3.7 Résolution en logique du premier ordre

3.7.1 Motivation

Reprenons les explications données au début du paragraphe 3.6.

Un premier essai de transférer la résolution propositionnelle vers la logique du premier ordre est comme suit : Étant donné un ensemble fini S de formules, on peut le transformer en un ensemble de clauses universelles S', et puis construire l'ensemble des ces instances de Herbrand $H(S')$. Par le Théorème 3.5.4 et la complétude réfutationelle de la résolution propositionnelle, S est non-satisfaisable si et seulement si $H(S') \vdash_R \Box$. Malheureusement, cela ne nous donne pas directement une énumération récursive des ensembles finis non-satisfaisables de formules puisqu'il s'agit d'un ensemble infini de clauses, et il n'est pas clair comment, en général, un algorithme peut travailler sur un ensemble infini de clauses.

En utilisant le fait qu'il y a des stratégies terminantes et complètes de résolution propositionnelle on peut quand-même tirer de ce premier essai une énumération récursive des ensembles finis non-satisfaisables de formules : Étant donné S, on construit une énumération effective $s_1, s_2, \ldots$ des instances de Herbrand de S. Soit $\vdash_{RS}$ la déduction par résolution binaire et factorisation selon la stratégie complète et terminante. On lance l'algorithme suivant :

```
T := ∅ ;
n := 0 ;
while □ ∉ T do begin
   T := T ∪ { s_n } ;
   n := n+1 ;
   while there exists a w ∉ T such that T ⊢_RS w do
       T := T ∪ { w }  ;
end ;
print "non satisfaisable" ;
```

Puisque la stratégie est terminante, la boucle intérieure termine toujours après un nombre fini d'itérations. On dit que la boucle intérieure calcule une *saturation* par $\vdash_{RS}$. En un sens, cet algorithme est déjà un peu plus « intelligent » que l'algorithme présenté à la fin de la section précédente puisque, à chaque itération de la boucle principale, on réutilise le travail fait pendant les itérations précédentes.

La clef pour faire mieux est l'observation que, étant donnée une clause universelle U, son ensemble d'instances de Herbrand est un ensemble très régulier. L'idée est donc de chercher une représentation finie de cet ensemble infini de clauses. La représentation qui vient à l'esprit est d'utiliser une clause universelle en S' comme une représentation de l'ensemble infini $H(S')$. Puis, étant données deux clauses universelles C_1 et C_2, on cherche à exécuter d'un seul coup un pas de résolution sur toutes les instances de Herbrand de C_1 et toutes les instances de Herbrand de C_2, et de représenter l'ensemble résultant de clauses par une clause du premier ordre.

Pour illustrer cette idée, supposons données deux clauses du premier ordre $C_1 = \forall\bar{x}(P(s) \vee L)$ et $C_2 = \forall\bar{y}(\neg P(t) \vee K)$. On cherche une clause du premier ordre R, telle que les instances de Herbrand de R sont exactement les clauses propositionnelles qu'on peut obtenir par résolution propositionnelle sur P entre une instance de Herbrand de C_1 et une instance de Herbrand de C_2.

On a donc

$$\begin{array}{rcl} H(C_1) & = & \{(P(s) \vee L)\sigma \mid \sigma \in \Sigma_g\} \\ H(C_2) & = & \{(\neg P(t) \vee K)\tau \mid \tau \in \Sigma_g\} \end{array}$$

Un pas de résolution est possible ssi il existe des substitutions σ et τ telles que $s\sigma = t\tau$. Comme C_1 et C_2 peuvent être supposées ne pas partager de variables (après éventuel renommage des variables liées), $s\sigma = t\tau$ revient à dire que s et t sont unifiables.

