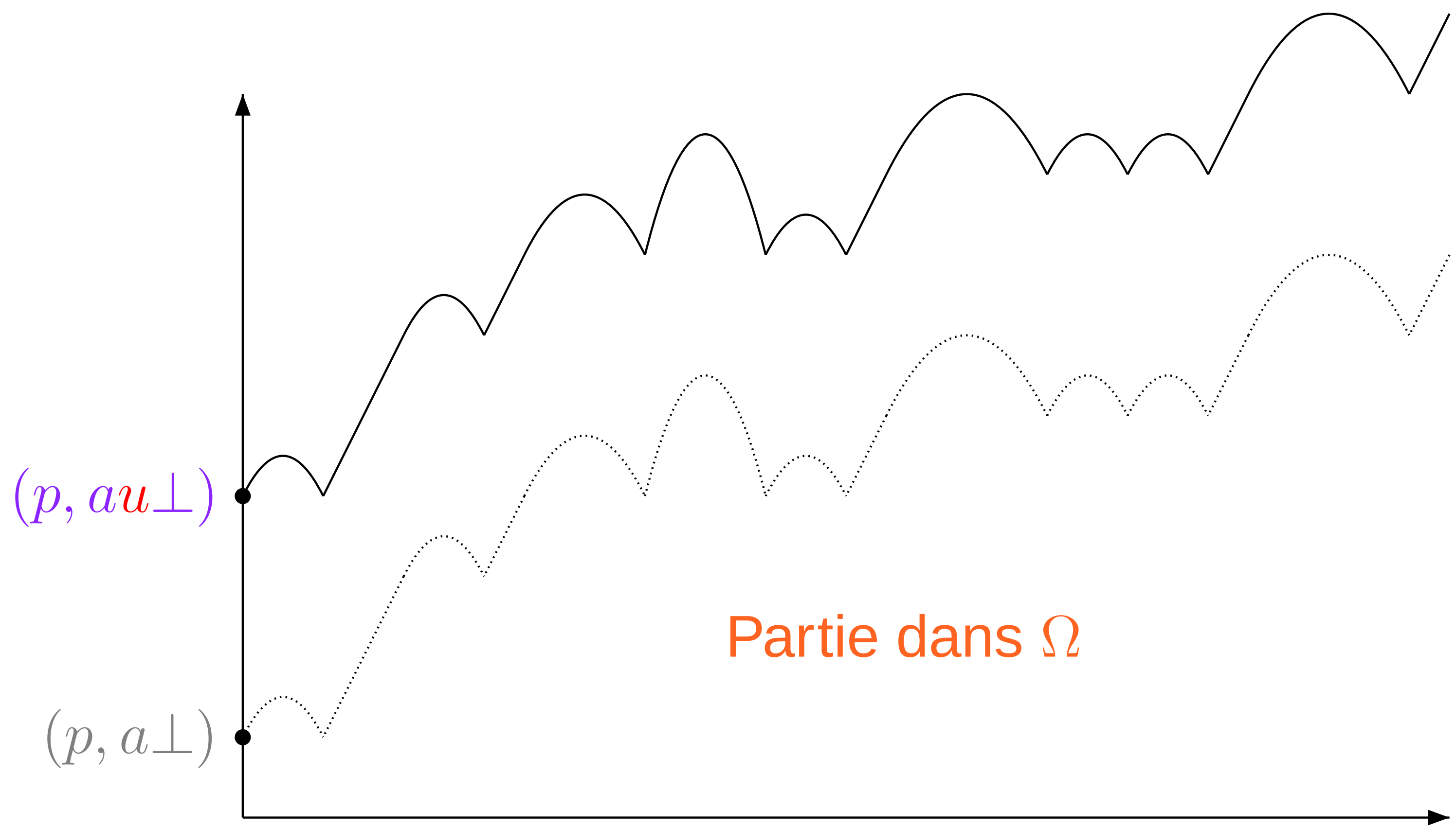
Intuition : cas particuliers (1/2)

$\emptyset \in \mathcal{R}(p, a)$



Intuition : cas particuliers (1/2)

