S. Boldo et S. Le Roux Le 20 octobre 2003

Logique – TD n°4

Début du λ-calcul

Rappels de cours : ***λ-calcul***

Les λ-termes sont définis par la grammaire algébrique :

$$M, N ::= x|\lambda x.M|MN \qquad x \in \mathcal{V}$$

L'opération de β-réduction est définie inductivement sur les λ-termes à partir de la règle :

$$(\lambda x.M)N \quad \xrightarrow{\beta} \quad M[x:=N]$$

Exercice 1 : ***Les booléens en λ-calcul***

On pose $\mathsf{T} = \lambda x.\lambda y.x$ et $\mathsf{F} = \lambda x.\lambda y.y$.
On dit qu'un λ-terme est *booléen* s'il se β-réduit à T ou à F.
1°) Vérifier que $\mathsf{TI} \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \mathsf{F}$
2°) Soit B un λ-terme booléen, et M, N deux λ-termes quelconques. Que représente BMN ?
3°) Trouvez des termes représentant des opérations booléennes usuelles $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$.

1°) $\mathsf{TI}=(\lambda x.\lambda y.x)\mathsf{I} \xrightarrow{\beta} \lambda y.I = \lambda y.\lambda z.z = \mathsf{F}$.
2°) C'est la conditionnelle « si B alors M sinon N ».
3°) On définit les connecteurs comme suit :

1. $(\neg) = \lambda x.x\mathsf{F}\mathsf{T}$
2. $(\vee) = \lambda x.\lambda y.x\mathsf{T}y$
3. $(\wedge) = \lambda x.\lambda y.xy\mathsf{F}$
4. $(\Rightarrow) = \lambda x.\lambda y.xy\mathsf{T}$