TD Lambda calcul : Typage, logique intuitioniste

E. Lozes

3 avril 2007

Exercice 1 – Correspondance de Curry-Howard
On considère le lambda-calcul étendu avec paire suivant :

$$M \quad ::= \quad x \mid \lambda x.M \mid MN \mid \langle M, N\rangle \mid \pi_1 M \mid \pi_2 M$$

1. Proposer un système de type simple pour ce lambda-calcul.
2. Comment s'interpréte constructeur de type d'une paire dans ce calcul ?
3. Donner un terme preuve de $(a \to b \to c) \to (a \times b) \to c$, et de $((a \times b) \to c) \to a \to b \to c$, et montrer qu'ils sont inverse l'un de l'autre (on a un isomorphisme de types).

Exercice 2 – Subject reduction et expansion
On dit qu'un système de type vérifie la propriété de *subject reduction* si $M : \tau$ et $M \to N$ induisent $N : \tau$. Il vérifie la *subject expansion* si $N : \tau$ et $M \to N$ induisent $M : \tau$.

1. Rappeler la définition de $M : \tau$ dans le lambda calcul simplement typé. En choisissant les inductions adéquates, montrer que le lambda calcul simplement typé vérifie la subject reduction.
2. Montrer qu'il ne vérifie pas la subject expansion. Quelle propriété importante du typage perd-on dans un système de types qui vérifie la subject expansion ?

Exercice 3 – Logique intuitionniste
Une structure de Kripke est la donnée d'un ensemble ordonné $(\mathcal{M}, \leq)$ et d'une fonction croissante $\Vdash$ de M dans $\mathcal{P}(VP)$. On dit que $m \in M$ force $a \in VP$ ($m \Vdash a$) si $a \in \Vdash (m)$, et $m \Vdash \tau \to \sigma$ si pour tout $m' \geq m$, si $m' \Vdash \tau$, alors $m' \Vdash \sigma$. Une formule ϕ est valide en logique intuitioniste si elle est forcée par tout monde dans toute structure de Kripke.

1. Que doit-on vérifier sur l'interprétation de $\perp$ pour avoir $\perp \to \tau$ valide ?
2. Montrer que $\neg\neg a \to a$ et $((a \to b) \to a) \to a$ (axiome de Pierce) ne sont pas valides en logique intuitionniste.

3. On adopte un autre modèle de la logique intuitionniste. L'interprétation des variables propositionnelles est un ouvert de $\mathbb{R}$ et l'interprétation de $\tau \to \sigma$ est

$$[\![\tau \to \sigma]\!] \quad = \quad \big(\ (\mathbb{R} - [\![\tau]\!]) \cup [\![\sigma]\!]\ \big)^o$$

où pour $m \subset \mathbb{R}$, m^o est l'intérieur de m. Trouver des contre-modèles des formules précédentes pour cette interprétation.

Exercice 4 – Types intersection

On définit le système de type $\mathcal{D}$ avec les règles de typage suivantes :

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\,N : \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \wedge \tau}{\Gamma \vdash M : \tau}$$

1. Typer les termes suivants dans le système $\mathcal{D}$: $\lambda x.xx$, $\lambda xy.x(yx)$, $(\lambda x.xx)\lambda x.x$. Comparer avec le typage sans intersection.
2. Parmi les types suivants, quels sont ceux qui sont habités :
   (a) $\big((\alpha \wedge \beta) \to \tau\big) \to \alpha \to \beta \to \tau$,
   (b) $(\alpha \to \beta \to \tau) \to (\alpha \wedge \beta) \to \tau$,
   (c) $(\tau \to \alpha \ \wedge\ \tau \to \beta) \ \to\ \tau \to (\alpha \wedge \beta)$,
   (d) $\tau \to (\alpha \wedge \beta) \ \to\ (\tau \to \alpha \ \wedge\ \tau \to \beta)$.
3. Que faut-il penser de la correspondance de Curry-Howard pour les types avec intersection ? On rappelera la sémantique de Heyting de $a \wedge b$.
4. On rajoute au système précédent un type atomique Ω et la règle :

$$\frac{}{\Gamma \vdash M : \Omega}$$

Montrer que ce système de type vérifie la subject expansion.