TD Normalisation forte, cohérence de la logique propositionelle classique, incohérence de Russel

E. Lozes

24 avril 2007

Exercice 1 – Normalisation forte de $\lambda\mathcal{C}$
On considère le lambda calcul suivant dont les types et les termes sont donnés par la grammaire suivante :

$$\begin{array}{rcl} u, v & ::= & x \mid \lambda x.u \mid uv \mid \mathcal{C}u \\ F & ::= & \bot \mid F \Rightarrow F' \end{array}$$

Ce λ-calcul coïncide par la correspondance de Curry-Howard avec une certaine forme de prouvabilité de la logique propositionnelle classique (qui n'est pas le calcul des séquents de Gentzen). La principale nouveauté est la règle suivante :

$$\frac{\Gamma \vdash u : \neg\neg F}{\Gamma \vdash \mathcal{C}u : F}(\neg\neg E)$$

1. Rappeler les autres règles de typage et donner un λ-terme preuve de $\bot \rightarrow F$.
2. On définit les règles de réduction suivantes, ne devant pas être prises au sens contextuel, contrairement au λ-calcul pur, mais en réduction gauche :

$$\begin{array}{lrl} (\beta) & (\lambda x.u)v & \rightarrow u[x := v] \\ (\mathcal{C}_L) & \mathcal{C}u\ v & \rightarrow \mathcal{C}(\lambda k.u(\lambda f.k(fv))) \\ (\eta\mathcal{C}) & \mathcal{C}(\lambda k.ku) & \rightarrow u \quad (k \notin \mathsf{fv}(u)) \end{array}$$

   Enoncer et démontrer la propriété d'autoréduction pour $\lambda\mathcal{C}$.
3. On dit qu'un terme est *neutre* si il ne commence ni par λ ni par $\mathcal{C}$. On définit l'ensemble RED_F des candidats de réducibilité de type F par induction sur F :
   - si F est un type de base (y compris $\bot$), $RED_F = SN$;
   - si $F = F_1 \Rightarrow F_2$, alors $u \in RED_F$ ssi pour tout $v \in RED_{F_1}$, $uv \in RED_{F_2}$.

   On admet par ailleurs les trois propriétés suivantes sur les ensembles RED_F (on pourra chercher à retrouver les idées de preuve).
   (CR1) si $u \in RED_F$, alors $u \in SN$,
   (CR2) si $u \in RED_F$ et $u \rightarrow u'$, alors $u' \in RED_F$,

(CR3) si u est *neutre*, et si tout u' tel que $u \to u'$ appartient à RED_F, alors $u \in RED_F$

ainsi que la propriété suivante :

(**) si $u[x := v] \in RED_G$ pour tout $v \in RED_F$, alors $\lambda x.u \in RED_{F \Rightarrow G}$

Démontrer que si $u \in RED_{\neg\neg F}$, alors $\mathcal{C}u \in RED_F$, avec les indications suivantes : pour le cas $F = F_1 \Rightarrow F_2$, on aura à considérer les réductions possibles d'un terme $\mathcal{C}uv$ qui sont : (1) $\mathcal{C}u'v$, (2) $\mathcal{C}uv'$, (3) $u'v$, (4) $\mathcal{C}(\lambda k.u(\lambda f.k(fv)))$. Pour le cas (4), on utilisera la propriété (**), et pour le cas (3), on démontrera d'abord la propriété

(***) si $\lambda k.ku \in RED_{\neg\neg F}$ et k n'est pas libre dans u, alors $u \in RED_F$.

4. Montrer que $\lambda\mathcal{C}$ est fortement normalisant.

Exercice 2 – Codage de $\wedge$ et $\vee$

On pose $F_1 \wedge F_2 \stackrel{def}{=} (F_1 \Rightarrow F_2 \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$, et $F_1 \vee F_2 \stackrel{def}{=} \neg F_1 \Rightarrow \neg F_2 \Rightarrow \bot$.

1. Donner un codage des termes $\langle u, v\rangle$, $\pi_1 u$, $\pi_2 u$, $\iota_1 u$, $\iota_2 u$, et $\mathsf{case}\ u \left\{ \begin{array}{l} \iota_1 x \mapsto v_1 \\ \iota_2 x \mapsto v_2 \end{array} \right\}$ qui encodent les règles (admissibles) de la conjonction et la disjonction classique.
2. Donner quelques réductions de ce lambda-calcul enrichi qui sont dérivables. Quelle règle de commutation de case ne semble pas découler des règles de réduction de $\lambda\mathcal{C}$?

Exercice 3 – Incohérence de Russel

On considère la théorie des ensembles "naïve" suivante :

$$\begin{array}{rcl} t & ::= & i \ ,\ \ \{i \mid F\} \\ F & ::= & t \,\epsilon\, t' \ ,\ \ F \Rightarrow F' \ ,\ \ \bot \\ u & ::= & x \ ,\ \ \lambda x.u \ ,\ \ uv \ ,\ \ \epsilon_1 u \ ,\ \ \epsilon_2 u \end{array} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : t\epsilon\{i|F\}}{\Gamma \vdash \epsilon_1 u : F[i := t]} \quad \frac{\Gamma \vdash u : F[i := t]}{\Gamma \vdash \epsilon_2 u : t\epsilon\{i|F\}}$$

Montrer que cette théorie est incohérente (c'est paradoxe de Russel). On pourra considérer $F(i) = \neg(i\epsilon i)$, $A = \{i|F(i)\}$, et montrer $\bot$ par une coupure sur $\neg(A\epsilon A)$ et $\neg\neg(A\epsilon A)$. Commentez le terme preuve ainsi obtenu.