# Partiel de Logique

21 novembre 2002

Tous les documents sont autorisés. Les exercices sont indépendants. Durée : 3 heures. Barême à titre indicatif.

## Exercice 1 (3 points)

On suppose les variables propositionnelles $P_1, P_2, P_3, P_4$ ordonnées par $P_1 > P_2 > P_3 > P_4$. Construire l'arbre sémantique et le diagramme de décision binaire pour l'ensemble de clauses

$$\neg P_1 \vee P_4,\ P_2 \vee P_3,\ \neg P_2 \vee P_3 \vee P_4,\ P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3,\ P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4$$

## Exercice 2 (4 points)

Montrer que l'ensemble des connecteurs logiques $\{\leftrightarrow, \neg\}$ n'est pas fonctionnellement complet. (Autrement dit, construire, en le justifiant, une formule du calcul propositionnel qui n'est logiquement équivalente à aucune formule construite sur $\leftrightarrow, \neg$ et les variables propositionnelles).

## Exercice 3 (4 points)

On note $\vdash$ la relation de déduction par résolution et factorisation binaire sur les formules du calcul propositionnel en forme clausale. On considère la stratégie suivante de résolution (*stratégie unitaire*) : on restreint l'application de la résolution au cas où l'une des prémisses est une clause réduite à un littéral. On note $\vdash_1$ la relation de déduction associée. (Donc $\vdash_1 \subseteq \vdash$).

1. Montrer que la stratégie unitaire n'est pas réfutationnellement complète. (On pourra considérer l'ensemble $E = \{P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2\}$).
2. Une *clause de Horn* est une clause contenant au plus un littéral positif.
   Si $E$ est un ensemble de clauses de Horn, soit $I_E$ l'interprétation définie par $I_E = \{P \mid E \vdash_1 P\}$. En utilisant $I_E$, montrer que si $E$ est insatisfaisable, alors $E \vdash_1 \perp$ (i.e. la stratégie unitaire est complète pour les clauses de Horn).

## Exercice 4 (4 points)

On considère le calcul des séquents intuitioniste sans coupure dont les règles sont rappelées en annexe. Montrer que, si $\Gamma \vdash \phi$ est prouvable dans ce système, alors il est prouvable sans la règle d'affaiblissement à gauche. Peut-on de même éviter l'affaiblissement à droite (tout en conservant l'affaiblissement à gauche) ?

## Exercice 5 (6 points)

$\mathcal{P} = \{P_i | \ i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble de variables propositionnelles. $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{1\}$ est ordonné par $P_i > P_j$ si $i > j$ et $P_i > 1$ pour tout $i$.

On appelera ici *littéral* une expression $A \equiv B$ ou bien $A \not\equiv B$, où $A, B \in \mathcal{P}'$ et $A \geq B$. Une *clause* est une disjonction finie de littéraux ($\perp$ désignera la disjonction vide). Étant donnée une interprétation $I$ de $\mathcal{P}$, $I \models A \equiv B$ ssi $I(A) = I(B)$, avec $I(1) = 1$. $I \models A \not\equiv B$ ssi $I \not\models A \equiv B$. Cette définition est étendue aux clauses et aux ensembles de clauses comme dans le calcul propositionnel habituel.

L'objet de l'exercice est d'étudier un système de preuve pour cette logique propositionnelle. On considère pour cela les règles d'inférence suivantes

$$R_1 \quad \frac{P \equiv A \vee C \quad P * B \vee C'}{A * B \vee C \vee C'}$$ Si $P \equiv A$ est maximal dans $P \equiv A \vee C$ et $P * B$ est maximal dans $P * B \vee C'$

$$R_2 \quad \frac{P \not\equiv A \vee C \quad P \not\equiv B \vee C'}{A \equiv B \vee C \vee C'}$$ Si $P \not\equiv A$ est maximal dans $P \not\equiv A \vee P \not\equiv B \vee C \vee C'$ et $P \not\equiv B$ est maximal dans $P \not\equiv B \vee C'$

$$F_1 \quad \frac{P \not\equiv A \vee P * B \vee C}{P \not\equiv A \vee A' * B' \vee C}$$ Si $P \not\equiv A$ est maximal dans $P \not\equiv A \vee P * B \vee C$ et $A' = \max(A, B)$, $B' = \min(A, B)$

$$F_2 \quad \frac{P \equiv A \vee P \equiv B \vee C}{P \equiv B \vee A \not\equiv B \vee C}$$ Si $P \equiv A$ est maximal dans $P \equiv A \vee P \equiv B \vee C$

$$F_3 \quad \frac{A \not\equiv A \vee C}{C}$$ Si $A \not\equiv A$ est maximal dans $A \not\equiv A \vee C$

dans lesquelles $*$ signifie $\equiv$ ou $\not\equiv$. Les littéraux sont ordonnés de la manière suivante :

- $P \not\equiv A > Q \not\equiv B$ ssi $P > Q$ ou bien $P = Q$ et $A > B$
- $P \not\equiv A > Q \equiv B$ ssi $P \geq Q$
- $P \equiv A > Q \not\equiv B$ ssi $P > Q$
- $P \equiv A > Q \equiv B$ ssi $P > Q$ ou bien $P = Q$ et $A > B$

1. Construire une preuve de la clause vide à partir des clauses

$$\{P_3 \not\equiv 1, \ \ P_2 \equiv 1 \vee P_1 \equiv 1, \ \ P_1 \equiv P_2, \ \ P_3 \equiv P_1 \vee P_3 \equiv P_2\}$$

2. Montrer que les règles de la figure 1 sont correctes (les conclusions des règles sont bien des clauses et sont des conséquences logiques des prémisses).
3. Montrer que, si $C$ est une clause non valide et $P$ un littéral maximal de $C$, alors il existe une clause $C'$ déductible de $C$ et telle que $P$ a au plus une occurrence dans $C'$
4. Montrer que l'ensemble de règles de la figure 1 est réfutationnellement complet. (Ind : utiliser une méthode d'arbres sémantiques).

$$\frac{\Gamma, \phi, \psi \vdash \theta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \theta} \wedge \text{ left} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \phi \quad \Gamma_2 \vdash \psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \phi \wedge \psi} \wedge \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma_1, \phi \vdash \theta \quad \Gamma_2, \psi \vdash \theta}{\Gamma_1, \Gamma_2, \phi \vee \psi \vdash \theta} \vee \text{ left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \vee \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \phi \quad \Gamma_2, \psi \vdash \theta}{\Gamma_1, \Gamma_2, \phi \to \psi \vdash \theta} \to \text{ left} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \to \psi} \to \text{ right}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \neg\phi \vdash \bot} \neg \text{ left} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi} \neg \text{ right}$$

$$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi} \text{ Axiom}$$

Fig. 1 – Règles de déduction de $\mathrm{LJ}_0$ , premier ensemble

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \psi \vdash \phi} \text{ WL} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi} \text{ WR}$$

$$\frac{\Gamma_1, \phi, \psi, \Gamma_2 \vdash \phi}{\Gamma_1, \psi, \phi, \Gamma_2 \vdash \phi} \text{ EX} \qquad \frac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi} \text{ CL}$$

Fig. 2 – Règles structurelles de $\mathrm{LJ}_0$