Langages formels

9. Encore des langages algébriques

2 avril 2007

Exercice 1 – *Forme normale de Greibach*

Soit $G = (\Sigma, V, P, S)$ une grammaire algébrique de langage associé non vide. G est en *forme normale presque Greibach* si toutes les productions de P sont de la forme $X \to a\alpha$ avec $a \in \Sigma$ et $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$, G est en *forme normale de Greibach* si toutes les productions de P sont de la forme $X \to a\alpha$ avec $a \in \Sigma$ et $\alpha \in V^*$.

1. Soit G une grammaire algébrique, $X \to \alpha_1 Y \alpha_2$ une règle de P et soit $Y \to \beta_1 + \ldots + \beta_m$ l'ensemble des règles de P ayant Y comme membre gauche. Montrer que la grammaire G' obtenue en remplaçant la règle $X \to \alpha_1 Y \alpha_2$ par les règles $X \to \alpha_1 \beta_i \alpha_2$ (pour $1 \leqslant i \leqslant m$) engendre le même langage que G.

2. Soit G une grammaire algébrique propre, $X \to X\alpha_1 + \ldots X\alpha_r$ l'ensemble des règles de P ayant X comme membre gauche et X comme symbole le plus à gauche dans les membres droits, $X \to \beta_1 + \ldots + \beta_s$ le reste des règles de P ayant X comme membre gauche. Montrer que la grammaire G' obtenue en ajoutant une variable Z et en remplaçant l'ensemble des règles ayant X comme membre gauche par les règles

$$X \to \beta_1 Z + \ldots \beta_s Z + \beta_1 + \ldots + \beta_s \qquad Z \to \alpha_1 Z + \ldots \alpha_r Z + \alpha_1 + \ldots \alpha_r$$

engendre le même langage que G.

3. On considère une grammaire algébrique $G = (\Sigma, V, P, S)$, propre et réduite. On suppose que $V = \{X_1 \ldots X_n\}$ et $S = X_1$. Montrer que l'on peut construire une suite $(G_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de grammaires engendrant le même langage que G telles que $G_0 = G$ et pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, G_i a pour ensemble de non-terminaux $V_i = V \cup \{Z_1 \ldots Z_i\}$ et vérifie que pour toute règle $X_k \to \gamma$,
– γ ne commence pas par un non-terminal de $\{X_1 \ldots X_k\} \cup \{Z_1 \ldots Z_i\}$ si $k \leqslant i$
– γ ne commence pas par un non-terminal de $\{X_1 \ldots X_i\} \cup \{Z_1 \ldots Z_i\}$ si $k > i$
En déduire qu'on peut obtenir à partir de G_n une grammaire algébrique sous forme normale de Greibach engendrant le même langage que G.

4. Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Greibach :

$$A_1 \to A_2 A_3 \qquad A_2 \to A_3 A_1 + b \qquad A_3 \to A_1 A_2 + a$$

Exercice 2 Soit G une grammaire algébrique à au plus p productions et dont les membres droits sont de taille au plus n. Montrer que si G engendre ε, alors ε peut être engendré par une dérivation de longueur au plus $(n^p - 1)/(n-1)$. Montrer que cette borne est atteinte.

Exercice 3 Montrer que l'ensemble des langages algébriques est clos par

1. ensemble des préfixes, c'est-à-dire $\{ u \mid \exists v, uv \in L \}$;

2. résiduels à droite, c'est-à-dire $L/a = \{ u \mid ua \in L \}$ pour $a \in \Sigma^*$ fixé ;

3. mélange avec un langage rationnel.

4. Montrer que le mélange de deux algébriques n'est pas forcément algébrique.

Exercice 4 Une grammaire est dite self-embedding lorsqu'il existe une variable A et deux mots $u, v \in \Sigma^+$ tels qu'il y ait une dérivation $A \to^* uAv$. Montrer qu'un langage est rationnel si et seulement si il est reconnu par une grammaire algébrique non self-embedding.