Chapitre 7

Solutions des exercices

Exercice 65:

Si $h\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{N}$ est un homomorphisme, alors $h(0_{\mathbb{Z}_2}) = 0_{\mathbb{N}}$, et $h(1_{\mathbb{Z}_2}) = h(s_{\mathbb{Z}_2}(0_{\mathbb{Z}_2})) = s_{\mathbb{N}}(h(0_{\mathbb{Z}_2})) = s_{\mathbb{N}}(0_{\mathbb{N}}) = 1_{\mathbb{N}}$. Puis, on a d'une côté $h(s_{\mathbb{Z}_2}(1_{\mathbb{Z}_2})) = h(0_{\mathbb{Z}_2}) = 0_{\mathbb{N}}$, et d'autre côté $h(s_{\mathbb{Z}_2}(1_{\mathbb{Z}_2})) = s_N(h(1_{\mathbb{Z}_2})) = s_N(1_{\mathbb{N}}) = 2_{\mathbb{N}}$. Absurde.

Si $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ est un homomorphisme, alors on a que $h(0.5_{\mathbb{R}}) +_{\mathbb{R}} h(0.5_{\mathbb{R}}) = h(0.5_{\mathbb{R}} +_{\mathbb{R}} 0.5_{\mathbb{R}}) = h(1_{\mathbb{R}}) = h(s_{\mathbb{R}}(0_{\mathbb{R}})) = s_{\mathbb{N}}(h(0_{\mathbb{R}})) = s_N(0_{\mathbb{N}}) = 1_{\mathbb{N}}$. Or, il n'y a aucun $n \in \mathbb{N}$ tel que $n + n = 1$. Absurde.

Exercice 66:

On peut prendre $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{R(1)\}$, la structure $\mathcal{A}$ avec $D_{\mathcal{A}} = \{0\}$ et $R_{\mathcal{A}} = \{0\}$, la structure $\mathcal{B}$ avec $D_{\mathcal{B}} = \{0, 1\}$ et $R_{\mathcal{B}} = \{0\}$, $h(0) = 0$, et $\phi = \forall x R(x)$. h est même un plongement.

Exercice 67:

La classe des formules existentielles sans négation et sans implication.

Exercice 68:

$\mathcal{F} = \{a(0), b(0)\}$, $\mathcal{P} = \{P(1)\}$ et la formule $P(a) \vee P(b)$. Il y a trois modèles de Herbrand : $\{P(a), P(b)\}$, $\{P(a)\}$, et $\{P(b)\}$. Il n'y a pas de plus petit modèle.

Exercice 69:

Dans le premier cas c'est la structure $\mathcal{H}$ avec univers $\{s^n(0) \mid n \in \mathbb{N}\}$, $s_{\mathcal{H}}(s^n(0)) = s^{n+1}(0)$, et $=_{\mathcal{H}} = \{(s^n(0), s^m(0)) \mid n = m\}$. C'est donc, à isomorphisme près, la structure $(\mathbb{N}, 0, n \mapsto n{+}1)$.

Dans le deuxième cas ce n'est *pas* la structure $\mathbb{N}, 0, 1, +$, mais la structure $\mathcal{B}$ avec univers $T(\{0, 1, +\})$ (donc, $0 + 1$ est un élément différent de 1) et $(t_1, t_2) \in =_{\mathcal{B}}$ ssi t_1 et t_2 s'évaluent en $\mathbb{N}$ à la même valeur.

Exercice 70:

Non. Contre-exemple : $\mathcal{F} = \{a(0)\}$, $\mathcal{P} = \{R(1)\}$, $\phi = R(a) \wedge \exists x \neg R(x)$. L'univers de Herbrand est $\{a\}$. La formule ϕ ne peut pas être satisfaite par une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure de Herbrand parce qu'il faudrait à la fois $R(a)$ et $\neg R(a)$.

