Chapitre 5

Introduction à la théorie des modèles

La théorie des modèles s'intéresse à l'expressivité d'une logique. Étant donné $\mathcal{P}$ et et $\mathcal{F}$, on dit qu'une classe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures est *élémentaire* si et seulement s'il y a une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-théorie T telle que C est exactement la classe des modèles de T. Par exemple, on peut se poser les questions suivantes :

- Est-ce que la classe de tous les groupes est élémentaire ?
- Est-ce que la classe de tous les groupes de torsion est élémentaire ?
- Est-ce que la classe de tous les ordres noethériens est élémentaire ?
- Est-ce que la classe de toutes les $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures de Herbrand est élémentaire ?

Puisque la plupart des structures mathématiques (groupes, corps, etc.) utilisent l'égalité, la théorie des modèles est normalement étudiée pour la logique du premier ordre avec égalité.

5.1 La logique du premier ordre avec égalité

Definition 5.1.1 *Une structure $\mathcal{A}$ est* égalitaire *si $\mathcal{A}$ interprète le symbole $=$ comme égalité sur le domaine de $\mathcal{A}$.*

On peut voir facilement que la restriction aux structures égalitaires n'affecte pas les théorèmes fondamentales de la logique du premier ordre : Soit $Eq(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ l'ensemble des axiomes de l'égalité donnés dans l'exemple 3.1.7 pour l'ensemble $\mathcal{P}$ de prédicats et l'ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions. Les axiomes expriment exactement que l'interprétation du symbole $=$ est une congruence.

Definition 5.1.2 *Soit $\mathcal{A}$ une structure et $\equiv$ une congruence sur $\mathcal{A}$. Alors la structure $\mathcal{A}/\equiv$ est définie par*

- *le domaine consiste en l'ensemble des classes d'équivalence de $\equiv$;*
- $f_{\mathcal{A}/\equiv}([a_1], \ldots, [a_n]) = [f_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]$ *pour tout $f \in \mathcal{F}$;*
- $([a_1], \ldots, [a_n]) \in R_{\mathcal{A}/\equiv} \Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in R_{\mathcal{A}}$ *pour tout $R \in \mathcal{P}$.*

On voit que la structure $A/\equiv$ est bien définie quand $\equiv$ est une congruence sur $\mathcal{A}$.

Proposition 5.1.1 *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure. Si $\mathcal{A} \models T \cup Eq(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ alors $\mathcal{A}/=_{\mathcal{A}}$ est une structure égalitaire, et $\mathcal{A}/=_{\mathcal{A}} \models T$.*

Démonstration: On montre par induction structurelle que pour toute formule ϕ,

$$[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n], \mathcal{A} \models \phi \quad \Leftrightarrow \quad [x_1 \mapsto [a_1], \ldots, x_n \mapsto [a_n]], \mathcal{A}/{=_\mathcal{A}} \models \phi$$

□

Théorème 5.1.1 *[Skolem et Löwenheim, version avec égalité] Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ dénombrables. Si un ensemble S de $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-formules a un modèle égalitaire alors S a un modèle égalitaire dénombrable.*

Plus généralement si S a un modèle égalitaire alors S à un modèle égalitaire de cardinalité $\leq \max(\omega, card(\mathcal{F} \cup \mathcal{P}))$.

Démonstration: Soit $\mathcal{A}$ un modèle égalitaire de T. Alors, $\mathcal{A} \models T \cup Eq(\mathcal{F}, \mathcal{P})$. Par le théorème de Skolem et Löwenheim, version sans égalité, il y a un modèle B de $T \cup Eq(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ de cardinalité $\leq \max(\omega, \text{card}(\mathcal{F} \cup \mathcal{P}))$. Par proposition 5.1.1, $\mathcal{B}/{=_\mathcal{B}} \models T$, et évidemment la cardinalité de $\mathcal{B}/{=_\mathcal{B}}$ n'est pas plus grande que la cardinalité de $\mathcal{B}$. □

Exercice 94
Est-ce que le théorème 5.1.1 reste vraie quand on remplace « $\leq \max(\omega, \text{card}(\mathcal{F} \cup \mathcal{P}))$ » par « $= \max(\omega, \text{card}(\mathcal{F} \cup \mathcal{P}))$ » ?

