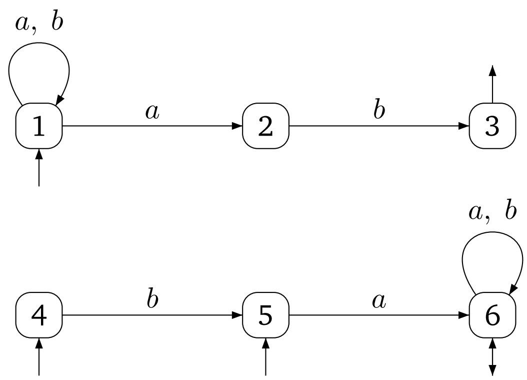
Magistère d'Informatique et de Mathématiques
ENS de Cachan *Jeudi 9 Février 2006*
TD de Théorie des Langages

Compléments sur les langages réguliers

Exercice 1 (Déterminisations)

(i) Construire un automate reconnaissant tous les mots qui finissent par aba. Déterminiser l'automate obtenu.

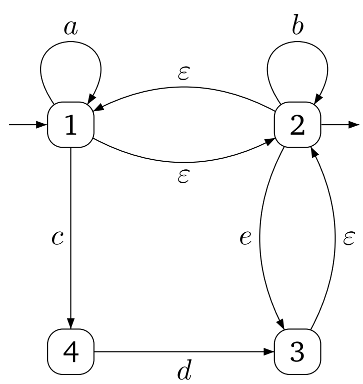
(ii) Déterminiser l'automate suivant :



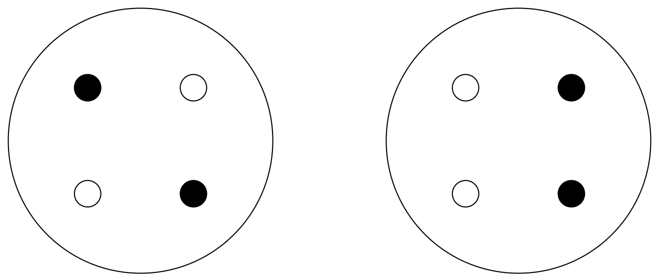
Exercice 2 (Elimination des ε-transitions)

(i) Si vous ne l'avez pas déjà montré auparavant, montrer que pour tout automate fini avec ε-transitions $\mathcal{A}$, il existe un automate fini classique $\mathcal{B}$ qui reconnaît le même langage. Donner un algorithme qui construit $\mathcal{B}$ à partir de $\mathcal{A}$.

(ii) En appliquant ce qui précède, construire un automate fini qui reconnaît le même langage que l'automate suivant :



Exercice 3 (Le barman aveugle)
On dispose de 4 jetons, chacun ayant une face bleue et une face rouge. Un joueur (le barman) a les yeux bandés. Son but est de retourner les 4 jetons sur la même couleur. Pour cela, il peut retourner à chaque tour 1, 2 ou 3 jetons. Un autre joueur pertrube le jeu en tournant le plateau sur lequel reposent les jetons d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour entre chaque opération du barman. Montrer que le barman a une stratégie gagnante, c'est-à-dire que quoi que fasse celui qui tourne le plateau, il a moyen de gagner.



Exercice 4 (Propriétés de clôture)
Le but de cet exercice est de montrer des propriétés de clôture sur les langages réguliers en utilisant les automates finis.

Sous-mot Un mot $u = a_1 \cdots a_n \in A^*$ est un *sous-mot* d'un mot $v \in A^*$ s'il existe des mots $u_0 \cdots u_n \in A^*$ tels que $v = u_0 a_1 u_1 \cdots a_n u_n$. Pour un langage $L \subseteq A^*$, on note SM(L) l'ensemble des sous-mots de L.

Montrer que si L est un langage reconnaissable, alors SM(L) l'est aussi.

