TD Lambda calcul : modèles, réflexifs, ou parallèle

E. Lozes

20 mars 2007

Exercice 1 – Notion de réflexif
Soit (D, G, F) un réflexif, i.e. une structure D telle que $G : [D \to D] \to D$, $F : D \to [D \to D]$, et $F \circ G = id_{[D \to D]}$. On rappelle que l'on donne alors la sémantique dénotationnelle suivante au λ-calcul :

$$\begin{array}{rcl} [x]_\rho & = & \rho(x) \\ [\lambda x.M]_\rho & = & G(e \to [M]_{\rho, x \to e}) \\ [M\, N]_\rho & = & F([M]_\rho)([N]_\rho) \end{array}$$

1. Montrer que si $M \to_\beta N$, alors $[M]_\rho = [N]_\rho$
2. On suppose que le réflexif D est extensionnel, c'est à dire que $G \circ F = id_D$. Montrer que si $M \to_\eta N$, alors $[M]_\rho = [N]_\rho$

Exercice 2 – Modèle de Engeler
On appelle modèle de Engeler basé sur les atomes A la structure $D_A = \mathcal{P}(B)$, avec :

$$B_0 = A \quad B_{n+1} = B_n \cup \{(\beta, b) : b \in B_n \wedge \beta \subseteq_{fin} B_n\} \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

$$F(x) = y \mapsto \{b : \exists \beta \subseteq y.(\beta, b) \in x\} \quad G(f) = \{(\beta, b) : b \in f(\beta)\}$$

1. Calculer $[I]_{D_A}, [K]_{D_A}, [\lambda x.xx]_{D_A}$
2. Vérifier que D_A est un treillis complet ; on note $[D_A \to D_A]$ l'ensemble des fonctions continues. Vérifier que D_A est un réflexif.
3. Montrer que D_A n'est pas extensionnel.

Exercice 3 – Fonctions stables, ou parallèle
Un ou parallèle en λ-calcul serait un terme *op*, et un codage des valeurs pour V et F, tels que $op\ V\ x \to^* V$, $op\ x\ V \to^* V$ et $op\ F\ F \to^* F$. On peut montrer qu'un tel terme n'existe pas par un argument de modèle du λ-calcul.

1. Soient $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ deux ensembles ordonnés admettant un inf binaire, noté $e \wedge e'$. On dit que e_1, e_2 sont compatibles si il existe e' tel que $e_1 \leq e'$ et $e_2 \leq e'$. Définissez les cpos **Bool**, $\mathbf{Bool}^2$ des types *bool* et *bool* $\times$ *bool*, où $e \leq e'$

s'interpréte, comme d'habitude, par "e contient moins d'information que e'", et vérifier que ce sont des ensembles ordonnés admettant un inf. Quels sont les éléments compatibles ?

2. On dit que $f : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ est stable si elle est continue et pour tout d_1, d_2 compatibles, $f(d_1 \wedge d_2) = f(d_1) \wedge f(d_2)$. Définissez le ou parallèle $\mathsf{paror} : \mathbf{Bool}^2 \to \mathbf{Bool}$ et montrer que ce n'est pas une fonction stable.

Exercice 4 – Modèle de Scott

On rappelle le modèle D_∞ de Scott :

- les sous-domaines : D_0 est un cpo. $D_{n+1} = [D_n \to D_n]$.
- la rétraction initiale : $i_0 : D_0 \to D_1,\ d \mapsto (d' \mapsto d)$ et $j_0 : D_1 \to D_0,\ f \mapsto f(\perp)$
- les rétractions suivantes : $i_{n+1} : D_{n+1} \to D_{n+2},\ g \mapsto i_n \circ g \circ j_n$ et $j_{n+1} : D_{n+2} \to D_{n+1},\ g \mapsto j_n \circ g \circ i_n$
- Rappel : pour une suite d'objets $(O_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et de flêches $f_i : O_{i+1} \to O_i$, on définit la limite projective $O_\infty = \{((x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Pi O_i \ :\ f_i(x_{i+1}) = x_i\}$.
- le domaine : D_∞ est la limite projective, $[D_\infty \to D_\infty]$ les suites projectives de fonctions.
- $i_\infty : D_\infty \to [D_\infty \to D_\infty],\ (x_n) \mapsto (x_{n+1})$ et $j_\infty : [D_\infty \to D_\infty] \to D_\infty,\ (f_n) \mapsto (d_n)$ avec $d_0 = j_0(f_0)$ et $d_{n+1} = f_n$.

1. Préciser ce que représente $[D_\infty \to D_\infty]$ et pourquoi c'est un sous-espace de l'espace fonctionel $D_\infty \to D_\infty$.
2. Vérifier que $(D_\infty, i_\infty, j_\infty)$ définit un réflexif extensionnel.

Exercice 5 – Topologie sans points

On étudie ici une autre correspondance entre ordres et topologie. On appelle frame une structure $(X, \leq, \wedge, \bigvee)$ telle que $a \wedge \bigvee B \ =\ \bigvee_{b\in B} a \wedge b$.

1. Vérifier que l'ensemble des ouverts d'un espace topologique X est une frame (spatialisation).
2. Respectivement, si $\mathcal{O}$ est une frame, montrer que l'on peut donner une structure d'espace topologique aux morphismes de frame $p : \mathcal{O} \to \{\top, \perp\}$ (localisation).
3. On pose $\mathbf{Spat} : \mathbf{Topo} \to \mathbf{Frame}$ et $\mathbf{Loc} : \mathbf{Frame} \to \mathbf{Topo}$. Que vaut $Im(\mathbf{Spat})$? Montrer que $\mathbf{Topo}_{T_1} \subset Im(\mathbf{Loc}) \subset \mathbf{Topo}_{T_0}$.