Exercice 71:

Mise en forme prénexe donne

$$\begin{array}{l}\forall x \exists y\ R(x, y)\\ \exists x \forall y \exists z((R(x, y) \to ((R(x, z) \wedge \neg R(z, y)))\end{array}$$

On définie $\mathcal{F}' = \{a(0), f(1), g(1)$. Skolémisation donne

$$\begin{array}{l} \forall x\, R(x, f(x)) \\ \forall y((R(a,y) \rightarrow ((R(a, g(y)) \wedge \neg R(g(y), y))) \end{array}$$

Un modèle de Herbrand possible est donné par

$$\{R(t, f(t)) \mid t \in T(\{a, f, g\})\} \cup \{R(a, g(f(a)))\}$$

C'est même le modèle de Herbrand le plus petit. Un autre modèle de Herbrand possible est donné par

$$\{R(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in T(\{a, f, g\}), t_1 \neq g(t_2)\}$$

Exercice 72:

C'est une conséquence du fait que l'ensemble des instances de Herbrand d'une théorie de Horn est une théorie de Horn, donc un ensemble de clauses de Horn dans le sens de la logique propositionnelle.

Exercice 73:

On montre d'abord que, si P a une solution $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}^+$, alors $Solv_P$ est valide : Par une induction simple on montre que, dans toute structure $\mathcal{A}$ qui satisfait la prémisse de la formule $Solv_P$, on a pour toute séquence $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}^*$ que

$$([[p_{i_m}(\cdots(p_{i_1}(\epsilon))\cdots)]]_\mathcal{A}, [[q_{i_m}(\cdots(q_{i_1}(\epsilon))\cdots)]]_\mathcal{A}) \in R_\mathcal{A}$$

Soit $v = p_{i_m} \cdots p_{i_1} = q_{i_m} \cdots q_{i_1}$. Puisque $m \geq 1$ et tous les p_i et q_i sont des mots non-vides, v est soit de la forme av', soit bv'. Dans le premier cas, on a donc que $\mathcal{A}, [x \mapsto [[v'(\epsilon)]]_\mathcal{A}] \models R(a(x), a(x))$. (analogue dans le deuxième cas).

Supposons maintenant que $Solv_P$ est valide. En particulier, $Solv_P$ est vraie dans toute $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure de Herbrand. Soit $\mathcal{A}_P$ la structure de Herbrand telle que $(t_1, t_2) \in R_\mathcal{A}$ si et seulement s'il existe une séquence $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}^*$ telle que

$$\begin{array}{rcl} t_1 & = & p_{i_m}(\cdots(p_{i_1}(\epsilon))\cdots) \\ t_2 & = & q_{i_m}(\cdots(q_{i_1}(\epsilon))\cdots) \end{array}$$

(En fait, c'est le modèle de Herbrand le plus petit de la partie $[\cdots]$ de la formule). La structure $\mathcal{A}_P$ satisfait la prémisse de $Solv_P$, elle satisfait donc aussi sa conclusion. Il suit qu'il y a un terme de la forme $a(t)$ ou de la forme $b(t)$, $t \in T(\{\epsilon, a, b\})$ tel que $\mathcal{A}_P \models R(t, t)$. Donc, P a une solution.

Exercice 74:

Soit $\{x_1, \ldots, x_n\} := \{x \in Dom(\mu) \mid x \notin Dom(\nu)\}$, et α la substitution $\{x_1 \rightarrow x_1\mu; \ldots; x_n \rightarrow x_n\mu\}$. Supposons que pour un i, $x_i\mu$ n'est pas une variable. Par la définition d'un mgu il existe τ telle que $\nu = \mu \circ \tau$. D'une côté $x_i\nu = x_i$ (parce que $x_i \notin Dom(\nu)$), d'autre côté $x_i\mu\tau$ n'est pas une variable puisque déjà $x_i\mu$ n'est pas une variable. Absurde. On peut donc écrire

$$\alpha = \{x_1 \rightarrow y_1; \ldots; x_n \rightarrow y_n\}$$

Puisque μ est idempotent, $Dom(\alpha) \cap VIm(\alpha) = \emptyset$. De plus, toutes les variables y_i sont dans $Dom(\nu)$: On a, par Proposition 3.6.2, que $\nu = \mu \circ \nu$. Puisque $x_i\mu = y_i$, on a aussi que $y_i\nu = x_i\mu\nu = x_i\nu$. Puisque $x_i \notin Dom(\nu)$, $y_i \in Dom(\nu)$.

Par Proposition 3.6.2, $\mu = \nu \circ \mu = \nu \circ \alpha$ (la dernière équation est vraie parce que $Dom(\nu) \cap VIm(\nu) = \emptyset$). Par la définition d'un mgu, il existe σ telle que $\nu = \mu \circ \sigma = \nu \circ \alpha \circ \sigma$. Puisque $Dom(\alpha) \cap Dom(\nu) = \emptyset$, toutes les y_i sont des variables différentes (en fait, $\sigma \supseteq \{y_1 \to x_1; \ldots, y_n \to x_n\}$).
On définit alors

$$\rho = \alpha \cup \{y_1 \to x_1; \ldots; y_n \to x_n\}$$

La substitution ρ est bien défini, un renommage par construction, et puisque les y_i sont toutes en $Dom(\nu)$, $\nu \circ \rho = \nu \circ \alpha = \mu$.