Shuffle Soient $u, v \in A^*$. On définit l'ensemble des shuffles (mélanges) de u et v par :

$$u \sqcup\!\sqcup v = \{w \in A^* |\ \exists u_1, v_1, \cdots u_n, v_n \text{tels que} u = u_1 \cdots u_n, v = v_1 \cdots v_n etw = u_1 v_1 \cdots u_n v_n\}$$

Pour $K, L \in A^*$, on définit $K \sqcup\!\sqcup L = \{w \in A^* |\ \exists u \in K,\ \exists v \in L,\ w \in u \sqcup\!\sqcup v\}$.
Montrer que si K et L sont des langages reconnaissables, il en est de même pour $K \sqcup\!\sqcup L$.

Mixage Soient $A_1, A_2 \subseteq A$, on définit le produit de mixage (noté $\sqcap\!\sqcap$) de la manière suivante : $u \sqcap\!\sqcap_{A_1,A_2} v = \{w \mid \pi_{A_1}(w) = u \text{ et } \pi_{A_2}(w) = v\}$.
Montrer que si L et L' sont reconnaissables alors $L \sqcap\!\sqcap_{A_1,A_2} L'$ est reconnaissable.

Morphismes La classe des langages reconnaissables est close par morphisme et morphisme inverse. Soient A et B deux alphabets, et $f : A^* \to B^*$ un morphisme.
- Si $L \in \text{Rec}(A^*)$ montrer que $f(L) \in \text{Rec}(B^*)$.
- Si $L \in \text{Rec}(B^*)$ montrer que $f^{-1}(L) \in \text{Rec}(A^*)$.

Substitutions Une *substitution* est un morphisme de A^* dans $\mathcal{P}(B^*)$. Elle est *rationnelle* si elle est définie par une application σ de A dans Rec(B^*). La classe des langages reconnaissables est close par substitution et substitution inverse. Soient A et B deux alphabets, et $\sigma : A^* \to B^*$ une substitution rationnelle.
- Si $L \in \text{Rec}(A^*)$ montrer que $\sigma(L) \in \text{Rec}(B^*)$.
- Si $L \in \text{Rec}(B^*)$ montrer que $\sigma^{-1}(L) = \{u \mid \sigma(u) \cap L \neq \emptyset\} \in \text{Rec}(A^*)$.

Application Montrer que le langage $\{a^n b a^n |\ n \leq 1\}$ n'est pas reconnaissable en utilisant le fait que $\{0^n 1^n |\ n \leq 1\}$ n'est pas reconnaissable, et des opérations qui préservent la reconnaissabilité.

Exercice 5 (De l'automate à l'expression rationnelle)

(i) Montrer le lemme d'Arden :
Soit $P, R \subseteq A^*$, $\varepsilon \notin P$, alors l'équation $X = PX + R$ admet comme unique solution P^*R.

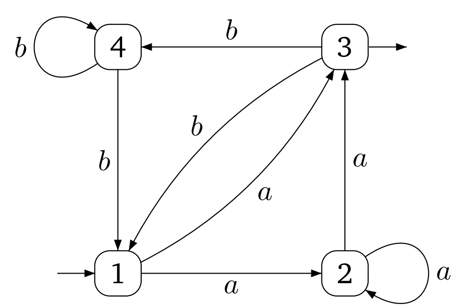
(ii) Montrer que si $\forall i, j\ \varepsilon \notin P_{i,j}$ alors le système suivant admet une unique solution pour laquelle chaque X_i appartient à $Rat\{P_{i,j}, R_i\}$:

$$\begin{aligned}
&X_1 = P_{1,1}X_1 + \cdots + P_{1,n}X_n + R_n \\
&\vdots \\
&X_n = P_{n,1}X_1 + \cdots + P_{n,n}X_n + R_n
\end{aligned}$$

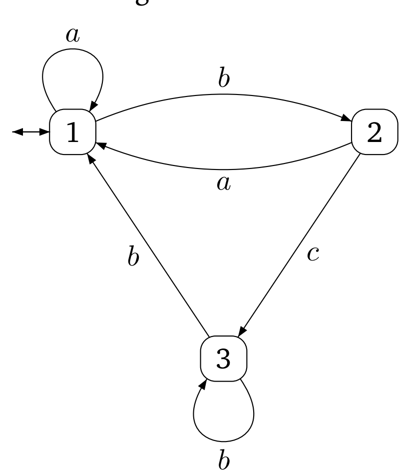
(iii) A partir d'un automate fini, expliquer comment construire un système d'équations dont les solutions sont les langages reconnus à partir de chacun des états.

