TD Lambda calcul
Stratégies de réduction – Logique combinatoire

12 mars 2007

Exercice 1 – Stratégies par nom et par valeur
On rappelle que la stratégie par nom est aussi la stratégie externe gauche ; par ailleurs la stratégie par valeur (droite-gauche) est la stratégie interne, droite, et faible, i.e on ne réduit pas sous les lambda. On rappelle que tout terme u s'écrit $\lambda x_1, .., x_n.(hu_1..u_m)$ pour n, m positifs ou nuls, et que pour n, m maximaux, on appelle h la tête de u (qui n'est pas une application), et cette écriture la forme de tête.

1. Donner les réductions par nom et par valeur, et la réduction en forme normale de tête du terme $(\lambda x.(\lambda y.yx)I)((\lambda x, y.xyx)I)$.
2. Rappeler la notion de valeur et donner la sémantique opérationnelle grand pas de ces stratégies, i.e une définition inductive de la relation $u \Downarrow u'$ où u' est le résultat de l'évaluation de u.
3. Donner, lorsqu'ils existent, des exemples de termes :
   a) normalisant en appel par nom mais pas en appel par valeur,
   b) normalisant en appel par valeur mais pas en appel par nom,
   c) normalisant pour la stratégie interne droite, mais pas fortement normalisant.

Exercice 2 – Théorème de standardisation
On note $\rightarrow_t^*$ la réduction de tête (réduction externe gauche qui s'arrête sur la forme normale de tête). On appelle réduction standard la plus petite relation binaire $\rightarrow_s^*$ telle que :
- si $u \rightarrow^* x$, alors $u \rightarrow_s^* x$
- si v s'écrit sous forme de tête $\lambda x_1, .., x_n.v_0..v_m$ et si $u \rightarrow_t^* \lambda x_1, .., x_n.u_0..u_m$, et si $u_i \rightarrow_s^* v_i$ $(i = 0..m)$, alors $u \rightarrow_s^* v$.

On veut montrer le résultat suivant : si $u \rightarrow^* v$, alors $u \rightarrow_s^* v$.

1. Montrer que le résultat souhaité implique le théorème de standardisation : " la réduction externe gauche (appel par nom) termine ssi le terme est normalisable".
2. Montrer que $\rightarrow_s^*$ est réflexive, i.e. $u \rightarrow_s^* u$ par induction sur u.
3. Montrer que $\rightarrow_t^* \subseteq \rightarrow_s^*$, i.e. si $u \rightarrow_t^* v$, alors $u \rightarrow_s^* v$ par induction sur v.

4. Montrer que si $u \to_s^* v$ et $u' \to_s^* v'$, alors $uu' \to_s^* vv'$.
5. Montrer que si $u \to_s^* v$ alors $\lambda x.u \to_s^* \lambda x.v$.
6. En déduire que si $u \to_s^* v$ alors $w[x := u] \to_s^* w[x := v]$.
7. En utilisant la question précédente, montrer que si $u \to_s^* w \to v$, alors $u \to_s^* v$.
8. Conclure : si $u \to^* v$, alors $u \to_s^* v$.

Exercice 3 – Forme normale de tête
Montrer que :

1. u a une hnf ssi la réduction de tête de u termine.
2. si $u \to_h u'$ alors $u[z := v] \to_h u'[z := v]$.
3. $\lambda y \cdot u$ a une hnf ssi u a une hnf.
4. si $u[z := v]$ a une hnf alors u a une hnf.
5. si uv a une hnf alors u a une hnf.
6. u est dit soluble si il existe $v_1, .., v_n$ tels que $uv_1..v_n \;=_\beta\; I$. Montrer le théorème de Wadsdorth : " u est soluble ssi u a une forme normale de tête". Indication : on commencera par chercher un terme t_m tel que $t_m u_1..u_m \to^* I$.

Exercice 4 – Prouvabilité en logique combinatoire
On définit l'ensemble $\mathcal{C}$ des termes de la logique combinatoire par : $\mathcal{C} := \mathcal{V} \mid \mathsf{K} \mid \mathsf{S} \mid (\mathcal{C}\,\mathcal{C})$ où K et S sont des constantes. La théorie (équationelle) de la logique combinatoire (CL) est définie par les axiomes et règles suivants sur les termes L, M, N de $\mathcal{C}$:

$$M = M \quad \mathsf{K}MN = M \quad \mathsf{S}MNP = MP(NP)$$
$$\frac{M = N}{N = M} \quad \frac{M = N \quad N = P}{M = P} \quad \frac{M = M'}{MN = M'N} \quad \frac{N = N'}{MN = MN'}$$

1. Montrer que $\mathsf{SKK}M = M$ est prouvable en CL, en déduire un combinateur d'identité I.
2. Montrer que $\mathsf{B} := \mathsf{S(KS)K}$ est l'opérateur de composition en CL ($\mathsf{B}MNP = M(NP)$).
3. Soit $\mathrm{C} := \mathsf{S(BS(BKS))(KK)}$. Montrer que $\mathrm{C}MNP = MPN$ est prouvable en CL.
4. Montrer que $\mathsf{Y} := \mathsf{S(CB(SII))(CB(SII))}$ est un combinateur de point fixe en CL.

