TD Lambda calcul : Stratégies de réduction, modèles

E. Lozes

20 mars 2007

Corrigé de l'exercice 1
Soit (D, G, F) un réflexif, i.e. une structure D telle que $G : [D \to D] \to D$, $F : D \to [D \to D]$, et $F \circ G = id_{[D \to D]}$. On rappelle que l'on donne alors la sémantique dénotationnelle suivante au λ-calcul :

$$\begin{array}{rcl} [\![x]\!]_\rho & = & \rho(x) \\ [\![\lambda x.M]\!]_\rho & = & G(e \to [\![M]\!]_{\rho, x \to e}) \\ [\![M\,N]\!]_\rho & = & F([\![M]\!]_\rho)([\![N]\!]_\rho) \end{array}$$

1. Montrer que si $M \to_\beta N$, alors $[\![M]\!]_\rho = [\![N]\!]_\rho$
2. On suppose que le réflexif D est extensionnel, c'est à dire que $G \circ F = id_D$. Montrer que si $M \to_\eta N$, alors $[\![M]\!]_\rho = [\![N]\!]_\rho$

Corrigé de l'exercice 2

1. $[\![I]\!] = \{(\beta, b) : b \in \beta\}$, $[\![K]\!] = \{(\gamma, (\beta, b)) : b \in \gamma\}$, $[\![\lambda x.xx]\!] = \{(\gamma, c) : \exists \beta \subseteq \gamma.(\beta, c) \in \gamma\}$
2. D_A est un treillis complet (c'est toujours le cas pour $\mathcal{P}(E)$ pour n'importe quel ensemble E). Vérifions que D_A est un réflexif :
   - $F \circ G = Id_{[D \to D]}$: on écrit

   $$\begin{array}{rl} F \circ G(f)(x) & = \{b : \exists \beta \subseteq x.(\beta, b) \in G(f)\} \\ & = \{b : \exists \beta \subseteq x.b \in f(\beta)\} \\ & = \bigcup_{\beta \subseteq x} f(\beta) \stackrel{cont.}{=} f(\bigcup_{\beta \subseteq x} \beta) \ = \ f(x) \end{array}$$

   - $G(f) \in D_A$ est trivial. Montrons que $F(x) \in [D_A \to D_A]$. On écrit :

   $$\begin{array}{rl} F(\bigcup_n x_n)(y) & = \{b : \exists \beta \subseteq y.(\beta, b) \in \bigcup_n x_n\} \\ & = \bigcup_n \{b : \exists \beta \subseteq y.(\beta, b) \in x_n\} \ = \ \bigcup_n F(x_n)(y) \end{array}$$

   donc F est bien continue.
3. Le calcul de $[\![\lambda xy.xy]\!]$ donne $\{(\delta, (\beta, b)) : \exists \gamma \subseteq \beta.(\gamma, b) \in \delta\}$, donc si a est un atome, $(\{a\}, a) \in [\![I]\!] - [\![\lambda xy.xy]\!]$, donc en particulier $[\![I]\!] \neq [\![\lambda xy.xy]\!]$, alors que $I =_\eta \lambda xy.xy$.

Corrigé de l'exercice 3
Un ou parallèle en λ-calcul serait un terme *op*, et un codage des valeurs pour V et F, tels que $op\ V\ x \to^* V$, $op\ x\ V \to^* V$ et $op\ F\ F \to^* F$. On peut montrer qu'un tel terme n'existe pas par un argument de modèle du λ-calcul.

1. Soient $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ deux ensembles ordonnés admettant un inf binaire, noté $e \wedge e'$. On dit que e_1, e_2 sont compatibles si il existe e' tel que $e_1 \leq e'$ et $e_2 \leq e'$. Définissez les domaines **Bool**, $\mathbf{Bool}^2$ des types *bool* et *bool*$\times$*bool*, où $e \leq e'$ s'interpréte, comme d'habitude, par "e contient moins d'information que e'", et vérifier que ce sont des ensembles ordonnés admettant un inf. Quels sont les éléments compatibles ?
2. On dit que $f : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ est stable si elle est continue et pour tout d_1, d_2 compatibles, $f(d_1 \wedge d_2) = f(d_1) \wedge f(d_2)$. Définissez le ou parallèle paror : $\mathbf{Bool}^2 \to \mathbf{Bool}$ et montrer que ce n'est pas une fonction stable.

Corrigé de l'exercice 4

1. ..
2. Vérifions que $i_\infty \circ j_\infty = Id_{[D_\infty \to D_\infty]}$ et $j_\infty \circ i_\infty = Id_{D_\infty}$. On note $\pi_k : D_\infty \to D_k$ et $p_k : [D_\infty \to D_\infty] \to [D_k \to D_k]$ les projections. Posons alors $j_\infty \circ i_\infty(x) = y$. On a alors $y_0 = j_0 \circ p_0 \circ i_\infty(x) = j_0(x_1) = x_0$ puisque $x = (x_n)$ est dans la limite projective, et pour $n \geq 0$ $y_{n+1} = p_n \circ i_\infty(x) = x_{n+1}$, donc $x = y$. De même, si $i_\infty \circ j_\infty(f) = g$, on a $g_n = \pi_{n+1} \circ j_\infty(f) = f_n$, donc $f = g$.

Corrigé de l'exercice 5
On étudie ici une autre correspondance entre ordres et topologie. On appelle frame une structure $(X, \leq, \wedge, \bigvee)$ telle que $a \wedge \bigvee B = \bigvee_{b \in B} a \wedge b$.

1. Vérifier que l'ensemble des ouverts d'un espace topologique X est une frame (spatialisation).
2. Respectivement, si $\mathcal{O}$ est une frame, montrer que l'on peut donner une structure d'espace topologique aux morphismes de frame $p : \mathcal{O} \to \{\top, \bot\}$ (localisation).
3. On pose **Spat** : **Topo** $\to$ **Frame** et **Loc** : **Frame** $\to$ **Topo**. Que vaut $Im(\mathbf{Spat})$? Montrer que $\mathbf{Topo}_{T_1} \subset Im(\mathbf{Loc}) \subset \mathbf{Topo}_{T_0}$.