Langages formels

5. Automates d'arbres

5 mars 2007

Exercice 1 – *Propriétés de clôture*

Montrer que la classe des langages d'arbres reconnaissables est close par les opérations booléennes (union, intersection et complémentaire). Proposer des constructions préservant le déterminisme ascendant.

Exercice 2 – *Exemples de langages d'arbres*

On pose $\mathcal{F} := \{f(2), g(1), a(0)\}$. Pour chacun des langages d'arbres suivants, déterminer s'il est reconnaissable, soit en exhibant un automate d'arbre le reconnaissant, soit en prouvant qu'il n'en existe pas. Dans le premier cas, décider s'il est ou non reconnaissable par un automate déterministe descendant.

1. l'ensemble des formules du calcul propositionnel sur un ensemble fini $\mathcal{P}$ de variables propositionnelles fixé qui sont satisfaisables ;
2. le langage $G(t) := \{ f(f(a, u), g(v)) \mid u, v \in T(\mathcal{F}) \}$ des instances du terme $t = f(f(a, x), g(y))$;
3. l'ensemble $M(t) := \{ c \cdot u \mid c \in T_{\Box}(\mathcal{F}), u \in G(t) \}$ des termes ayant une instance de t comme sous terme, avec $t = f(a, g(x))$;
4. l'ensemble $\{ t \mid \sharp\, \mathrm{dom}(t) \text{ premier} \}$;
5. l'ensemble $\{ f(t, t) \mid t \in T(\mathcal{F}) \}$.

Exercice 3 – *Associativité, et commutativité*

Soit $\mathcal{F} = \{f(2), a(0), b(0)\}$.

1. Considérons l'ensemble de termes clos L_1 défini par les conditions suivantes :

$$f(a, b) \in L_1, \qquad \forall t \in L_1,\ f(a, f(t, b)) \in L_1.$$

   Montrer que L_1 est reconnaissable.
2. Montrer que l'ensemble $L_2 = \{ t \in T(\mathcal{F}) \mid |t|_a = |t|_b \}$ n'est pas reconnaissable.
3. Soit $L \subseteq T(\mathcal{F})$ un langage d'arbres reconnaissable. Soit $C(L)$ la clôture par congruence de l'ensemble L par l'équation $f(x, y) = f(y, x)$. Montrer que $C(L)$ est reconnaissable.

4. Soit $L \subseteq T(\mathcal{F})$ un langage d'arbres reconnaissable. Soit $AC(L)$ la clôture par congruence de l'ensemble L par le système d'équations

$$f(x, y) = f(y, x) \qquad\qquad f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$$

Montrer que $AC(L)$ n'est en général pas reconnaissable.

5. Soit $L \subseteq T(\mathcal{F})$ un langage d'arbres reconnaissable. Soit $A(L)$ la clôture par congruence de l'ensemble L par l'équation $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$. Montrer que $A(L)$ n'est en général pas reconnaissable.

Exercice 4 – *Morphismes, épisode I*

1. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de symboles de fonctions avec arités. Inventer ce que sont une $\mathcal{F}$-algèbre et un morphisme de $\mathcal{F}$-algèbres.
2. Montrer que $L \subseteq T(\mathcal{F})$ est reconnaissable (par automate d'arbres) si et seulement s'il existe une $\mathcal{F}$-algèbre finie A telle que $L = \varphi^{-1}(\varphi(L))$, où $\varphi : T(\mathcal{F}) \to A$ est le morphisme canonique.
3. Exemple : Soit $\mathcal{F} = \{f(2), a(0)\}$. Montrer que l'ensemble des arbres ayant un nombre pair de feuilles est reconnaissable en utilisant la caractérisation ci-dessus.

Exercice 5 – *Morphismes, épisode II*

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux ensembles de symboles de fonctions, éventuellement non disjoints. Pour tout $n > 0$ tel que $\mathcal{F}$ contient un symbole d'arité n, définissons un ensemble de variables $\mathcal{X}_n := \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit $h_{\mathcal{F}}$ une application qui, à tout élément $f \in \mathcal{F}_n$, associe un terme $t_f \in T(\mathcal{F}', \mathcal{X}_n)$. Le morphisme d'arbres $h : T(\mathcal{F}) \to T(\mathcal{F}')$ déterminé par $h_{\mathcal{F}}$ est défini inductivement par

$$h(f(t_1, \dots, t_n)) := t_f[h(t_1)/x_1, \dots, h(t_n)/x_n]$$

Un morphisme est dit linéaire si toutes les images de l'application associée sont des termes linéaires en les variables des $\mathcal{X}_n$.

1. Exemple : On considère les deux ensembles $\mathcal{F} := \{g(3), a(0), b(0)\}$ et $\mathcal{F}' := \{f(2), a(0), b(0)\}$. On définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} h(g) &:= f(x_1, f(x_2, x_3)) \\ h(a) &:= a \\ h(b) &:= b \end{aligned}$$

Calculer l'image par le morphisme associé à h du terme $t = g(a, g(b, b, b), a)$.

2. Montrer que les morphismes préservent la reconnaissabilité par image réciproque.
3. Montrer que les morphismes linéaires préservent la reconnaissabilité par image directe.
4. Donner un exemple de morphisme non linéaire ne préservant pas la reconnaissabilité par image directe.