S. Boldo et S. Le Roux Le 15 décembre 2004

# Logique – TD n°11

## Théorie des ensembles

**Rappels de cours :** ***Axiomatique de Zermelo-Frænkel***

La théorie ZF est la théorie dont les axiomes sont les suivants :

1. Axiome d'extensionnalité :
   $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$
2. Axiome de réunion :
   $\forall a \exists u \forall x (x \in u \Leftrightarrow \exists y (x \in y \wedge y \in a))$
3. Axiome de l'ensemble des parties :
   $\forall a \exists p \forall x (x \in p \Leftrightarrow x \subset a)$ où « $e \subset f$ » est une abrévation de la propriété « $\forall t (t \in e \Rightarrow t \in f)$ ».
4. Schéma d'axiome de substitution :
   $\forall m_1 \ldots \forall m_k \forall a (\forall u \forall v \forall w (u \in a \wedge \pi_{m_1 \ldots m_k}(u, v) \wedge \pi_{m_1 \ldots m_k}(u, w) \Rightarrow v = w)$
   $\Rightarrow \exists b \forall y (y \in b \Leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \pi_{m_1 \ldots m_k}(x, y))))$
5. Axiome de l'infini :
   $\exists z (\emptyset \in z \wedge \forall x (x \in z \Rightarrow x \cup \{x\} \in z))$

On définit de même que dans le cours les notations $\cup a$ pour la réunion des éléments de $a$ et $\mathfrak{P} a$ pour l'ensemble des parties de $a$ ; $\emptyset$ pour l'ensemble vide ; $\cup$, $\cap$ et $\times$ pour les opérateurs d'union, d'intersection et de produit cartésien. ; $\{z\}$ pour les singletons.

On rappelle que de l'axiome (*iv*) on déduit ce qu'il est convenu d'appeler le schéma d'*axiome de compréhension* : $\forall m_1 \ldots \forall m_k \forall a \exists b \forall x (x \in b \Leftrightarrow (x \in a \wedge \pi_{m_1 \ldots m_k}(x))))$.

**Exercice 1 :** ***De l'axiome de la paire au théorème de la paire***

Dans le cours, on a introduit l'axiome dit de la paire : $\forall a \forall b \exists d \forall x (x \in d \Leftrightarrow x = a \vee x = b)$. Montrer que cet axiome est en fait une conséquence des quatre premiers axiomes de ZF.

**Exercice 2 :** ***Où l'on parle d'ordinaux***

Ensemble bien ordonné ; bon ordre

Soient $R(\cdot, \cdot)$ une relation binaire et $a$ un ensemble.
L'ensemble $a$ est dit *(strictement) bien ordonné* par $R$ si $R$ est une relation d'ordre (strict) sur $a$ et tout sous-ensemble non vide de $a$ possède un plus petit élément pour $R$.
La relation $R$ est dite *de bon ordre (strict)* si $R$ est une relation d'ordre (strict) et pour tout $x$ du domaine de $R$, la collection $R(\cdot, x)$ est un ensemble (strictement) bien ordonné par $R$.
1°) Montrer qu'un ensemble (strictement) bien ordonné est totalement (strictement) ordonné.

Définition et propriétés des ordinaux

On dit qu'un ensemble $\alpha$ est un *ordinal* si :
– $\in$ est une relation de bon ordre strict sur $\alpha$ ;
– $\forall x (x \in \alpha \Rightarrow x \subset \alpha)$.

On désigne par $\mathfrak{O}(\cdot)$ la collection des ordinaux.
2°) Montrer que $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ et $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ sont des ordinaux.
3°) Montrer que les segments initiaux stricts d'un ordinal sont ses éléments. (On appelle *segment initial* de $a$ pour l'ordre $\prec$ tout ensemble de la forme $\{x \in a / x \prec e\}$ où $e \in a$.)