Exemple 5.1.1 Soit $\mathcal{F} = \{0(0), 1(0), +(0), *(0)\}$, $\mathcal{P} = \{= (2), \leq (2)\}$, et $\mathbb{R}$ la $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure des nombres réelles. Par le théorème de Skolem-Löwenheim, il y a une structure dénombrable qui est élémentairement équivalente à $\mathbb{R}$.

Théorème 5.1.2 *(Compacité, version avec égalité) Un ensemble de formules possède un modèle égalitaire si et seulement si chacun des ses sous-ensembles finis possède un modèle égalitaire.*

Exercice 95
Démontrer le théorème 5.1.2.

Théorème 5.1.3 *L'ensemble des formules qui sont vraies dans toutes les structures égalitaires est récursivement énumérable.*

Démonstration: Une $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$-formule ϕ est vraie dans toutes les structures égalitaires si et seulement si la formule $Eq(\mathcal{F}', \mathcal{P}') \to \phi$ est valide, où $\mathcal{F}'$ (respectivement $\mathcal{P}'$) est l'ensemble des symboles de fonctions (respectivement symboles de prédicats) qui paraissent en ϕ. L'énoncé suit donc du théorème 3.5.8. □

> **Dans le reste du chapitre, nous ne considérons que des structures égalitaires.**

5.2 Applications de la compacité

Le théorème de Skolem-Löwenheim est aussi appelé *théorème descendant de Skolem-Löwenheim* puisque il assure l'existence d'un modèle d'une cardinalité inférieure de (ou égale à) la cardinalité du modèle de départ.

Lemme 5.2.1 *(Théorème ascendant de Skolem-Löwenheim) Soit T une théorie qui possède un modèle infini $\mathcal{A}$, et $\alpha \geq max(\omega, card(\mathcal{F} \cup \mathcal{P}))$. Alors T possède un modèle de cardinalité α.*

Démonstration: Soit C un ensemble de nouveaux symboles de constantes, avec $card(C) = \alpha$. Nous montrons que $T' := T \cup \{\neg c = d \mid c, d \in C, c \neq d\}$ possède un modèle. Par le théorème de compacité, il suffit de montrer que pour chaque sous-ensemble fini $C' \subseteq C$, $T \cup \{\neg c = d \mid c, d \in C', c \neq d\}$ possède un modèle. En fait tout modèle infini de T peut être étendu vers un E-modèle infini de $T \cup \{\neg c = d \mid c, d \in C', c \neq d\}$.

Donc, par théorème 5.1.1, T' possède un modèle de cardinalité α. D'autre côté la cardinalité de ce modèle ne peut pas être strictement inférieure à α. □

Il suit immédiatement que la classe des $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures de Herbrand n'est pas élémentaire.

Exercice 96
Un groupe est appelé *groupe de torsion* s'il existe un élément x différent de l'élément neutre e tel que $x^n = e$ pour un $n \geq 1$. Montrer que la classe des groupes de torsion n'est pas élémentaire.

Exercice 97
Soit $\mathcal{F} = \{0(0), 1(1), +(2), *, (2)\}$, $\mathcal{P} = \{= (2), \leq (2)\}$, et $\mathbb{N}$ la $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure des nombres naturels. Montrer qu'il y a une structure $\mathcal{A}$ dénombrable et élémentairement équivalente à $\mathbb{N}$, mais qui n'est pas isomorphe à $\mathbb{N}$.