Exercice 6 (Calcul d'expressions rationnelles)

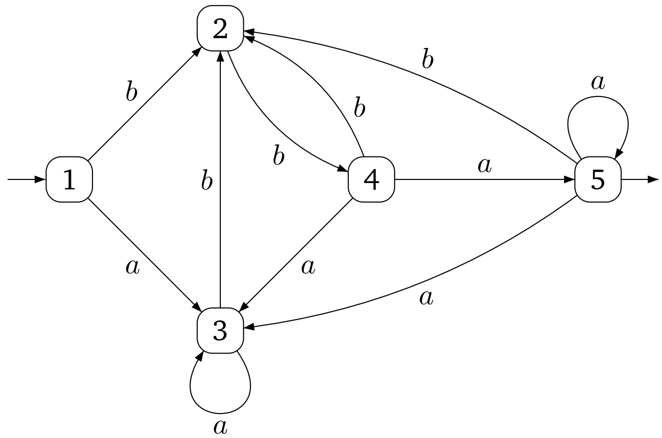
(i) Trouver “à l'oeil” une expression rationnelle pour l'automate suivant :



(ii) Appliquer l'algorithme de Mc Naughton et Yamada à l'automate suivant :



(iii) Appliquer la méthode de l'exercice 5 à l'automate suivant :



Exercice 7 (De l'expression rationnelle à l'automate)

(i) Donner un algorithme permettant de construire un automate associé à une expression rationnelle.

(ii) Appliquer cet algorithme pour l'expression $(a(ab)^*)^*$.

Exercice 8 (Automates universels)
Un automate fini $\mathcal{A}$ peut-être interprété comme étant universel : un mot est accepté si tous les calculs sur ce mot sont accepteurs. On note $L_\forall(\mathcal{A})$ son langage.

(i) Montrer que si $\mathcal{A}$ est un automate fini, $L_\forall(\mathcal{A})$ est rationnel.

(ii) On suppose L rationnel, montrer que les langages suivants sont rationnels :
$\{w \mid \exists(u,v)\ w = uv$ et $v \in L\}$ et $\{w \mid \forall(u,v)\ w = uv \Rightarrow v \in L\}$

Exercice 9 (Langages locaux, algorithme de Glushkov)
Un langage L sur A est dit *local* s'il existe des parties P et S de A et une partie N de A^2 telles que $L\backslash\{1\} = PA^* \cap A^*S \setminus A^*NA^*$.

(i) Montrer que tout langage local est reconnu par un automate fini ayant $n+1$ états où n est le cardinal de A.

(ii) Montrer qu'il existe des langages reconnaissables qui ne sont pas locaux.

(iii) Montrer que tout langage reconnaissable est l'image par un morphisme strictement alphabétique (c'est-à-dire que l'image d'une lettre est de longueur 1) d'un langage local.

(iv) Soit L un langage, on définit $P(L) = \{a \in A \mid aA^* \cap L \neq \emptyset\}$, $S(L) = \{a \in A \mid A^*a \cap L \neq \emptyset\}$, $F(L) = \{x \in A^2 \mid A^*xA^* \cap L \neq \emptyset\}$.
Soit L un langage local, montrer que $L = P(L)A^* \cap A^*S(L) \setminus A^*F(L)^cA^*$. Donner un algorithme pour calculer $P(L), S(L)$ et $F(L)$ à partir d'une expression rationnelle représentant L.

(v) Une expression rationnelle est dite *linéaire* si chaque lettre a au plus une occurrence dans l'expression. Montrer qu'une expression linéaire représente un language local.

(vi) En déduire un algorithme pour construire un automate à partir d'une expression rationnelle (linéaire ou non). Comparer avec l'algorithme naïf.

(vii) Appliquer cet algorithme à l'expression rationnelle $(a(ab)^*)^*$.