S. Boldo et S. Le Roux Le 1^{er} décembre 2004

Corrigé du TD de logique n°9

Modèles de Kripke

Exercice 1 : ***Un exercice ~~débile~~ graphique***

		a	$\neg a$	b	$\neg b$	$a{\to}b$	$b{\to}a$	$a\wedge b$	$b\vee a$	$a{\to}b{\to}a$	$(\neg a{\to}a){\to}a$
	1	n	n	n	n	n	n	n	n	o	n
	2	n	o	n	n	o	n	n	n	o	o
1°)	3	o	n	n	o	n	o	n	o	o	o
	4	n	o	n	o	o	o	n	n	o	n
	5	o	n	o	n	o	o	o	o	o	o
	6	n	o	o	n	o	n	n	o	o	n

		a	$\neg a$	b	$\neg b$	c	$\neg c$	$c{\to}a$	$c{\to}b$	$a{\to}b$	$b{\to}a$	$\bot$	$a\wedge b$	$c\vee a$	S
	1	n	n	o	n	n	n	n	o	o	n	n	n	n	o
	2	o	n	o	n	n	n	o	o	o	o	n	o	o	o
2°)	3	n	o	o	n	n	n	n	o	o	n	n	n	n	o
	4	n	o	o	n	o	n	n	o	o	n	n	n	o	o
	5	n	o	o	n	n	o	o	o	o	n	n	n	n	o
	6	n	o	o	n	o	n	n	o	o	n	n	n	o	o

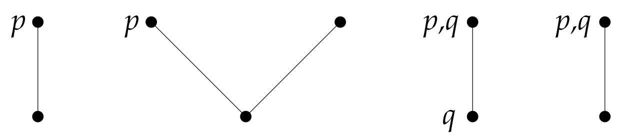
Exercice 2 : ***Logique classique vs. logique intuitionniste***

$$\frac{\Gamma, \neg\alpha \vdash \bot}{\Gamma \vdash \alpha}\ (\textit{r.a.a.}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \alpha}\ (\textit{e.f.q.s.}) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha{\to}\beta}\ ({\to}\text{-I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha{\to}\beta \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta}\ ({\to}\text{-E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha\wedge\beta}\ (\wedge\text{-I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha\wedge\beta}{\Gamma \vdash \alpha}\ (\wedge\text{-E-1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha\wedge\beta}{\Gamma \vdash \beta}\ (\wedge\text{-E-2})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha\vee\beta \quad \Gamma, \alpha \vdash \gamma \quad \Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma}\ (\vee\text{-E}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha\vee\beta}\ (\vee\text{-I-1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha\vee\beta}\ (\vee\text{-I-2})$$

Contre-modèles :



1–4 2 3 5

1°) ~~Débile~~ ~~Relativement aisé~~ Débile.
2°) ~~Débile~~ ~~Relativement aisé~~ Débile.
3°)

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\psi,\neg p\vdash\psi}\,(\text{hyp}) \quad \dfrac{\dfrac{}{\psi,\neg p\vdash\neg p}\,(\text{hyp})}{\psi,\neg p\vdash\neg p\vee\neg\neg p}\,(\vee\text{-I-1})}{\dfrac{\psi,\neg p\vdash\bot}{\psi\vdash\neg\neg p}\,(\to\text{-I})}\,(\to\text{-E})
\quad
\dfrac{\dfrac{}{\psi,\neg\neg p\vdash\psi}\,(\text{hyp}) \quad \dfrac{\dfrac{}{\psi,\neg\neg p\vdash\neg\neg p}\,(\text{hyp})}{\psi,\neg\neg p\vdash\neg p\vee\neg\neg p}\,(\vee\text{-I-2})}{\dfrac{\psi,\neg\neg p\vdash\bot}{\psi\vdash\neg\neg\neg p}\,(\to\text{-I})}\,(\to\text{-E})
}{\psi=\neg(\neg p\vee\neg\neg p)\vdash\bot}\,(\to\text{-E})
}{\vdash\neg p\vee\neg\neg p}\,(\textit{r.a.a.})
$$

4°) ~~Débile Relativement aisé~~ Débile.

