

# Corrigé du TD de logique n° 1

## Logique propositionnelle de Hilbert

**Exercice 1 : Le modèle classique  $\{0, 1\}$**

$\alpha$	$\beta$	$\neg\alpha$	$\alpha\rightarrow\beta$	$\alpha\vee\beta$	$\alpha\wedge\beta$
1	1	0	1	1	1
1°) 1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0

$\varphi$	$\neg\varphi$	$\varphi\vee\neg\varphi$
2°) 1	0	1
0	1	1

$\varphi$	$\neg\varphi$	$\neg\neg\varphi$	$\neg\neg\varphi\rightarrow\varphi$
3°) 1	0	1	1
0	1	0	1

$\varphi$	$\psi$	$\varphi\rightarrow\psi$	$(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\varphi$	$((\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\varphi)\rightarrow\varphi$
4°) 1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

5°)  $\frac{\vDash \varphi\rightarrow\psi}{\vDash \neg\psi\rightarrow\neg\varphi}$  (contraposition)

6°) Cela se déduit des deux dernières lignes de la table de vérité de  $\alpha\rightarrow\beta$  donnée à l'exercice 1 : en effet, par toute valuation,  $\alpha$  vaudra 0 et donc  $\alpha\rightarrow\beta$  vaudra 1.

$\varphi$	$\neg\varphi$	$\varphi\wedge\neg\varphi$
7°) 1	0	0
0	1	0

8°) Dans les deux propositions, "Cette phrase" ne fait pas référence à la même phrase. En effet, le contraire de « Cette phrase a cinq mots. » est : « La phrase "Cette phrase a cinq mots." n'a pas cinq mots. », ce qui est faux. Il ne faut pas confondre négations *logique* et *grammaticale*. Il est toujours dangereux de mélanger langage et méta-langage (comme par exemple dans de telles phrases qui parlent d'elles-mêmes). Cf. paradoxe du barbier, etc.

**Exercice 2 : Mon premier arbre de preuves**

$$\frac{\frac{\frac{}{e * e^{-1} = e} \text{ (I1)}}{e = e * e^{-1}} \text{ (Sym)}}{e * e^{-1} = e^{-1}} \text{ (E2)}}{e = e^{-1}} \text{ (Trans)}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\frac{y * y^{-1} = e}{(H1)} \quad x^{-1} = x^{-1}}{(Eg)} \quad (E2)}{(Eq^*)} \quad (E1)}{(Trans)} \\
 \frac{x = x}{(Eg)} \quad \frac{(y * y^{-1}) * x^{-1} = e * x^{-1}}{(Eg)} \quad \frac{e * x^{-1} = x^{-1}}{(Eg)} \\
 \frac{x * ((y * y^{-1}) * x^{-1}) = x * x^{-1}}{(Eq^*)} \quad \frac{x * x^{-1} = e}{(I1)} \\
 \frac{x = x}{(Eg)} \quad \frac{y * (y^{-1} * x^{-1}) = (y * y^{-1}) * x^{-1}}{(Sym+Ass)} \quad \frac{x * ((y * y^{-1}) * x^{-1}) = e}{(Trans)} \\
 \frac{x * (y * (y^{-1} * x^{-1})) = x * ((y * y^{-1}) * x^{-1})}{(Eq^*)} \\
 \frac{x * (y * (y^{-1} * x^{-1}))}{(Ass)} \quad \frac{x * (y * (y^{-1} * x^{-1})) = e}{(Trans)} \\
 \frac{(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = e}{(Trans)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{e = x^{-1} * x}{(Sym+I2)} \quad y = y}{(Eg)} \quad \frac{(x^{-1} * x) * y = x^{-1} * (x * y)}{(Ass)} \quad \frac{\frac{x^{-1} = x^{-1}}{(Eg)} \quad \frac{x * y = e}{(Hyp)}}{(Eq^*)} \quad \frac{x^{-1} * e = x^{-1}}{(E1)} \\
 \frac{e * y = (x^{-1} * x) * y}{(Eq^*)} \quad \frac{(x^{-1} * x) * y = x^{-1}}{(Trans)} \\
 \frac{e * y}{(Sym+E2)} \quad \frac{e * y = x^{-1}}{(Trans)} \\
 \frac{y = x^{-1}}{(Trans)}
 \end{array}$$

Q3+Q2

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{(x * y = *(x * y)) = e}{(Hyp)} \quad \frac{(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}}{(Q3)} \quad \frac{(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}}{(Q4)} \quad \frac{\frac{y * y = e}{(Hyp)} \quad \frac{y * x = e}{(Hyp)}}{(Sym+Q3)} \quad \frac{y^{-1} = y}{(Eq^*)} \quad \frac{x^{-1} = x}{(Eq^*)}}{(Trans2)} \\
 \frac{x * y = (x * y)^{-1}}{(Trans2)} \quad \frac{y^{-1} * x^{-1} = y * x}{(Trans2)} \\
 x * y = y * x
 \end{array}$$

$$ab = a^{-1}a^2b^2b^{-1} = a^{-1}(ab)(ab)b^{-1} = ba$$