S. Boldo et S. Le Roux Le 24 novembre 2004

Corrigé du TD de logique n°8

Logique combinatoire

Exercice 1 : ***Logique combinatoire***

1°) $\mathbf{SK}$ ne contient pas de CL-rédex donc c'est une forme CL-normale.
En revanche, $[\![\mathbf{SK}]\!]_\lambda = \mathsf{SK} \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\!\!\rightarrow \lambda yz.z$ n'est pas en forme β-normale.
2°) $\mathsf{SK} = (\lambda xyz.xz(yz))(\lambda xy.x) \xrightarrow{\beta} \lambda yz.(\lambda uv.u)z(yz) \xrightarrow{\beta} \lambda yz.z$ et
$\mathsf{KI} = (\lambda xy.x)(\lambda z.z) = \lambda y.(\lambda z.z) = \lambda yz.z$. Donc $\mathsf{SK} =_\beta \mathsf{KI}$.
$\mathbf{SK}$ et $\mathbf{KI}$ sont des formes CL-normales différentes donc $\mathbf{SK} \neq_{\mathrm{CL}} \mathbf{KI}$.
3°) $\mathbf{P} = \mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathbf{SII}))(\mathbf{K}(\mathbf{SII}))$ n'a pas de CL-rédex donc est en forme CL-normale.
On pose $\omega = \mathsf{SII}$; on a $\mathsf{SII} = (\lambda xyz.xz(yz))\mathsf{II} \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\!\!\rightarrow \lambda z.\mathsf{I}z(\mathsf{I}z) \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\!\!\rightarrow \lambda z.zz$.
Donc $[\![P]\!]_\lambda = \mathsf{S}(\mathsf{K}(\mathsf{SII}))(\mathsf{K}(\mathsf{SII})) = \mathsf{S}(\mathsf{K}\omega)(\mathsf{K}\omega) =$
$(\lambda xyz.xz(yz))(\mathsf{K}\omega)(\mathsf{K}\omega) \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\!\!\rightarrow \lambda z.\mathsf{K}\omega z(\mathsf{K}\omega z) \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\!\!\rightarrow \lambda z.\omega\omega \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\!\!\rightarrow \lambda z.\Omega$
Ω n'ayant pas de forme β-normale, $[\![\mathbf{P}]\!]_\lambda$ non plus.
4°) $[\![\lambda x.\mathsf{II}]\!]_{\mathrm{CL}} = [x].[\![\mathsf{II}]\!]_{\mathrm{CL}} = [x].[\![\mathsf{I}]\!]_{\mathrm{CL}}[\![\mathsf{I}]\!]_{\mathrm{CL}} = [x].\mathbf{II} = \mathbf{KII}$
Or $\mathbf{KII} \xrightarrow{\mathrm{CL}} \mathbf{I}$ donc la forme normale de $[\![\lambda x.\mathsf{II}]\!]_{\mathrm{CL}}$ est $\mathbf{I}$.
$[\![\lambda x.\mathsf{I}]\!]_{\mathrm{CL}} = [x].\mathbf{I} = \mathbf{KI}$ est en forme normale donc pas de réduction possible.
5°) $\mathcal{G}_\beta(\Omega)$ est un cycle simple. $[\![\Omega]\!]_{\mathrm{CL}} = \mathbf{SII}(\mathbf{SII})$ donc $\mathcal{G}_{\mathrm{CL}}(\Omega)$ admet une infinité de cycles de réduction.

Exercice 2 : ***Généalogie (science de trouver des ancêtres communs)***

1°) C'est évident par confluence de β : si $L \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\!\!\rightarrow M \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\!\!\rightarrow N$ et $L \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\!\!\rightarrow P$, alors $P \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\!\!\rightarrow R$ et $N \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\!\!\rightarrow R$, mais comme N est une forme β-normale, $N = R$.
2°) Ces termes ont les ancêtres communs suivants :
- $(\lambda yz.(\lambda q.zq)y)ba$
- $(\lambda z.(\lambda y.yz)z)c$
- $(\lambda yz.(\lambda q.q)yz)bc$
- $(\lambda yz.(\lambda q.qq)(yz))bc$
- $(\lambda yz.(\lambda q.q)(yz))bc$
- Ces deux termes ne sont pas joignables ($\mathsf{K}\Omega\mathsf{I} \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\!\!\rightarrow \{\mathsf{K}\Omega\mathsf{I}, \Omega\}$ et $\mathsf{KI}\Omega \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\!\!\rightarrow \{\mathsf{KI}\Omega, \mathsf{I}\}$. β étant confluente, ils ne peuvent avoir d'ancêtre commun.