L'ensemble des clauses closes qu'on peut obtenir par un pas de résolution est donc

$$\{L\sigma \vee K\tau \mid \sigma, \tau \in \Sigma_g, s\sigma = t\tau\} \tag{3.1}$$

Quand $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$, cet ensemble est le même que

$$\{(L \vee K)\nu \mid \nu \in \Sigma_g, s\nu = t\nu\} \tag{3.2}$$

Quand $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$ on peut supposer que $Dom(\sigma) \cap Dom(\tau) = \emptyset$. Les ensembles (3.1) et (3.2) sont alors égaux parce que

- étant donnée σ et τ en (3.1), on peut définir ν en (3.2) par $\nu = \sigma \circ \tau$ $(= \tau \circ \sigma)$;
- étant donnée τ in (3.2), on peut définir en (3.2) $\sigma = \nu\mid_{\bar{x}}$ et $\tau = \nu\mid_{\bar{y}}$.

Par contre, cette égalité est en général fausse quand $\bar{x}$ et $\bar{y}$ ne sont pas disjoints. Par exemple, les termes x et $f(x)$ ont des instances communes (par exemple, $f(a)$), mais il n'y a aucune substitution ν telle que $x\nu = f(x)\nu$.

Si μ est un mgu de s et t, alors l'ensemble (3.2) est donc le même que

$$\{((L \vee K)\mu)\nu \mid \nu \in \Sigma_g\} \tag{3.3}$$

Le raisonnement pour la factorisation est analogue.

3.7.2 Résolution

On obtient donc les règles de résolution données sur la Figure 3.4. Dans les preuves par résolution, on n'écrit normalement pas les quantificateurs universels. Pourtant, il ne faut pas oublier que chaque clause est implicitement universellement quantifiée. Une conséquence importante est qu'on doit toujours assurer, avant d'appliquer un pas de résolution à deux clauses, que leur ensembles de variables soient disjoints. Si ce n'est pas le cas on est obligé de renommer les variables dans une des clauses. Finalement, si S est un ensemble de clauses du premier ordre, on note $S \vdash_{R1} C$ quand la clause C est obtenue à partir de S par une application des règles de la Figure 3.4.

Lemme 3.7.1 *Les règles de la résolution du premier ordre sont correctes : Si $S \vdash_{R1} C$ alors C est une conséquence logique de S.*

$$\text{Résolution binaire} \quad \frac{\forall\bar{x}(\neg P(\bar{s}) \vee L) \quad \forall\bar{y}(P(\bar{t}) \vee K)}{\forall\bar{z}((L \vee K)\sigma)} \quad \begin{array}{l} \sigma \text{ est un mgu de } \bar{s} \stackrel{?}{=} \bar{t} \\ \bar{x} = \mathrm{Var}(\neg P(\bar{s}) \vee L) \\ \bar{y} = \mathrm{Var}(P(\bar{t}) \vee K) \\ \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset \\ \bar{z} = \mathrm{Var}((L \vee K)\sigma) \end{array}$$

$$\text{Factorisation} \quad \frac{\forall\bar{x}(P(\bar{s}) \vee P(\bar{t}) \vee L)}{\forall\bar{z}((P(\bar{t}) \vee L)\sigma)} \quad \begin{array}{l} \sigma \text{ est un mgu de } \bar{s} \stackrel{?}{=} \bar{t} \\ \bar{x} = \mathrm{Var}(P(\bar{s}) \vee P(\bar{t}) \vee L) \\ \bar{z} = \mathrm{Var}((P(\bar{t}) \vee L)\sigma) \end{array}$$

FIG. 3.4 – Règles de résolution pour la logique du premier ordre.

Lemme 3.7.2 *(Lemme de relèvement)*

- *Soient C_1 et C_2 des clauses universelles closes, $D_1 \in H(C_1)$, $D_2 \in H(C_2)$, et $\{D_1, D_2\} \vdash_R D_3$ par résolution binaire. Alors il existe une clause universelle close C_3 telle que $\{C_1, C_2\} \vdash_{R1} C_3$ par résolution binaire et $D_3 \in H(C_3)$.*
- *Soit C_1 une clause universelle close, $D_1 \in H(C_1)$, et $\{D_1\} \vdash_R D_2$ par factorisation binaire. Alors il existe une clause universelle close C_2 telle que $\{C_1\} \vdash_{R1} C_2$ et $D_2 \in H(C_2)$.*

