Logique intuitioniste
Problème à rendre au plus tard le 5 novembre 2003

14 octobre 2003

Les formules de la logique intuitioniste (propositionnelle) sont les séquents $\Gamma \vdash \phi$ où Γ est un ensemble fini de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ et ϕ est une formule de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$. La différence avec le calcul des séquents classique est donc que la partie droite du séquent ne comporte qu'une seule formule, au lieu d'un ensemble fini de formules.

Les règles de déduction de cette logique, appelée LJ_0 , sont les mêmes que celles de la logique classique, restreinte à cette forme particulière de séquents. Pour être plus précis, ces règles sont données dans les figures 1 (règles d'introduction et d'élimination) et 2 (règles structurelles).

Dans ces figures, $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ sont des ensembles finis de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, ϕ, ψ, θ sont des formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$.

Question 1 : quelques preuves dans $\mathbf{LJ}_0$

Montrer que, dans LJ_0 , les séquents suivants sont prouvables, pour toutes formules ϕ et ψ de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$:

1. $\vdash \phi \to \neg\neg\phi$
2. $\vdash \neg(\phi \wedge \neg\phi)$
3. $\neg(\phi \vee \psi) \vdash \neg\phi \wedge \neg\psi$
4. $\vdash \neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$
5. $\neg\phi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\phi \vee \psi)$
6. $\phi \vee \neg\phi \vdash \neg\neg\phi \to \phi$
7. $\phi \wedge (\psi \vee \theta) \vdash (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \theta)$
8. $(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \theta) \vdash \phi \wedge (\psi \vee \theta)$

Question 2 : ajout du tiers exclu

Montrer que si l'on ajoute à LJ_0 l'une des deux règles suivantes :

$$\frac{}{\vdash \phi \vee \neg\phi}\ \mathrm{TE} \qquad \frac{}{\neg\neg\phi \vdash \phi}\ \mathrm{WTE}$$

on obtient un système équivalent à LK_0. Plus précisément, montrer que les mêmes séquents $\Gamma \vdash \phi$ sont prouvables dans LJ_0 + TE, LK_0, LJ_0 + WTE respectivement.

$$\frac{\Gamma, \phi, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \theta} \ \wedge \text{ left} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \phi \quad \Gamma_2 \vdash \psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \phi \wedge \psi} \ \wedge \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma_1, \phi \vdash \theta \quad \Gamma_2, \psi \vdash \theta}{\Gamma_1, \Gamma_2, \phi \vee \psi \vdash \theta} \ \vee \text{ left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \ \vee \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \phi \quad \Gamma_2, \psi \vdash \theta}{\Gamma_1, \Gamma_2, \phi \to \psi \vdash \theta} \ \to \text{ left} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \to \psi} \ \to \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \neg\phi \vdash \perp} \ \neg \text{ left} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\phi} \ \neg \text{ right}$$

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi} \ \text{Axiom}$$

FIG. 1 – Règles de déduction de LJ_0 , premier ensemble

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \psi \vdash \phi} \ \text{WL} \qquad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \phi} \ \text{WR}$$

$$\frac{\Gamma_1, \phi, \psi, \Gamma_2 \vdash \phi}{\Gamma_1, \psi, \phi, \Gamma_2 \vdash \phi} \ \text{EX} \qquad \frac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi} \ \text{CL}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \phi \quad \Gamma_2, \phi \vdash \psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \psi} \ \text{Cut}$$

FIG. 2 – Règles structurelles de LJ_0

Question 3 : élimination des coupures

1. Montrer que, si un séquent est prouvable dans LJ_0 , alors il est prouvable dans LJ_0 sans la règle de coupure.
2. Montrer que, si $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable dans LJ_0 et ψ est une formule arbitraire de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, alors $\Gamma\{A \Rightarrow \psi\} \vdash \phi\{ARrightarrow\psi\}$, c'est à dire le séquent $\Gamma \vdash \phi$ dans lequel toutes les occurrences de la variable propositionnelle A sont remplacées pas ψ, est aussi prouvable dans LJ_0 .
3. Montrer que les séquents suivants, dans lesquels A, B sont des variables propositionnelles, ne sont pas prouvables dans LJ_0 :
   (a) $\vdash A \vee \neg A$
   (b) $\neg(\neg A \wedge \neg B) \vdash A \vee B$
   (c) $A \to B \vdash \neg A \vee B$
   (d) $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$
4. Montrer que toutes les formules qui apparaissent dans une preuve sans coupure de $\Gamma \vdash \phi$, sont des sous-formules des formules de Γ, ϕ.

Question 4 : théorème de Harrop

On définit l'ensemble des *formules de Harrop* comme le plus petit ensemble $\mathcal{H}$ de formules de $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ tel que :

- Les variables propositionnelles sont dand $\mathcal{H}$
- si $\phi, \psi \in \mathcal{H}$, alors $\phi \wedge \psi \in \mathcal{H}$
- si $\phi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P}), \psi \in \mathcal{H}$, alors $\phi \to \psi \in \mathcal{H}$

Montrer que, si $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$ est prouvable en LJ_0 et $\Gamma \subseteq \mathcal{H}$, alors $\Gamma \vdash \phi$, ou $\Gamma \vdash \psi$ est prouvable dans LJ_0 .

Pourquoi ce résultat n'est-il pas généralisable à tous les séquents $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$?

Question 5 : algorithme de décision

Donner un algorithme (exponentiel) qui, étant donné un séquent $\Gamma \vdash \phi$ répond si ce séquent est prouvable ou non dans LJ_0 .

Indication : on pourra, en utilisant la question 3.4, commencer par engendrer tous les séquents qui ne contiennent pas deux fois la même formule et qui sont candidats à être présents dans la preuve. Déterminer ensuite tous les séquents prouvables de cet ensemble par un calcul de point fixe.