5°) Au pire, faire un ($\vee$-E) avec $p\vee\neg p$ montré avec un ($\vee$-E) avec 3 en utilisant 1.

Exercice 3 : ***Connecteurs***

1°) On montre aisément par induction que toute formule construite sur $\{\wedge,\vee,\to\}$ vaut 1 pour la valuation constante égale à 1. Or pour cette même valuation $\neg x$ vaut 0. Donc les deux formules ne sont pas équivalentes classiquement, donc ne peuvent a fortiori pas l'être intuitionnistiquement. C.Q.F.D.

2°)

i. On procède par induction sur la formule φ :

- $\varphi = a$ ou $\varphi = b$: évident.
- $\varphi = \bot$: évident.
- $\varphi = \neg\psi$: alors $\alpha_3 \not\Vdash \psi$ et donc, nécessairement, $\alpha_1 \not\Vdash \psi$ et $\alpha_2 \not\Vdash \psi$. et donc $\alpha_1 \Vdash \neg\psi$ et $\alpha_2 \Vdash \neg\psi$.
- $\varphi = \psi\vee\chi$: alors $\alpha_3 \Vdash \psi$ ou $\alpha_3 \Vdash \chi$ et donc par hypothèse d'induction $\alpha_i \Vdash \psi$ ou $\alpha_j \Vdash \chi$.
- $\varphi = \psi\to\chi$: si $\alpha_3 \Vdash \psi$ alors $\alpha_3 \Vdash \chi$ et donc par hypothèse d'induction $\alpha_1 \Vdash \chi$ ou $\alpha_2 \Vdash \chi$ et donc $\alpha_1 \Vdash \psi\to\chi$ ou $\alpha_2 \Vdash \psi\to\chi$; sinon, $\alpha_3 \not\Vdash \psi$ et nécessairement $\alpha_1 \not\Vdash \psi$ et $\alpha_2 \not\Vdash \psi$ donc $\alpha_1 \Vdash \psi\to\chi$ et $\alpha_2 \Vdash \psi\to\chi$

C.Q.F.D.

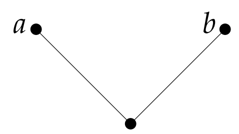
ii. S'il existe une formule équivalente à $a\wedge b$, elle est réalisée par α_3 car $\alpha_3 \Vdash a\wedge b$, donc par la question précédente elle est réalisée par α_1 ou par α_2 et donc $\alpha_1 \Vdash a\wedge b$ ou $\alpha_2 \Vdash a\wedge b$, contradiction, C.Q.F.D.

Exercice 4 : ***La logique LT***

On définit la logique LT comme la logique intuitionniste à laquelle on ajoute le schéma d'axiome $\dfrac{}{(a\to b)\vee(b\to a)}\,(\text{T})$.

1°) Il suffit de montrer que (T) est vrai dans tout modèle de Kripke linéaire. On raisonne par l'absurde. Soit $\mathcal{M} = \langle U, \preccurlyeq, I\rangle$ linéaire tel que $\mathcal{M} \not\Vdash (a\to b)\vee(b\to a)$. Alors il existe $u \in U$ tel que $u \not\Vdash (a\to b)\vee(b\to a)$. Donc il existe $v, w \succcurlyeq u$ tels que $v \Vdash a$, $v \not\Vdash b$, $w \Vdash b$, $w \not\Vdash a$. Mais comme $\mathcal{M}$ est linéaire, u et v sont comparables, donc $v \Vdash b$ ou $w \Vdash a$, contradiction, C.Q.F.D.

2°) LI $\subsetneq$ LT : il suffit de montrer que $(a\to b)\vee(b\to a)$ est réfutée dans un modèle de Kripke (non linéaire) ; en effet, on aura alors que $(a\to b)\vee(b\to a)$ (qui est vraie dans LT) est fausse dans LI. Le modèle suivant convient :



Donc LT $\subsetneq$ LK : d'après l'exercice 2 question 1, $\neg\neg p\to p$ est réfutée dans un modèle de Kripke linéaire (donc fausse dans LT par la question 1), et vraie dans LK.