TD Lambda calcul

—

Réductions parallèles, entiers de Church

E. Lozes

27 février 2007

Exercice 1 – Réduction parallèle
On définit une nouvelle règle de réduction $\Rightarrow$, appellée *réduction parallèle*, par :

- $u \Rightarrow u$ pour tout terme u ;
- si $u \Rightarrow u'$ et $v \Rightarrow v'$, alors $uv \Rightarrow u'v'$;
- si $u \Rightarrow u'$, alors $\lambda x.u \Rightarrow \lambda x.u'$;
- si $u \Rightarrow u'$ et $v \Rightarrow v'$, alors $(\lambda x.u)v \Rightarrow u'[x := v']$.

1. Montrez que $\Rightarrow$ est fortement confluent.
2. Montrez que $\rightarrow_\beta \subsetneq \Rightarrow \subsetneq \rightarrow^*_\beta$ (exhiber des contre-exemples pour les implications strictes).
3. En déduire que $\rightarrow_\beta$ est confluent.
4. Montrer que $\rightarrow_\eta$ est fortement confluent.
5. Montrer que $\rightarrow_\eta$ et $\rightarrow_\beta$ commuttent, au sens du lemme de Hindley-Rosen. En déduire que $\rightarrow_{\beta\eta}$ est confluent.

Exercice 2 – Entiers de Church (1)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\underline{n} = \lambda f, x.f^n x$, avec $f^n x \;=\; \underbrace{f(..f(fx))}_{n \text{ fois}}$. Montrer que l'on peut définir des termes S, $\underline{+}$, $\underline{\times}$ et $\underline{\exp}$ tels que $S\underline{n} \rightarrow^* \underline{n+1}$, $\underline{+}\ \underline{n}\ \underline{m} \ \rightarrow^* \underline{n+m}$, $\underline{\times}\ \underline{n}\ \underline{m} \ \rightarrow^* \underline{nm}$, et $\underline{\exp}\ \underline{n}\ \underline{m} \rightarrow^* \underline{n^m}$,

Exercice 3 – Entiers de Church (2)
On veut maintenant encoder la fonction prédécesseur. Pour cela, on aura besoin d'encoder un couple d'entiers, ou plus généralement un couple de termes. On pose $\langle M, N\rangle \;=\; (\lambda x.\ xMN)$.

1. Définir les termes $\underline{\text{pair}}$, π_1 et π_2 tels que $\underline{\text{pair}}\ MN \ \rightarrow^* \langle M, N\rangle$, et $\pi_i\langle M_1, M_2\rangle \rightarrow^* M_i$. A-t-on en général $\underline{pair}\ (\pi_1 s)\ (\pi_2 s) \ =_\beta s$?
2. On définit $P \;=\; \lambda k.\ \pi_2(k\ \underline{shift}\ \langle \underline{0}, \underline{0}\rangle)$, où $\underline{shift} = \lambda s.\langle S(\pi_1 s), \pi_1 s\rangle$. Que vaut $P\underline{0}$? Quel est le temps de calcul (nombre de réductions) de $P\underline{n}$?

3. En déduire un encodage de $\underline{-}$ tel que $\underline{-}\ \underline{m}\ \underline{n}\ \ \rightarrow^*\ \ \underline{\max(m-n,0)}$.

Exercice 4 – Tests booléens

On encode une valeur booléene en posant $\underline{V} = \lambda x, y.x$ et $\underline{F} = \lambda x, y.y$.

1. Définir un terme $\underline{\text{ifthenelse}}$ tel que $\underline{\text{ifthenelse}}\ \underline{V} MN \rightarrow^* M$ et $\underline{\text{ifthenelse}}\ \underline{F} MN \rightarrow^* N$.
2. Définir un terme $\underline{\text{iszero ?}}$ tel que $\underline{\text{iszero ?}}\ \underline{0} \rightarrow^* \underline{V}$ et $\underline{\text{iszero ?}}\ \underline{n+1}\ \ \rightarrow^*\ \ \underline{n}$.
3. Définir la conjonction, la disjonction, l'implication et la négation de booléens.
4. En déduire un terme $\underline{\text{equal ?}}$ qui teste l'égalité de deux entiers.

Exercice 5 – Points fixes

On considère ici deux réalisation de combinateurs de point fixe :

$$Y\ =\ \lambda f.\ \big(\lambda x.\ f(xx)\big)\ \big(\lambda x.\ f(xx)\big) \quad \text{et} \quad \Theta\ =\ \big(\lambda g, h.\ h(ggh)\big)\ \big(\lambda g, h.\ h(ggh)\big)$$

1. Montrer qu'il existe F tel que l'équation $\underline{fact}\ \ =_\beta\ \ F\ \underline{fact}$ corresponde à la sémantique de la factorielle.
2. Montrer que $Y\ F\ \ =_\beta\ \ F(YF)$.
3. Montrer que $\Theta\ F\ \ \rightarrow^*\ \ F(\Theta F)$.

Exercice 6 – Listes

On choisit de représenter la liste $[u_1, .., u_n]$ par $\lambda f, x.\ fu_1(fu_2..(fu_n x)..)$, et donc $\underline{nil}$ par $\lambda f, x.x$.

1. Vérifier que $\underline{cons} = \lambda a, l, f, x.\ fa(lfx)$ définit bien l'ajout en tête de liste, i.e $\underline{cons}\ u_0\ [u_1, ..u_n]\ \ \rightarrow^*\ [u_0, .., u_n]$.
2. Vérifier que $\underline{hd} = \lambda l.l(\lambda y, z.y)\underline{nil}$ définit bien la sélection de tête de liste, i.e. $\underline{hd}\ (\underline{cons}\ a\ l)\ \ \rightarrow^*\ \ a$ et $\underline{hd}\ \underline{nil} \rightarrow^* \underline{nil}$.
3. Vérifier que $\underline{map} = \lambda g, l.l(\lambda y, z.y)\underline{nil}$ est tel que $\underline{map}\ g\ [u_1, .., u_n]\ \ =_\beta\ \ [gu_1, .., gu_n]$.
4. Quelle fonction calcule $\lambda l, l'.l\underline{cons}l'$?
5. En utilisant un raisonnement analogue à celui qui conduit au prédécesseur pour les entiers, définir le terme $\underline{tl}$ qui renvoie la queue de la liste.