5.3 Le théorème de Łos-Vaught

Definition 5.3.1 *Soit α un cardinal. Une théorie T est* α-catégorique *ssi toutes les modèles de T de cardinalité α sont isomorphes.*

Théorème 5.3.1 *[Łos-Vaught] Soit T une théorie dont tous les modèles sont infinis et qui est α-catégorique pour un cardinal $\alpha \geq max(\omega, card(\mathcal{P} \cup \mathcal{F}))$. Alors T est complet.*

Démonstration: Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des modèles de T. Nous montrons que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Selon l'hypothèse, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont infinis. Par le théorème 5.2.1, il y des structures $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ de cardinalité α telles que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}'$ et $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}'$. Puisque $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ sont des modèles de T et par α-catégoricité de T, $\mathcal{A}' \cong \mathcal{B}'$, donc $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. □

Si T est une ensemble de $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$-formules clos, alors T peut être prise comme un représentation de $\{w \mid T \models w\}$. De toute façon la différence entre ces deux ensembles n'importe pas dans le contexte de la théorie des modèles. Nous étendions donc le terme *théorie* à tous les ensembles de de formules clos.

Exemple 5.3.1 Soit $\mathcal{F} = \{\}$, $\mathcal{P} = \{= (2)\}$, et

$$T = \{\exists x_0, \ldots, x_n \bigwedge_{0 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \mid n \geq 1\}$$

Tous les modèles sont infinis, et T est α-catégorique pour tous les cardinaux α infinis. T est donc complet.

Exemple 5.3.2 Soit $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$, $\mathcal{P} = \{= (2)\}$, et T_{succ} la théorie suivante :

$$\begin{array}{l}\forall x(x = 0 \vee \exists y(x = s(y))) \\ \forall x, y\, s(x) \neq s(y) \\ \forall x\, 0 \neq s(x) \\ \{\forall x\, x \neq s^n(x) \mid n \geq 1\}\end{array}$$

T n'est pas ω-catégorique : Un premier modèle dénombrable est le modèle $\mathbb{N}$ des nombres naturels. Un autre modèle dénombrable et qui évidemment n'est pas isomorphe à $\mathbb{N}$ et le modèle $\mathcal{A}$ suivant :

- Domaine : $\{(n, i) \mid$ soit $n = 0$ et $i \in \mathbb{N}$, soit $n = 1$ et $i \in \mathbb{Z}\}$
- $0_{\mathcal{A}} := (0, 0)$
- $s_{\mathcal{A}}(n, i) := s(n, i + 1)$ pour tous n, i.

Par contre, tous les modèles de T_{succ} d'une cardinalité $\alpha > \omega$ sont isomorphes au modèle $\mathcal{B}_\alpha$ suivant. Soit 0 un élément fixe de α.

- Domaine : $\{(r, i) \mid r \in \alpha$, et soit $r = 0$ et $i \in \mathbb{N}$, soit $r \neq 0$ et $i \in \mathbb{Z}\}$
- $0_{\mathcal{B}_\alpha} := (0, 0)$
- $s_{\mathcal{B}_\alpha}(r, i) := s(r, i + 1)$ pour tous r, i.

Donc, T_{succ} n'est pas ω-catégorique mais est α-catégorique pour tout cardinal $\alpha > \omega$.

Exercice 98
Soit $\mathcal{F} = \{\}$, $\mathcal{P} = \{\leq (2)\}$, et T_1 la théorie suivante :

$$\begin{array}{l}\forall x\, x \leq x \\ \forall x, y, z(x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z) \\ \forall x, y(x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y) \\ \forall x, y(x \leq y \vee y \leq x) \\ \forall x, y(x \leq y \wedge x \neq y \rightarrow \exists z(x \leq z \wedge x \neq z \wedge z \leq y \wedge z \neq y)) \\ \forall x \exists y(x \leq y \wedge x \neq y) \\ \forall y \exists x(x \leq y \wedge x \neq y)\end{array}$$

T_1 est la théorie des ordres denses sans points extrêmes. Montrer

- T_1 est ω-catégorique.
- T_1 n'est pas 2^ω-catégorique.

En déduire que l'ensemble des conséquences sémantiques de T_1 est décidable.