$\emptyset \in \mathcal{R}(p,a) \Rightarrow (p, au\bot) \in W_E,\ \forall u \in \Gamma^*$

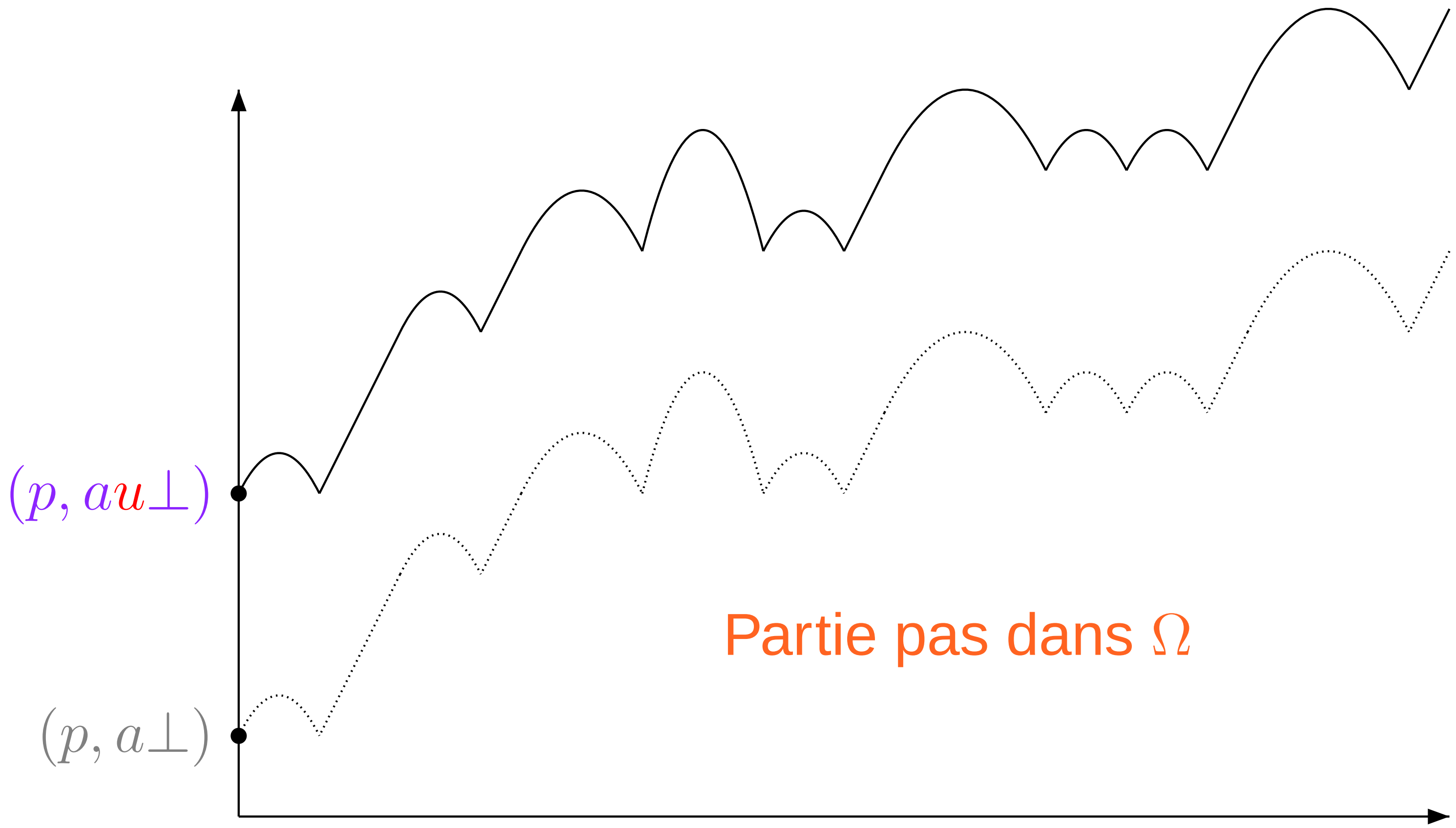


Intuition : cas particuliers (2/2)

