S. Boldo et S. Le Roux Le 8 décembre 2004

Corrigé du TD de logique n°10

Modèles

Exercice 1 : ***Interprétation***

	i.	ii.	iii.	iv.	v.
(*a*)	oui	oui	non	oui	non
(*b*)	oui	non	non	non	oui
(*c*)	oui	oui	oui	non	non

Exercice 2 : ***Satisfaction***

1°) $\forall x\ (x \times x + 1 \neq 0)\ \wedge\ \forall x\ (x \neq 0 \rightarrow x \times x \neq 0)$
2°) $\exists x \exists y\ x \times y \neq y \times x$
3°) $\exists x\ (x \times x + 1 = 0)\ \wedge\ \forall x\ (x \neq 0 \rightarrow x \times x \neq 0)$

Exercice 3 : ***Nombre d'éléments***

1°) $\varphi_n = \exists x_1 \ldots x_n\ \ \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$
2°) $\psi_n = \exists x_1 \ldots x_n\ \ \forall y\ \ \bigvee_i y = x_i$
3°) $\varphi_n \wedge \psi_n$

Exercice 4 : ***Théorie des groupes***

1°) $\langle \mathbb{Z}, (ntr \mapsto 0; ^{-1} \mapsto -; + \mapsto +) \rangle$ est un modèle de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{GA}$.

2°) $\mathcal{G} \vdash \forall x \forall y (x * y = \varepsilon \Rightarrow x = y^{-1})$ (∀-I)^2
$\mathcal{G} \vdash x * y = \varepsilon \Rightarrow x = y^{-1}$ (→-I)
$\mathcal{G}, x * y = \varepsilon \vdash x = y^{-1}$ (eltn),(trans)
$\mathcal{G}, x * y = \varepsilon \vdash x * e = y^{-1}$ (inv),(cptb-*),(trans)
$\mathcal{G}, x * y = \varepsilon \vdash x * (y * y^{-1}) = y^{-1}$ (assoc),(trans)
$\mathcal{G}, x * y = \varepsilon \vdash (x * y) * y^{-1} = y^{-1}$ (eltn),(trans)
$\mathcal{G}, x * y = \varepsilon \vdash (x * y) * y^{-1} = \varepsilon * y^{-1}$ (cptb-*)
$\mathcal{G}, x * y = \varepsilon \vdash (x * y) = \varepsilon$ (hyp)
C.Q.F.D.

3°) $\mathcal{GA} \vdash \forall x \forall y ((xy)^{-1} = x^{-1} y^{-1})$ (∀-I)^2
$\mathcal{GA} \vdash (xy)^{-1} = x^{-1} y^{-1}$ (sym),2°)
$\mathcal{GA} \vdash (x^{-1} * y^{-1}) * (x * y) = \varepsilon$ (comm),(cptb-*)
$\mathcal{GA} \vdash (y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) = \varepsilon$ (assoc)
$\mathcal{GA} \vdash y^{-1} * (x^{-1} * (x * y)) = \varepsilon$ (assoc)
$\mathcal{GA} \vdash y^{-1} * ((x^{-1} * x) * y)) = \varepsilon$ (inv),(cptb-*)
$\mathcal{GA} \vdash y^{-1} * (\varepsilon * y) = \varepsilon$ (eltn),(cptb-*)
$\mathcal{GA} \vdash y^{-1} * y = \varepsilon$ (inv)
C.Q.F.D.

4°) $\mathcal{G}' \vdash \forall x \forall y (x * y = y * x)$	$(\forall\text{-I})^2$
$\mathcal{G}' \vdash x * y = y * x$	(cptb-*)
$\mathcal{G}' \vdash (x * y) * (x * y) = (y * x) * (x * y)$	($'$),(trans)
$\mathcal{G}' \vdash \varepsilon = (y * x) * (x * y)$	$(\text{assoc})^2$
$\mathcal{G}' \vdash \varepsilon = y * ((x * x) * y)$	($'$),$(\text{cptb-*})^2$
$\mathcal{G}' \vdash \varepsilon = y * (\varepsilon * y)$	(eltn),(cptb-*)
$\mathcal{G}' \vdash \varepsilon = y * y$	(sym),($'$)

C.Q.F.D.