Appendix B

Corrigés des exercices du chapitre 2

Exercice 2.1 L'évaluation de droite à gauche s'obtient en définissant les contextes d'évaluation par

Contextes d'évaluation (droite-gauche):

$\Gamma ::= [\,]$	évaluation en tête
$\mid a\ \Gamma$	évaluation à droite d'une application
$\mid \Gamma\ v$	évaluation à gauche d'une application
$\mid \mathtt{let}\ x = \Gamma\ \mathtt{in}\ a$	évaluation à gauche d'un `let`
$\mid (a, \Gamma)$	évaluation à droite d'une paire
$\mid (\Gamma, v)$	évaluation à gauche d'une paire

L'évaluation sans ordre imposé d'évaluation, mais toujours en appel par valeur, s'obtient par:

Contextes d'évaluation (sans ordre imposé):

$\Gamma ::= [\,]$	évaluation en tête
$\mid \Gamma\ a$	évaluation à gauche d'une application
$\mid a\ \Gamma$	évaluation à droite d'une application
$\mid \mathtt{let}\ x = \Gamma\ \mathtt{in}\ a$	évaluation à gauche d'un `let`
$\mid (\Gamma, a)$	évaluation à gauche d'une paire
$\mid (a, \Gamma)$	évaluation à droite d'une paire

Exercice 2.2 On montre d'abord l'implication $(a \stackrel{v}{\to} v) \Rightarrow (a \stackrel{*}{\to} v)$ par récurrence sur la dérivation de l'évaluation $a \stackrel{v}{\to} v$ et par cas sur la dernière règle utilisée. Si c'est un des axiomes 1, 2, 3, le résultat est immédiat car $v = a$. Si c'est la règle 4, on a:

$$\frac{a \stackrel{v}{\to} (\mathtt{fun}\ x \to c) \qquad b \stackrel{v}{\to} v_2 \qquad c[x \leftarrow v_2] \stackrel{v}{\to} v}{a\ b \stackrel{v}{\to} v}$$

Par hypothèse de récurrence appliquée aux trois sous-dérivations des prémisses, nous savons qu'il existe des séquences de réductions de la forme

$$\begin{array}{l} a \to a_1 \to \ldots \to a_n \to v_1 = (\texttt{fun}\ x \to c) \\ b \to b_1 \to \ldots \to b_p \to v_2 \\ c[x \leftarrow v_2] \to c_1 \to \ldots \to c_q \to v \end{array}$$

En appliquant la règle (contexte) à chaque étape des deux premières séquences (avec les contextes $[\,]\ b$ et $v_1\ [\,]$), nous obtenons

$$\begin{array}{l} a\ b \to a_1\ b \to \ldots \to a_n\ b \to v_1\ b \\ v_1\ b \to v_1\ b_1 \to \ldots \to v_1\ b_p \to v_1\ v_2 \end{array}$$

En enchaînant toutes ces réductions et en glissant au milieu une étape β_{fun}, il vient

$$a\ b \to \ldots \to v_1\ b \to \ldots \to v_1\ v_2 = (\texttt{fun}\ x \to c)\ v_2 \to c[x \leftarrow v_2] \to \ldots \to v$$

D'où le résultat attendu $a\ b \stackrel{*}{\to} v$. Le raisonnement est le même pour les autres règles d'évaluation (5, 6, 7, 8, 9).

Montrons maintenant l'implication inverse $(a \stackrel{*}{\to} v) \Rightarrow (a \stackrel{v}{\to} v)$. Il suffit de montrer les deux lemmes suivants:

1. Pour toute valeur v, $v \stackrel{v}{\to} v$.
2. Si $a \to a'$ et $a' \stackrel{v}{\to} v$, alors $a \stackrel{v}{\to} v$.

En effet, si l'on a $a \to a_1 \to \ldots a_n \to v$, il s'ensuit que $v \stackrel{v}{\to} v$ par (1), puis $a_n \stackrel{v}{\to} v$ par (2), puis $a_{n-1} \stackrel{v}{\to} v$ par (2), et ainsi de suite jusqu'à $a \stackrel{v}{\to} v$ par applications répétées de (2).

Le lemme (1) est immédiat par récurrence structurelle sur v.

Pour (2), on montre d'abord le résultat pour une réduction de tête $a \stackrel{\varepsilon}{\to} a'$, en examinant les axiomes de réduction. Prenons comme exemple β_{fun}: on a $a = (\texttt{fun}\ x \to a_1)\ v_2$ et $a' = a_1[x \leftarrow v_2]$. On peut construire la dérivation suivante:

$$\frac{(\texttt{fun}\ x \to a_1) \stackrel{v}{\to} (\texttt{fun}\ x \to a_1) \qquad v_2 \stackrel{v}{\to} v_2 \qquad a_1[x \leftarrow v_2] \stackrel{v}{\to} v}{(\texttt{fun}\ x \to a_1)\ v_2 \stackrel{v}{\to} v}$$

(La prémisse de gauche est l'axiome 3; celle du milieu vient du lemme (2); celle de droite de l'hypothèse $a_1[x \leftarrow v_2] \stackrel{v}{\to} v$.) On a donc bien montré $a \stackrel{v}{\to} v$. La preuve pour les autres axiomes de réduction en tête est similaire.