$\mathcal{R}(p, a) = \emptyset$

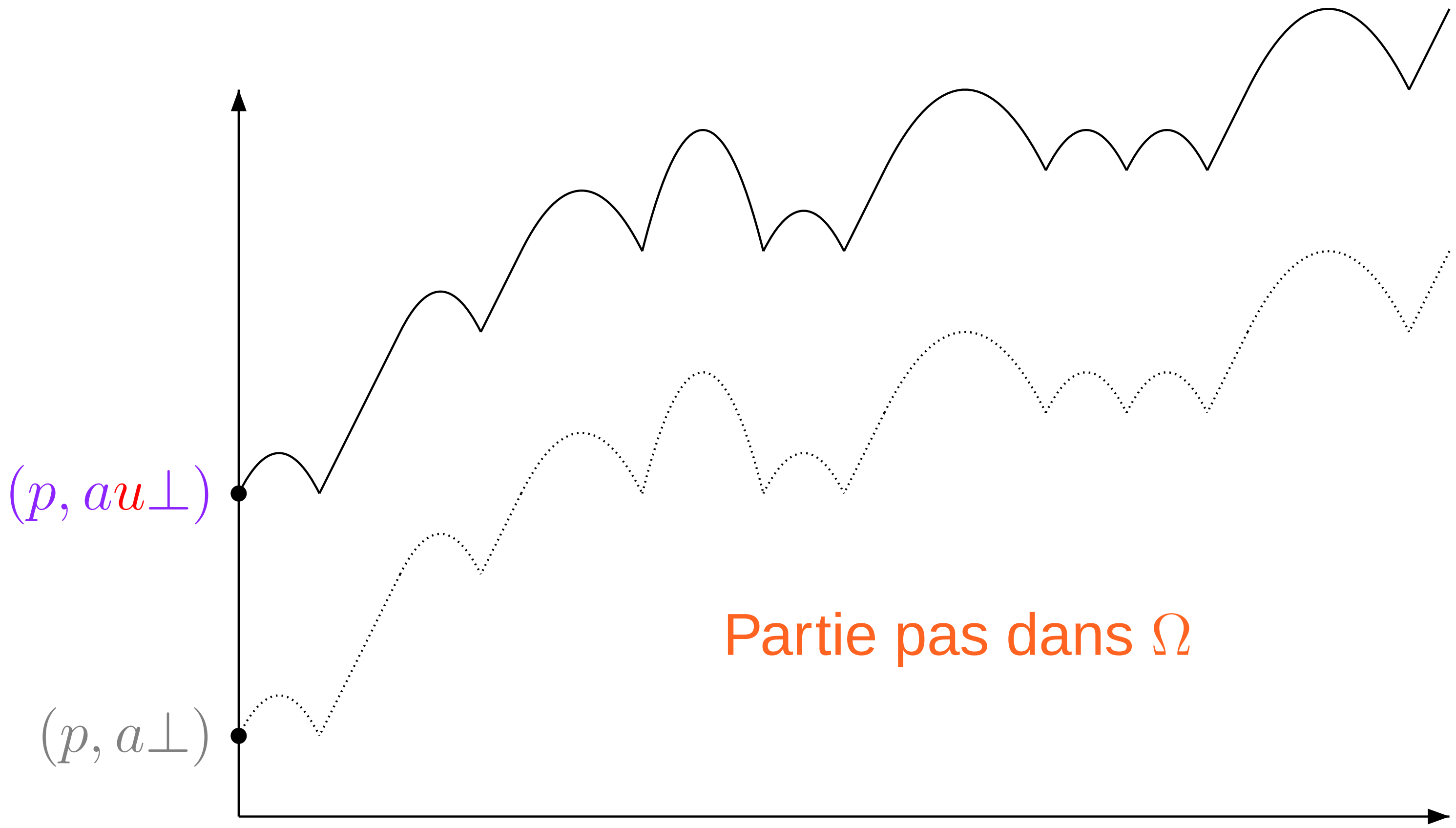
Intuition : cas particuliers (2/2)