Exemple 5.3.3 Soit $\mathcal{F} = \{\epsilon(0), a(1), b(1)\}$, $\mathcal{P} = \{= (2)\}$, et T_{ab} la théorie suivante :

$$\begin{array}{l}\forall x(x = \epsilon \vee \exists y(x = a(y) \vee x = b(y))) \\ \forall x, y(a(x) \neq a(y) \wedge b(x) \neq b(y)) \\ \forall x, y(0 \neq a(x) \wedge 0 \neq b(y) \wedge a(x) \neq b(y)) \\ \{\forall x\, x \neq t \mid t \in T(\mathcal{F}, \{x\}), \mathrm{Var}(t) = \{x\}\}\end{array}$$

Pour tous les cardinaux infinis α, la théorie T_{ab} n'est pas α-catégorique (preuve donnée au cours).

Nous citons sans preuve

Théorème 5.3.2 *[Morley et Shelah] Soient α et β des cardinaux $> max(\omega, card(\mathcal{F} \cup \mathcal{P}))$, et T une $\mathcal{F},\mathcal{P}$-théorie. Si T est α-catégorique alors T est β-catégorique.*

Donc, on a en particulier pour les langages dénombrables : Si une théorie est α-catégorique pour un α non-dénombrable, alors la théorie est même β-catégorique pour tous les cardinaux β non-dénombrables.

Il en suit que pour les langages dénombrables, toute théorie complète appartient à une des quatre catégories suivantes :
- α-catégorique pour tout cardinal α infini (voir exemple 5.3.1) ;
- pas ω-catégorique, mais α-catégorique pour tout $\alpha > \omega$ (voir exemple 5.3.2) ;
- ω-catégorique, mais pas α-catégorique pour tout $\alpha > \omega$ (voir exercice 98) ;
- α-catégorique dans aucun cardinal α infini (voir exemple 5.3.3).

5.4 Le théorème de Fraissé et les jeux d'Ehrenfeucht

On cherche une caractérisation algébrique de l'équivalence élémentaire. Par exemple, l'isomorphie entre deux structures est suffisante pour assurer l'équivalence élémentaire, mais c'est évidemment pas une condition nécessaire.

Definition 5.4.1 *Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des $\mathcal{F},\mathcal{P}$-structures. Une fonction partielle $p\colon \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ est un* isomorphisme partiel *si*

1. *p est injective ;*
2. *Pour tous $R \in \mathcal{P}$ d'arité n et $a_1, \ldots, a_n \in dom(p)$,*
$$(a_1, \ldots, a_n) \in R_{\mathcal{A}} \quad \Leftrightarrow \quad (p(a_1), \ldots, p(a_n)) \in R_{\mathcal{B}}$$
3. *Pour tout $f \in \mathcal{F}$ d'arité $n \geq 0$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in dom(p)$,*
$$a_0 = f_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad p(a_0) = f_{\mathcal{B}}(p(a_1), \ldots, p(a_n))$$

Exemple 5.4.1 Soit $\mathcal{F} = \{0(0), +(2)\}$ et $\mathcal{P} = \{= (2)\}$. La fonction partielle suivante est un isomorphe partiel $\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N}$:
$$2 \mapsto 2, \qquad 3 \mapsto 6$$

Par contre, la fonction partielle suivante n'est pas un isomorphe partiel $\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N}$:
$$2 \mapsto 1, \qquad 3 \mapsto 2$$

Definition 5.4.2 *Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des $\mathcal{F},\mathcal{P}$-structures. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont* partiellement isomorphes *($\mathcal{A} \cong_p \mathcal{B}$) s'il existe un ensemble non-vide P d'isomorphismes partiels de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ tel que*

1. *Pour tout $p \in P$ et $a \in \mathcal{A}$ il existe un $q \in P$ tel que $p \subseteq q$ et $a \in dom(q)$.*
2. *Pour tout $p \in P$ et $b \in \mathcal{B}$ il existe un $q \in P$ tel que $p \subseteq q$ et $b \in codom(q)$.*

Exemple 5.4.2 La suite des fonctions partielles construite dans l'exercice 98 établie une isomorphie partielle entre deux modèles de la théorie des ordres denses sans points extrêmes.