4°) Montrer que les éléments d'un ordinal sont des ordinaux.
5°) Montrer qu'un ordinal n'est pas élément de lui-même.
6°) Soient $\alpha$ et $\beta$ deux ordinaux. Montrer que l'une et l'une seulement des trois propositions suivantes est vraie : $\alpha{=}\beta$, $\beta{\in}\alpha$, $\alpha{\in}\beta$.
7°) Montrer que $\in$ est un bon ordre strict sur $\mathfrak{O}$.

Dorénavant, on notera $<$ la relation $\in$ sur les ordinaux, et $\leqslant$ la relation $\in\vee=$. Dans la suite, les termes (*strictement*) *supérieur* et *inférieur* font référence à $\leqslant$ (à $<$).
8°) Montrer que sur les relations $\leqslant$ et $\subset$ sont logiquement équivalentes sur les ordinaux.
9°) Montrer que la collection $\mathfrak{O}$ des ordinaux n'est pas un ensemble.
10°) Soit $\alpha$ un ordinal. Montrer que le plus petit ordinal supérieur à $\alpha$ est $\alpha \cup \{\alpha\}$, noté $\alpha+1$.
11°) Montrer que tout ensemble d'ordinaux admet une borne supérieure dans $\mathfrak{O}$, et définir explicitement cette dernière.

Ordinaux et ensembles bien ordonnés

12°) Soient $\alpha$ et $\beta$ deux ordinaux et $f : \alpha{\to}\beta$ une application strictement croissante. Montrer que $\alpha \leqslant \beta$ et $\xi \leqslant f(\xi)$ pour tout $\xi{\in}\alpha$.
13°) Soient $\alpha$ et $\beta$ deux ordinaux et $f : \alpha{\to}\beta$ un isomorphisme d'ensembles ordonnés de $(\alpha, \leqslant)$ sur $(\beta, \leqslant)$. Montrer que $\alpha{=}\beta$ et que $f$ est l'application identique.
14°) Soit $(u, \prec)$ un ensemble strictement bien ordonné. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme de $u$ sur un ordinal.

**Exercice 3 :** ***Axiome du choix et cardinaux***

L'axiome du choix

L'*axiome du choix* est célèbre en mathématiques. Il peut s'énoncer comme suit :
$\forall a((\forall x(x{\in}a \Rightarrow x{\neq}\emptyset) \wedge \forall y \forall z(y{\in}a \wedge z{\in}a \Rightarrow x{=}y \vee x \cup y{=}\emptyset) \Rightarrow \exists b \forall u \exists v(u{\in}a \Rightarrow b \cap u{=}\{v\}))$.

En ajoutant cet axiome à ceux de la théorie ZF, on obtient la théorie dite ZFC. On admet que le lemme de Zermelo : *tout ensemble admet un bon ordre* est équivalent à l'axiome du choix. Dans toute la suite, on se place dans la théorie ZFC.

Cardinaux

1°) Montrer que tout ensemble est équipotent à un ordinal.

Soit $a$ un ensemble. On appelle *cardinal* de $a$, noté $\mathfrak{card}(a)$, le plus petit ordinal équipotent à $a$. Deux ensembles sont donc équipotents si et seulement s'ils ont le même cardinal.
2°) Soient $a$ et $b$ deux ensembles non vides. Montrer que ces propositions sont équivalentes :

1. il existe une injection de $a$ dans $b$ ;
2. il existe une surjection de $b$ sur $a$ ;
3. $\mathfrak{card}(a) \leqslant \mathfrak{card}(b)$.

3°) Montrer le théorème de Cantor-Bernstein : *deux ensembles sont équipotents si et seulement s'il existe une injection de chacun d'eux dans l'autre*.
4°) Montrer le théorème de Cantor : *pour tout ensemble* $a$, $\mathfrak{card}(a) < \mathfrak{card}(\mathfrak{P}a)$.

On note $\mathfrak{C}(\cdot)$ la collection des cardinaux ; elle est définie par l'énoncé $\mathfrak{C}(\alpha)$ : « $\alpha$ est un ordinal qui n'est équipotent à aucun ordinal strictement inférieur à lui. »
5°) Montrer que la collection $\mathfrak{C}$ des cardinaux n'est pas un ensemble.