Exercice 75:

Non. Contre-exemple pour $\mu_1 : f(f(x)) \stackrel{?}{=} f(f(y))$. Contre exemple pour μ_2, et aussi pour $\mu_1 + \mu_2 : x \stackrel{?}{=} f(f(a)) \wedge y \stackrel{?}{=} f(x)$.

Exercice 76:

Supposons qu'il y ait une séquence infinie décroissante $d_1 \succ_{1,2} d_2 \succ_{1,2} \cdots \succ_{1,2} d_i \succ_{1,2} \cdots$. Par la définition de l'ordre, on a $d_i \succsim_1 d_{i+1}$ pour tous les i. Donc, il y a un i_0 tel que $d_{i_0} \approx_1 d_j$ pour tous les $j \geq i_0$. Par la définition de l'ordre, il suit que $d_j \succ_2 d_{j+1}$ pour tous les $j \geq i_0$. Absurde.

Exercice 77:

Il faut montrer pour toute variable $y : y\sigma = y\mu\sigma$.

1. si $y = x_i$: par la définition de μ, on a que $x_i\mu\sigma = t_i\sigma$. Parce que σ est un unificateur de P, on a $x_i\sigma = t_i\sigma$.
2. si $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$: par la définition de μ, on a $y\mu = y$, donc $y\sigma = y\mu\sigma$.

Exercice 79:

(7)	$Q(f(a), a)$	résolution binaire sur (1), (5)
(8)	$\neg Q(y, a) \vee R(y)$	résolution binaire sur (2), (5)
(9)	$R(f(a))$	résolution binaire sur (7), (8)
(10)	$\neg R(y) \vee \neg S(y) \vee \neg Q(y, a)$	résolution binaire sur (3), (5)
(11)	$\neg R(y) \vee \neg R(y) \vee \neg Q(y, a)$	résolution binaire sur (6), (10)
(12)	$\neg R(y) \vee \neg Q(y, a)$	factorisation sur (11)
(13)	$\neg R(f(a))$	résolution binaire sur (7), (12)
(14)	$\Box$	résolution binaire sur (9), (13)

Exercice 80:

Soit $\mathcal{H}$ le modèle de Herbrand le plus petit de S. On a que

$$\begin{aligned}
& (t_1, \ldots, t_n) \in P_{\mathcal{H}} \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{H}' \models P(t_1, \ldots, t_n) \text{ pour tous les modèles de Herbrand } \mathcal{H}' \text{ de } S \\
\Leftrightarrow\ & S \cup \{\neg P(t_1, \ldots, t_n) \text{ ne possède aucun modèle de Herbrand} \\
\Leftrightarrow\ & S \cup \{\neg P(t_1, \ldots, t_n)\} \text{ n'est pas satisfaisable} \\
\Leftrightarrow\ & S \cup \{\neg P(t_1, \ldots, t_n)\} \vdash^*_{R1} \Box
\end{aligned}$$

L'énoncé suit du fait que l'ensemble $\{P(\bar{t}) \mid S \cup \{\neg P(\bar{t})\} \vdash^*_{R1} \Box\}$ est récursivement énumérable.

Exercice 81:

On choisit

$$S_n := \{P(0), \quad \forall x(\neg P(x) \vee P(s(x))), \quad \neg P(s^{2^n}(0))\}$$

Avec la stratégie négative il y a une seule réfutation de S_n, qui consiste à déduire successivement $\neg P(s^{2^n-1}(0))$, $\neg P(s^{2^n-2}(0))$, etc. La stratégie négative exige donc $2^n + 1$ pas.

Par contre, quand on n'est pas restreint à une stratégie particulière, on peut faire un pas de résolution entre deux instances de la même clause. On obtient dans un pas $\forall x(\neg(P(x)) \vee P(s(s(x))))$, et en n pas $\forall x(\neg(P(x)) \vee P(s^{2^n}(x)))$. Il y a donc une réfutation sans restriction de stratégie en $n + 2$ pas.