$\mathcal{R}(p, a) = \emptyset$



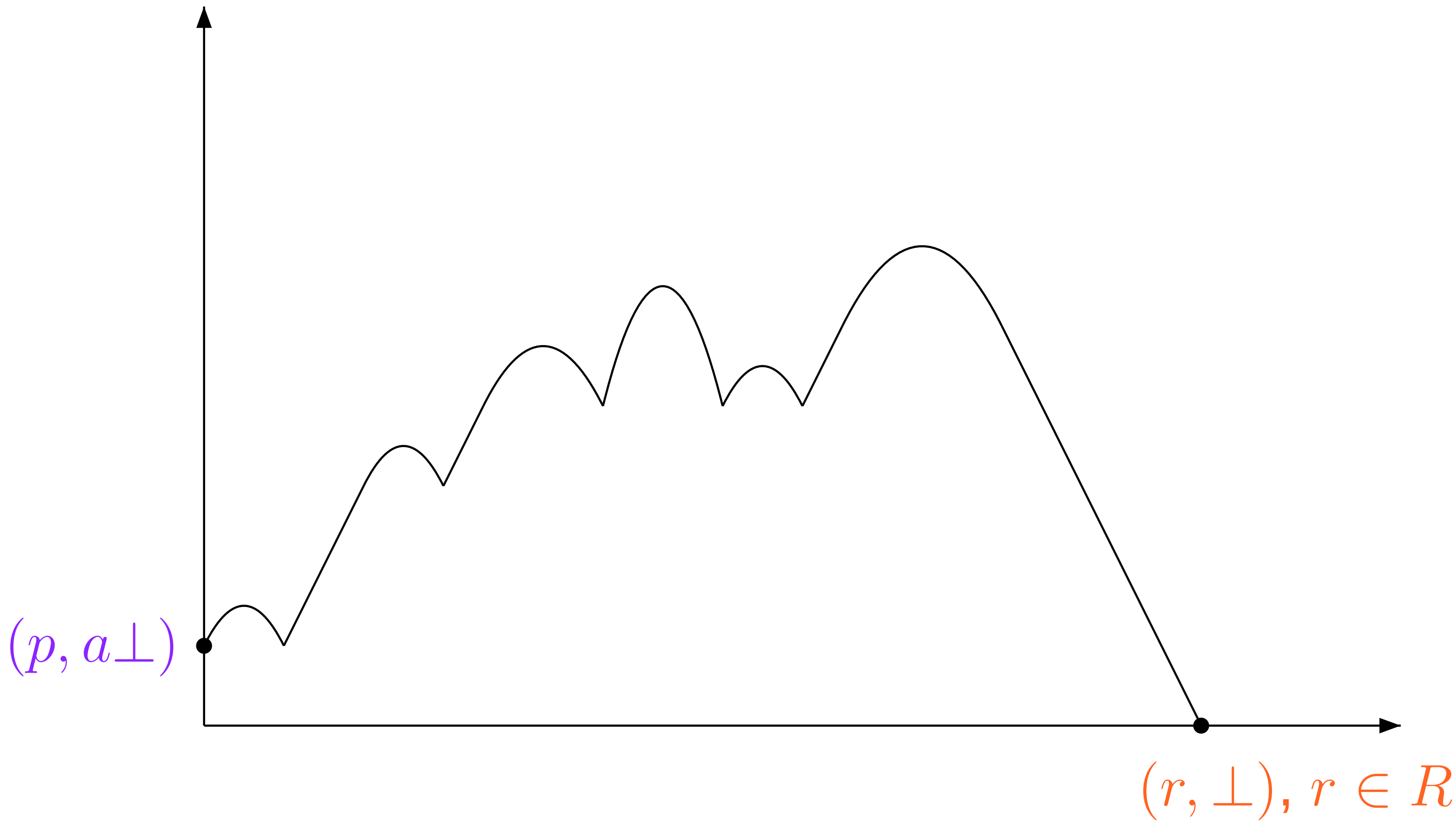
Intuition : cas particuliers (2/2)

$\mathcal{R}(p,a) = \emptyset \Rightarrow (p, au\bot) \in W_A,\ \forall u \in \Gamma^*$