Preuve:
Soient

- $C_1 = \forall\bar{x}(P(\bar{s}) \vee L)$
- $C_2 = \forall\bar{y}(\neg P(\bar{t}) \vee K)$
- $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$
- $D_1 = (P(\bar{s}) \vee L)\sigma$
- $D_2 = (\neg P(\bar{t}) \vee K)\sigma$
- $\bar{s}\sigma = \bar{t}\sigma$

Résolution binaire sur $\{C_1, C_2\}$ nous donne une clause universelle $C_3 := \forall z(L \vee K)\mu$, où $\bar{z} \subseteq \bar{x} \cup \bar{y}$, et μ est un mgu de $\bar{s}$ et $\bar{t}$. Résolution binaire propositionnelle sur $\{D_1, D_2\}$ donne $D_3 := (L \vee K)\sigma$. Puisque σ est un unificateur de $\bar{s}$ et $\bar{t}$, et puisque μ est un mgu de $\bar{s}$ et $\bar{t}$, il y a une substitution ν telle que $\sigma = \nu \circ \mu$. Donc, $(L \vee K)\sigma = ((L \vee K)\mu)\nu$, donc $D_3 = (L \vee K)\sigma \in H(C_3)$.

La preuve pour la factorisation est analogue. □

Lemme 3.7.3 *Soit S un ensemble de clauses universelles closes. Si $H(S) \vdash_R^* D$, alors il existe une clause universelle close C telle que $S \vdash_{R1}^* C$ et $D \in H(C)$.*

Preuve:
Par induction sur la structure de la preuve $H(S) \vdash_R^* D$:

- si $D \in H(S)$ alors il existe un $C \in S$ tel que $D \in H(C)$.
- si le dernier pas de la preuve de D est une résolution binaire $\{D_1, D_2\} \vdash_R D$: Par hypothèse de récurrence, il existe des clauses universelles closes

C_1, C_2 telles que $S \vdash^*_{R1} C_1$, $S \vdash^*_{R1} C_2$, $D_1 \in H(C_1)$ et $D_2 \in H(C_2)$. Par Lemme 3.7.2, il existe une clause universelle close C telle que $\{C_1, C_2\} \vdash_{R1} C$, donc $S \vdash^*_{R1} C$, et $D \in H(C)$.

– si le dernier pas de la preuve de D est une factorisation binaire : similaire.

$\square$

Théorème 3.7.1 *[Robinson] Soit S un ensemble de clauses universelles closes. S est non-satisfaisable si et seulement si $S \vdash^*_{R1} \square$.*

Preuve:
Par Lemme 3.7.1, si $S \vdash^*_{R1} \square$ alors S n'est pas satisfaisable.

Soit S non satisfaisable. Par Théorème 3.5.4, $H(S)$ n'est pas satisfaisable. Donc, par la complétude de la résolution propositionnelle, $H(S) \vdash^*_R \square$. Il suit, par Lemme 3.7.3, que $S \vdash^*_{R1} \square$ (remarquez que, si $\square \in H(C)$ alors $C = \square$). $\square$

Exemple 3.7.1 On considère l'ensemble des clauses universelles

(1) $P(x, x)$
(2) $\neg P(x, y) \vee P(x, s(y)))$
(3) $\neg P(f(x), s(s(f(x))))$

On en déduit par résolution

(4)	$P(x, s(x))$	résolution binaire sur (1), (2)
(5)	$P(x, (s(s(x)))$	résolution binaire sur (4), (2)
(6)	$\square$	résolution binaire sur (5), (3)

Exercice 102 (2)
Soit l'ensemble de clauses universelles suivant :

(1) $\neg P(x) \vee Q(f(x), x)$
(2) $\neg P(x) \vee \neg Q(y, x) \vee R(y)$
(3) $\neg R(y) \vee \neg S(y) \vee \neg P(x) \vee \neg Q(y, x)$
(4) $\neg S(y) \vee R(y)$
(5) $P(a)$
(6) $\neg R(x) \vee S(x)$

En déduire par résolution $\square$.

Exercice 103 (5)
Soit S un ensemble fini de clauses universelles closes, et qui possède un plus petit modèle de Herbrand $\mathcal{H}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est récursivement énumérable, c'est-à-dire que $P_{\mathcal{H}}$ est récursivement énumérable pour tous les symboles de prédicat P.