Exercice 5 – Encodage de l'abstraction
On définit récursivement la construction λ^* pour simuler la λ-abstraction dans CL :

– $\lambda^* x \cdot x := \mathsf{I}$
– $\lambda^* x \cdot P := \mathsf{K}P$ si $x \notin \mathit{vars}(P)$
– $\lambda^* x \cdot PQ := \mathsf{S}(\lambda^* x \cdot P)(\lambda^* x \cdot Q)$

Montrer les propriétés suivantes :

1. $\mathit{vars}(\lambda^* x \cdot P) = \mathit{vars}(P) \setminus \{x\}$
2. Dans la théorie CL, $(\lambda^* x \cdot P)x = P$
3. Dans la théorie CL, $(\lambda^* x \cdot P)Q = P[x := Q]$
4. Si $x \neq y$ et $x \notin \mathit{vars}(Q)$, $(\lambda^* x \cdot P)[y := Q] = \lambda^* x \cdot P[y := Q]$
5. Si $x \neq y$, $y \notin \mathit{vars}(P)$, $\lambda^* x \cdot P = \lambda^* y \cdot P[x := y]$

Exercice 6 – CL extensionnelle

On définit la théorie CLext en ajoutant à CL la règle :

$$\frac{Mx = Nx}{M = N} \text{si } x \notin \mathit{vars}(M) \cup \mathit{vars}(N)$$

1. Montrer que l'on peut prouver dans la théorie CLext :
   (a) $\mathsf{K} = \lambda^* x, y \cdot x$
   (b) $\mathsf{S} = \lambda^* x, y, z \cdot xz(yz)$
   (c) si $M = N$ alors $\lambda^* x \cdot M = \lambda^* x \cdot N$.
2. Montrer que ces assertions ne sont pas prouvables dans CL.

Exercice 7 – Equivalence entre CL et le λ-calcul

Soit les fonctions $\_{CL}$, $\_{\lambda}$ de compilation des λ-termes en termes de $\mathcal{C}$, et inversement :

$$\begin{array}{rcl} (x)_{CL} & := & x \\ (\lambda x \cdot u)_{CL} & := & \lambda^* x \cdot (u)_{CL} \\ (uv)_{CL} & := & (u)_{CL}(v)_{CL} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (x)_{\lambda} & := & x \\ (K)_{\lambda} & := & \lambda x, y \cdot x \\ (\mathsf{S})_{\lambda} & := & \lambda x, y, z \cdot xz(yz) \\ (MN)_{\lambda} & := & (M)_{\lambda}(N)_{\lambda} \end{array}$$

1. Montrer que pour tout λ-terme t, $(t_{CL})_{\lambda} =_{\beta} t$.
2. Montrer que pour tout terme u de $\mathcal{C}$, $(M_{\lambda})_{CL} = M$ est vrai dans CLext.
3. Montrer que si $M = N$ est prouvable dans CL alors $M_{\lambda} =_{\beta} N_{\lambda}$.
4. Calculer $(\lambda x, y \cdot xyy)_{CL}$.

Exercice 8 – Terme base du lambda-calcul

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de λ-termes clos. L'ensemble des termes engendrés par $\mathcal{X}$ est le plus petit ensemble $\mathcal{X}^+$ de λ-termes tel que :

– $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^+$
– si $u, v \in \mathcal{X}^+$ alors $(uv) \in \mathcal{X}^+$

On dit que $\mathcal{X}$ est une *base* pour un ensemble $\mathcal{A}$ de λ-termes si

$$\forall a \in \mathcal{A}\ \exists u \in \mathcal{X}^+\ u =_{\beta} a$$

1. Montrer que $\{\mathsf{K}_\lambda, \mathsf{S}_\lambda\}$ est une base de l'ensemble des λ-termes clos
2. Montrer que $\{\mathsf{X}\}$ aussi, avec $\mathsf{X} = \lambda z \cdot z\mathsf{K}_\lambda\mathsf{S}_\lambda\mathsf{K}_\lambda$ (on pourra calculer XXX et $\mathsf{X}(\mathsf{XX})$).