Langages formels

8. Grammaires algébriques

26 mars 2007

Exercice 1 – *Applications du lemme d'Ogden*

En utilisant le lemme d'Ogden énoncé en cours, montrer les assertions suivantes.

1. $L_1 = \{ a^i b^j c^k \mid j = \max(i, k) \}$ n'est pas algébrique.

2. $L_2 = \{ a^n b^n c^m \mid n > 0, m \geqslant 0 \} \cup \{ a^q b^p c^p \mid p > 0, q \geqslant 0 \}$ est algébrique et ambigu.

Exercice 2 – *Problèmes indécidables*

On rappelle que le problème suivant, dit de la *correspondance de Post*, est indécidable :

> Soient $u_1, \ldots, u_k$ et $v_1, \ldots, v_k$ deux listes de même longueur dont les éléments sont des mots sur un certain alphabet Σ. Existe-t-il une suite d'indices $i_1, \ldots, i_n$ (avec $n > 0$) telle que $u_{i_1} \ldots u_{i_n} = v_{i_1} \ldots v_{i_n}$?

Soient L et L' des langages algébriques. Montrer que les problèmes suivants sont indécidables en général :

1. $L \cap L' = \emptyset$?

2. $L = \Sigma^*$?

3. L est-il ambigu ?

Exercice 3 – *Grammaires réduites*

Soit $G = \langle \Sigma, V, P, S \rangle$ une grammaire algébrique.

1. Montrer que l'on peut :

  a. Calculer l'ensemble des variables productives de G ;

  b. Décider si $\mathcal{L}_G(S) = \emptyset$;

  c. Calculer l'ensemble des variables accessibles de G.

2. On suppose que $\mathcal{L}_G(S) \neq \emptyset$. Montrer que l'on peut effectivement construire une grammaire réduite équivalente à G.

3. Réduire la grammaire suivante :

$$S \to aT + bTU + abTS + UV \qquad U \to aU + bU$$
$$T \to aU + bT + a \qquad V \to aT + bS + a$$

Exercice 4 – *Grammaires propres*

Soit $G = \langle \Sigma, V, P, S \rangle$ une grammaire algébrique.

1. Montrer que l'on peut calculer l'ensemble des variables x telles que $\varepsilon \in \mathcal{L}_G(x)$.

2. Montrer que l'on peut effectivement construire une grammaire propre G' qui engendre $\mathcal{L}_G(S) \setminus \{\varepsilon\}$.

Exemple Rendre propre la grammaire suivante :

$$S \to TU + VW + X \qquad U \to aU + V \qquad W \to cW + \varepsilon$$
$$T \to TT + W \qquad V \to U + W + XaV \qquad X \to W + b$$

Exercice 5 – *Forme normale de Chomsky*

Soit $G = \langle \Sigma, V, P, S \rangle$ une grammaire.

1. Montrer que l'on peut construire une grammaire équivalente G' en forme normale de Chomsky faible (resp. forte).
2. Montrer que l'on peut décider si $\mathcal{L}_G(S)$ est fini.
3. Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky forte :

$$S \to bA + aB \qquad A \to bAA + aS + a \qquad B \to aBB + bS + b$$

Exercice 6 – *Problème du mot*

Soit G une grammaire propre en forme normale de Chomsky forte. Montrer que l'on peut décider si un mot $u \in \Sigma^*$ est engendré par G en temps polynomial.

Exercice 7 – *Forme normale de Greibach*

Soit $G = (\Sigma, V, P, S)$ une grammaire algébrique de langage associé non vide. G est en *forme normale presque Greibach* si toutes les productions de P sont de la forme $X \to a\alpha$ avec $a \in \Sigma$ et $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$, G est en *forme normale de Greibach* si toutes les productions de P sont de la forme $X \to a\alpha$ avec $a \in \Sigma$ et $\alpha \in V^*$.

1. Soit G une grammaire algébrique, $X \to \alpha_1 Y \alpha_2$ une règle de P et soit $Y \to \beta_1 + \ldots + \beta_m$ l'ensemble des règles de P ayant Y comme membre gauche. Montrer que la grammaire G' obtenue en remplaçant la règle $X \to \alpha_1 Y \alpha_2$ par les règles $X \to \alpha_1 \beta_i \alpha_2$ (pour $1 \leqslant i \leqslant m$) engendre le même langage que G.
2. Soit G une grammaire algébrique propre, $X \to X\alpha_1 + \ldots X\alpha_r$ l'ensemble des règles de P ayant X comme membre gauche et X comme symbole le plus à gauche dans les membres droits, $X \to \beta_1 + \ldots + \beta_s$ le reste des règles de P ayant X comme membre gauche. Montrer que la grammaire G' obtenue en ajoutant une variable Z et en remplaçant l'ensemble des règles ayant X comme membre gauche par les règles

$$X \to \beta_1 Z + \ldots \beta_s Z + \beta_1 + \ldots + \beta_s \qquad Z \to \alpha_1 Z + \ldots \alpha_r Z + \alpha_1 + \ldots \alpha_r$$

engendre le même langage que G.

3. On considère une grammaire algébrique $G = (\Sigma, V, P, S)$, propre et réduite. On suppose que $V = \{X_1 \ldots X_n\}$ et $S = X_1$. Montrer que l'on peut construire une suite $(G_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de grammaires engendrant le même langage que G telles que $G_0 = G$ et pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, G_i a pour ensemble de non-terminaux $V_i = V \cup \{Z_1 \ldots Z_i\}$ et vérifie que pour toute règle $X_k \to \gamma$,
   – γ ne commence pas par un non-terminal de $\{X_1 \ldots X_k\} \cup \{Z_1 \ldots Z_i\}$ si $k \leqslant i$
   – γ ne commence pas par un non-terminal de $\{X_1 \ldots X_i\} \cup \{Z_1 \ldots Z_i\}$ si $k > i$
   En déduire qu'on peut obtenir à partir de G_n une grammaire algébrique sous forme normale de Greibach engendrant le même langage que G.