Pour finir la preuve de (2), il faut montrer que tout cela passe bien au contexte: si $a \stackrel{\varepsilon}{\to} a'$ et $\Gamma(a') \stackrel{v}{\to} v$, alors $\Gamma(a) \stackrel{v}{\to} v$. Cela se fait par récurrence structurelle sur Γ. Le cas de base $\Gamma = [\,]$ est le résultat précédent sur les réductions de tête. Faisons le cas $\Gamma = \Delta\ a_2$ par exemple. Supposons donc $\Gamma(a') \stackrel{v}{\to} v$. Comme $\Gamma(a') = \Delta(a')\ a_2$, nous avons donc une dérivation de la forme

$$\frac{\Delta(a') \stackrel{v}{\to} \texttt{fun}\ x \to a_3 \qquad a_2 \stackrel{v}{\to} v_2 \qquad a_3\{x \leftarrow v_2\} \stackrel{v}{\to} v}{\Delta(a')\ a_2 \stackrel{v}{\to} v}$$

Par hypothèse de récurrence, on a $\Delta(a) \xrightarrow{v} \texttt{fun}\ x \rightarrow a_3$. On peut donc construire la dérivation

$$\frac{\Delta(a) \xrightarrow{v} \texttt{fun}\ x \rightarrow a_3 \qquad a_2 \xrightarrow{v} v_2 \qquad a_3\{x \leftarrow v_2\} \xrightarrow{v} v}{\Delta(a)\ a_2 \xrightarrow{v} v}$$

qui conclut $\Gamma(a) \xrightarrow{v} v$ comme attendu. La preuve pour les autres types de contextes est similaire.

Exercice 2.3 H0 est trivialement vérifiée. Pour H1, on regarde chaque δ-règle $a \xrightarrow{\varepsilon} a'$ et à partir d'une dérivation de typage de $E \vdash a : \tau$ (à gauche), on construit une dérivation de typage de $E \vdash a' : \tau$ (à droite):

$$\frac{E \vdash + : \texttt{int} \times \texttt{int} \rightarrow \texttt{int} \qquad \dfrac{E \vdash n_1 : \texttt{int} \qquad E \vdash n_2 : \texttt{int}}{E \vdash (n_1, n_2) : \texttt{int}}}{E \vdash +(n_1, n_2) : \texttt{int}} \qquad E \vdash n : \texttt{int} \qquad \text{si } n = n_1 + n_2$$

$$\frac{E \vdash \texttt{fst} : \tau_1 \times \tau_2 \rightarrow \tau_1 \qquad \dfrac{E \vdash v_1 : \tau_1 \qquad E \vdash v_2 : \tau_2}{E \vdash (v_1, v_2) : \tau_1 \times \tau_2}}{E \vdash \texttt{fst}(v_1, v_2) : \tau_1} \qquad E \vdash v_1 : \tau_1$$

$$\frac{E \vdash \texttt{snd} : \tau_1 \times \tau_2 \rightarrow \tau_2 \qquad \dfrac{E \vdash v_1 : \tau_1 \qquad E \vdash v_2 : \tau_2}{E \vdash (v_1, v_2) : \tau_1 \times \tau_2}}{E \vdash \texttt{snd}(v_1, v_2) : \tau_2} \qquad E \vdash v_2 : \tau_2$$

$$\frac{E \vdash \texttt{fix} : (\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \tau \qquad \dfrac{E + \{x : \tau\} \vdash a : \tau}{E \vdash \texttt{fun}\ x \rightarrow a : \tau \rightarrow \tau}}{E \vdash \texttt{fix}(\texttt{fun}\ x \rightarrow a) : \tau} \qquad E \vdash a[x \leftarrow \texttt{fix}(\texttt{fun}\ x \rightarrow a)] : \tau$$

(Dans le dernier cas, règle δ_{fix}, on a utilisé le lemme de substitution 2.2.)

Pour H2, on considère les applications $op\ v$ qui sont bien typées, et on montre que v est forcément de la forme exigée par la δ-règle. Par exemple, si $+\ v$ est bien typée, v est une valeur de type $\texttt{int} \times \texttt{int}$. Par le lemme 2.5, v est forcément une paire d'entiers. De même, si $\texttt{fst}\ v$ ou $\texttt{snd}\ v$ est bien typée, v est forcément une paire de valeurs. Enfin pour $\texttt{fix}\ v$, nous savons que v est une valeur ayant un type fonctionnel $\tau \rightarrow \tau$. Par le lemme 2.5, v est ou bien une fonction $\texttt{fun}\ x \rightarrow a$, soit un opérateur op. Mais le cas $v = op$ est impossible, car aucun des opérateurs qui nous intéressent ont un type de la forme $\tau \rightarrow \tau$. Donc v est une fonction et la règle δ_{fix} s'applique.