S. Boldo et S. Le Roux Le 6 octobre 2004

Logique – TD n°2

Logique minimale de Hilbert
Logique propositionnelle intuitionniste

Exercice 1 : ***Un raisonnement non intuitionniste***

Montrer qu'il existe deux nombres irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.
–*Indication*– Considérer $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ (ou pas)...

Rappels de cours : ***Logique minimale de Hilbert***

Les formules de la logique minimale de Hilbert (en abrégé, LM) sont construites uniquement avec le connecteur $\rightarrow$. Ses jugements sont de la forme $\vdash \varphi$, où φ est une formule.
Il n'y a en logique minimale que deux *axiomes*, K et S, et une *règle*, le *modus ponens* :

$$\frac{}{\vdash \alpha\rightarrow\beta\rightarrow\alpha}\ (\mathsf{K}) \qquad \frac{}{\vdash (\alpha\rightarrow\beta\rightarrow\gamma)\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\alpha\rightarrow\gamma}\ (\mathsf{S}) \qquad \frac{\vdash \alpha\rightarrow\beta \quad \vdash \alpha}{\vdash \beta}\ (\mathit{MP})$$

Exercice 2 : ***Quelques démonstrations en logique minimale de Hilbert***

1°) Montrer que l'axiome (I) : $\vdash \alpha\rightarrow\alpha$ est correct dans LM.
2°) Montrer que l'axiome (B) : $\vdash (\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\gamma\rightarrow\alpha)\rightarrow\gamma\rightarrow\beta$ est correct dans LM.
3°) Montrer que la règle suivante est correcte dans LM : $\dfrac{\vdash \alpha\rightarrow\beta\rightarrow\gamma}{\vdash \beta\rightarrow\alpha\rightarrow\gamma}\ (\mathsf{C})$
4°) Montrer que la règle de *coupure* : $\dfrac{\vdash \alpha\rightarrow\beta \quad \vdash \beta\rightarrow\gamma}{\vdash \alpha\rightarrow\gamma}\ (\text{cut})$ est correcte dans LM.

Exercice 3 : ***Des théorèmes passionnants***

Montrer que les propositions suivantes sont des théorèmes de LM :
1°) $\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\beta$
2°) $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\alpha\rightarrow\alpha$
3°) $(\alpha\rightarrow\beta\rightarrow\gamma)\rightarrow\beta\rightarrow\alpha\rightarrow\gamma$
4°) $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)\rightarrow\alpha\rightarrow\gamma$
5°) $(\alpha\rightarrow\beta\rightarrow\gamma\rightarrow\delta)\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)\rightarrow\beta\rightarrow\delta$
On pourra bien évidemment utiliser les résultats montrés dans l'exercice précédent.

Rappels de cours : ***Logique intuitionniste***

Les formules de la logique intuitionniste à la Hilbert (en abrégé, LI) sont construites avec le connecteur nullaire $\bot$ ($False$) et les connecteurs binaires $\to$, $\vee$, $\wedge$ (&). Ses jugements sont de la forme $\vdash \varphi$, où φ est une formule.
La logique intuitionniste se base sur la logique minimale, dont les axiomes et règle sont :

$$\frac{}{\vdash \alpha\to\beta\to\alpha}\,(\mathsf{K}) \qquad \frac{}{\vdash (\alpha\to\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\gamma}\,(\mathsf{S}) \qquad \frac{\vdash \alpha\to\beta \quad \vdash \alpha}{\vdash \beta}\,(MP)$$

On rajoute à propos des connecteurs $\wedge$ et $\vee$ les axiomes :

$(\vee 0)$:	$\vdash (p\to r)\to(q\to r)\to(p\vee q)\to r$	$(\vee 1)$:	$\vdash p\to(p\vee q)$	$(\vee 2)$:	$\vdash q\to(p\vee q)$
$(\wedge 0)$:	$\vdash p\to q\to(p\wedge q)$	$(\wedge 1)$:	$\vdash (p\wedge q)\to p$	$(\wedge 2)$:	$\vdash (p\wedge q)\to q$

Exercice 4 : Ex falso quodlibet sequitur ***(du faux l'on déduit ce que l'on veut)***

On pose $\neg\alpha \equiv \alpha\to\bot$.

1°) Montrer que $\dfrac{}{\vdash (\alpha\to\beta)\to(\neg\beta\to\neg\alpha)}$ et $\dfrac{\vdash \neg\beta \quad \vdash \beta}{\vdash \neg\alpha}$ sont correctes.

On ajoute l'axiome F : $\vdash \bot\to\alpha$.

2°) Montrer que $\dfrac{}{\vdash (\neg\alpha\vee\beta)\to(\alpha\to\beta)}$ et $\dfrac{\vdash \neg\beta \quad \vdash \beta}{\vdash \alpha}$ sont correctes.

Exercice 5 : ***Logique propositionnelle intuitionniste***

1°) Montrer que les règles suivantes sont correctes dans LI :

$$\frac{\vdash \beta}{\vdash \alpha\to\beta}\,(\text{Drop}) \qquad \frac{\vdash \alpha\to\alpha\to\beta}{\vdash \alpha\to\beta}\,(\text{Double})$$

$$\frac{\vdash \gamma\to\alpha \quad \vdash \gamma\to\beta}{\vdash \gamma\to\alpha\wedge\beta}\,\wedge 3 \qquad \frac{\vdash \alpha\to\gamma \quad \vdash \beta\to\gamma}{\vdash (\alpha\vee\beta)\to\gamma}\,\vee 3$$

2°) Montrer les théorèmes suivants dans LI :

i. $\vdash \alpha\vee\beta\to\beta\vee\alpha$;
ii. $\vdash (\alpha\to\beta)\to(\alpha\vee\gamma)\to(\beta\vee\gamma)$;
iii. $\vdash \alpha\vee(\beta\wedge\gamma)\to(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)$.

3°) Montrer que la règle $\dfrac{\vdash \alpha\to\gamma \quad \vdash \beta\to\delta}{\vdash \alpha\wedge\beta\to\gamma\wedge\delta}$ est correcte dans LI.