Lemme 5.4.1 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux structures dénombrables et $\mathcal{A} \cong_p \mathcal{B}$. Alors $\mathcal{A} \cong B$.*

Démonstration: C'était l'argument qui nous avait permit de conclure dans l'exercice 98. □

Par conséquence, la notion d'une isomorphie partielle est toujours trop forte.

Definition 5.4.3 *Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont* finiment isomorphes *($\mathcal{A} \cong_f \mathcal{B}$) s'il existe une séquence $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensemble non-vide d'isomorphismes partiels de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ tel que*

1. *Pour tout $p \in P_{n+1}$ et $a \in \mathcal{A}$ il existe un $q \in P_n$ tel que $p \subseteq q$ et $a \in dom(q)$.*
2. *Pour tout $p \in P_{n+1}$ et $b \in \mathcal{B}$ il existe un $q \in P_n$ tel que $p \subseteq q$ et $b \in codom(q)$.*

Théorème 5.4.1 *[Fraissé] Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ finis. Pour toutes $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$:*

$$\mathcal{A} \cong_f \mathcal{B} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$$

Remarquons que la finitude du langage n'est pas vraiment une restriction puisque $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ si pour tout sous-langage fini $\mathcal{F}', \mathcal{P}'$, $\mathcal{A}\mid_{\mathcal{F}',\mathcal{P}'} \equiv \mathcal{B}_{\mathcal{F}',\mathcal{P}'}$, où $\mathcal{A}\mid_{\mathcal{F}',\mathcal{P}'}$ dénote la restriction de $\mathcal{A}$ au langage $\mathcal{F}', \mathcal{P}'$.

Il y a une ré-formulation du théorème de Fraissé en termes de la théorie de jeux :

Un *jeu d'Ehrenfeucht* est joué par deux joueurs I et II sur deux $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ pour $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$ finis. Le joueur II essaye de démontrer que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, et I essaye de montrer le contraire.

Au début, I choisit le nombre n de tours à jouer. Les deux joueurs construisent une suite $(p_i)_{i=0,\ldots,n}$ d'isomorphismes partiels $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$. On commence avec $p_0 = \emptyset$.

Puis, au i-ème tour, $i \leq n$, I choisit d'abord soit un élément $a \in \mathcal{A}$, soit un élément $b \in \mathcal{B}$. Puis, le joueur II choisit un élément dans la structure opposée, c'est-à-dire un $b \in \mathcal{B}$ dans le premier cas, et un $a \in \mathcal{A}$ dans le second cas. Soit $p_i := p_{i-1} \cup \{(a,b)\}$. Si, à la fin du match, p_n est un isomorphisme partiel alors II gagne le match. Sinon I gagne le match.

Théorème 5.4.2 *[Ehrenfeucht] Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ finis et $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ des $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures. Alors $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ si et seulement s'il existe une stratégie gagnante pour le joueur II dans le jeu d'Ehrenfeucht.*

Exemple 5.4.3 Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux modèles de la théorie T_{succ} considérée en exemple 5.3.2.

Si $\mathcal{C}$ est un modèle de T_{succ} et $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ alors on peut définir pour tout j une distance orientée

$$\vec{d_j}(c_1,c_2) = \begin{cases} n & \text{si } s^n_{\mathcal{C}}(c_1) = c_2 \text{ et } n \leq j \\ -n & \text{si } s^n_{\mathcal{C}}(c_2) = c_1 \text{ et } n \leq j \\ \infty & \text{si un tel } n \text{ n'existe pas} \end{cases}$$

Les axiomes de T_{succ} garantissent que cette fonction est bien définie.

La stratégie gagnante pour le joueur II est comme suit :

> Si, au tour i, joueur I choisit $a \in \mathcal{A}$, alors II choisit un $b \in \mathcal{B}$ tel que pour tout $a' \in dom(p_{i-1})$:
> $$\vec{d_j}(a',a) = \vec{d_j}(p_{i-1}(a'),b)$$
> où $j = 2^{n-i}$. La stratégie est analogue dans le cas où le joueur II choisit au tour i un élément de $\mathcal{B}$.

Les axiomes de T_{succ} garantissent qu'il est toujours possible pour le joueur II de suivre cette stratégie.