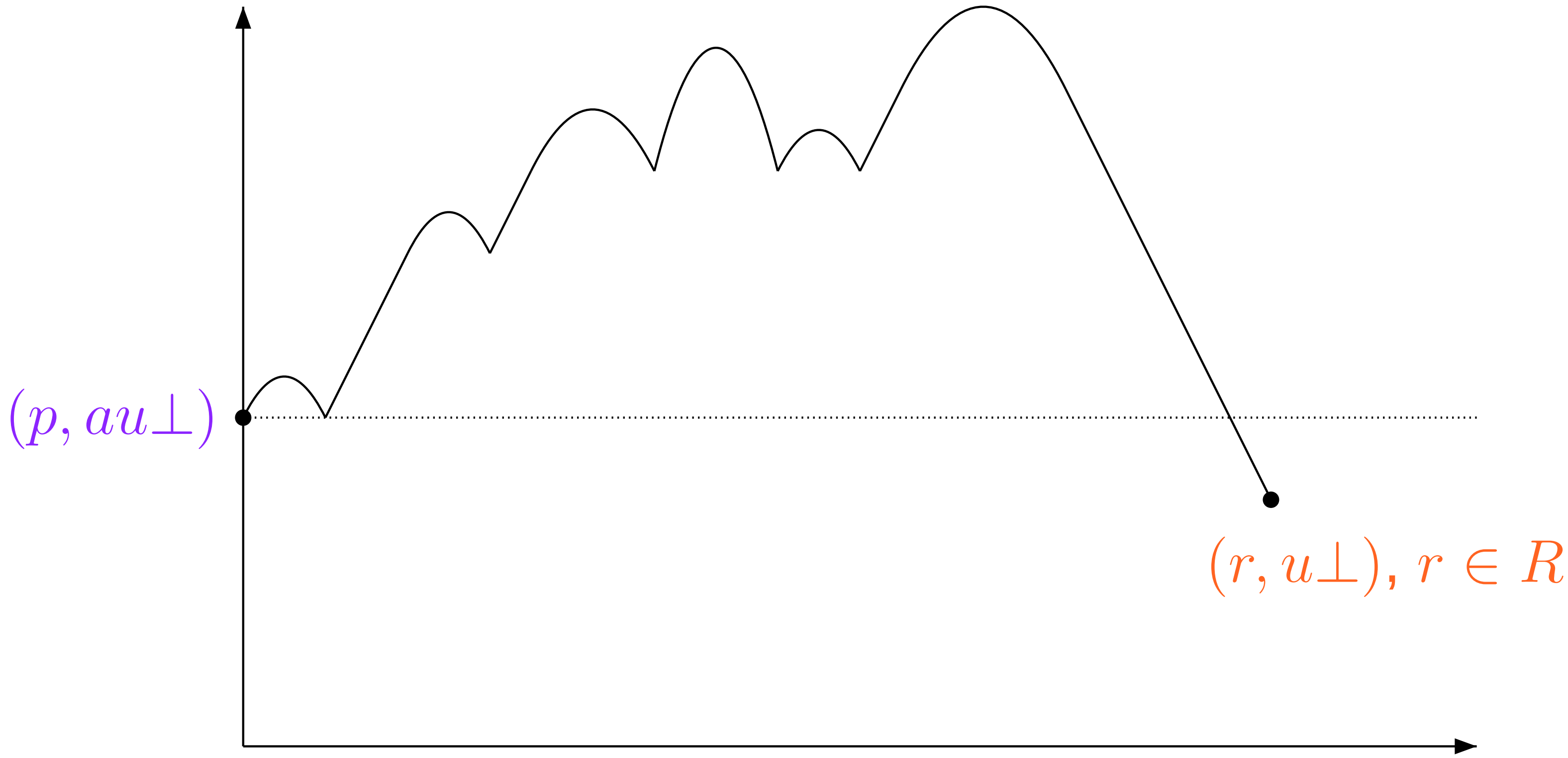
Cas général

$R \in \mathcal{R}(p, a)$

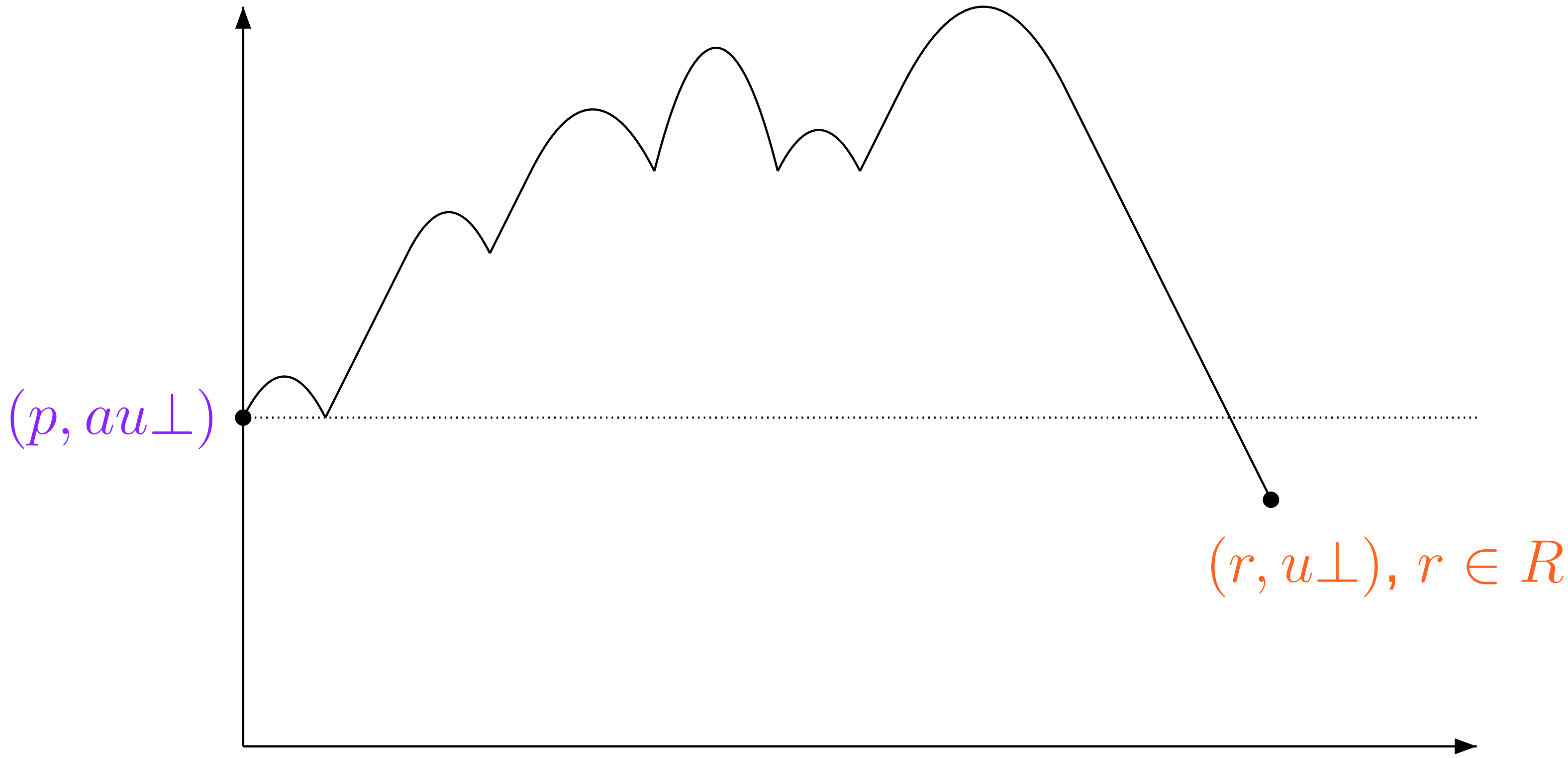


Cas général

$R \in \mathcal{R}(p, a)$



$(p, au) \in W_E$ ssi $\exists R \in \mathcal{R}(p, a)$ tel que $(r, u\bot) \in W_E$, $\forall r \in R$.



Théorème. On peut construire un $\mathcal{P}$-automate représentant l'ensemble des positions gagnantes pour Eve (resp. pour Adam) dans $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$ quand Ω est invariante par translations horizontales et verticales.