Devoir à la maison 1 - Correction

Nous proposons ici une solution guidée au problème du calcul du plus grand préfixe commun, dans un automate étendu $\mathcal{A} = (Q, T, I, F)$, sur un alphabet fini Σ. Rappelons que nous souhaitons calculer, pour tout état q de $\mathcal{A}$, la valeur de $\bigwedge \mathcal{L}(\mathcal{A}, q)$. Nous souhaitons de plus résoudre ce problème en temps polynomial.
On suppose enfin avoir ajouté à Σ^* un nouvel élément, noté 0, maximal pour l'ordre préfixe.

1. On pose $S = \Sigma^* \cup \{0\}$. Montrer que l'on peut étendre l'opérateur de concaténation à S en respectant l'ordre préfixe.
2. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On peut munir S^n de l'ordre produit associé défini par

$$x \leq y \iff (\forall i,\ x_i \leq y_i)$$

   Montrer que $\leq$ est bien fondé, *i.e.* qu'il n'existe pas de suite infinie d'éléments de S^n strictement décroissante.
3. Dans la suite, nous notons $\overrightarrow{0}$ l'élément de S^Q dont toutes les composantes valent 0. Plus généralement, $\overrightarrow{X}$ désigne l'élément $(X_q)_{q \in Q} \in S^Q$. Nous considérons l'application $f = (f_q)_{q \in Q}$ de S^Q dans lui-même définie comme le vecteur des applications f_q définies de S^Q dans S par $f_q(\overrightarrow{X}) = \left(\bigwedge_{(q,u,p) \in T} u \cdot X_p \right) \wedge \rho(q)$, où $\rho \in S^Q$ est définie par $\forall q \in Q, \rho(q) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } q \in F, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

   Montrer que f est croissante. En étudiant la suite $\left(f^i(\overrightarrow{0})\right)_i$ des itérées de $\overrightarrow{0}$ par f, en déduire que f admet un plus grand point fixe, noté $\nu \overrightarrow{X} \cdot f(\overrightarrow{X})$.
4. Soit $i \geq 0$. Nous définissons $\mathcal{L}^{<i}(\mathcal{A}, q)$ l'ensemble des mot acceptés par $\mathcal{A}$ à partir de q le long d'un chemin de longueur strictement inférieure à i. Ainsi, $\mathcal{L}^{<0}(\mathcal{A}, q)$ est vide, pour tout $q \in Q$, et $\mathcal{L}(\mathcal{A}, q) = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{L}^{<i}(\mathcal{A}, q)$. Nous notons $\left(\overrightarrow{X}^{(i)}\right)$ la suite des itérées de $\overrightarrow{0}$ par f définie plus haut. Démontrer que, pour tout $i \geq 0$, et pour tout $q \in Q$, $\overrightarrow{X}_q^{(i)} = \bigwedge \mathcal{L}^{<i}(\mathcal{A}, q)$.
5. En déduire un algorithme pour le problème étudié, et prouver sa correction.
6. Nous allons montrer que la limite est atteinte après au plus $2|Q|$ itérations, et que cette borne est optimale.
   - En supposant ce résultat démontré, montrer que la complexité de l'algorithme obtenu est dans $O(|Q| \times |T|)$.
   - Dans la suite, on suppose $\mathcal{A}$ émondé (coût ?), et on pose $n = |Q|$. Montrer que pour tout état $q \in Q$, $X_q^{(n)} \in \Sigma^*$.

– Soit $k \geq n$, et un état $q \in Q$. On pose $\ell = min\{|uX_p^{(k)}|, (q,u,p) \in T\} \cup \{|\rho(q)|\}$. Étant donné un mot $u \in \Sigma^*$, et $m \geq 0$, on note $u[m]$ le plus long préfixe de u de longueur inférieure ou égale à m. Montrer que $X_q^{(k+1)} = X_q^{(k)}[\ell]$.

– On considère les sous-ensembles P_i de Q définis par récurrence sur $i \geq 1$ par

$$\begin{cases} P_1 & = \left\{ p \in Q \text{ t.q. } \left| X_p^{(n+1)} \right| = min \left\{ \left| X_q^{(n+1)} \right|, q \in Q \right\} \right\} \\ \\ P_{i+1} & = \left\{ p \in Q \setminus \bigcup_{j \leq i} P_j \text{ t.q. } \left| X_p^{(n+i+1)} \right| = min \left\{ \left| X_q^{(n+i+1)} \right|, q \in Q \setminus \bigcup_{j \leq i} P_j \right\} \right\} \end{cases}$$

Montrer que pour tout p dans P_i, on a $X_p^{(n+i)} = X_p^{(n+i+1)}$, et conclure que $2n$ est bien une borne supérieure.

– En considérant l'automate suivant, montrer que la borne $2n$ est atteinte et donc est optimale.