S. Boldo et S. Le Roux Le 26 octobre 2004

Logique – TD n°5

λ-calcul

Exercice 1 : ***Combinateurs amusants***

1°) Montrer le théorème du point fixe : pour tout terme F il existe un terme X tel que $FX\overset{\beta}{\equiv}X$.
2°) Trouver un λ-terme clos T tel que $T\xrightarrow{\beta}TT$.
3°) Montrer qu'il existe un λ-terme clos U tel que pour tout λ-terme M, $UM\overset{\beta}{\equiv}UU$.
4°) On pose $A = \mathsf{SI}$. Montrer que $(AA)A\overset{\beta}{\equiv}A(AA)$.
5°) Montrer qu'il existe un λ-terme clos V tel que pour tout λ-terme M, $V\overset{\beta}{\equiv}VM$.

Exercice 2 : ***Point fixe***

On dit qu'un λ-terme M est un *point fixe* d'un λ-terme F si $FM\overset{\beta}{\equiv}F$. On appelle *combinateur de point fixe* tout terme T tel que pour tout terme F on ait $TF\overset{\beta}{\equiv}F(TF)$.

Exemples de combinateurs de point fixe

1°) Soient $þ = \lambda x.\lambda y.y(xxy)$ et $\Theta = þþ$. Montrer que pour tout F, $\Theta F\overset{\beta}{\twoheadrightarrow}F(\Theta F)$.
2°) Soient $\mathsf{Y} = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ et $\mathsf{G} = \lambda y.\lambda f.f(yf)$. Établir un lien entre YG et Θ.

Caractérisation des combinateurs de point fixe

3°) Soient M un combinateur de point fixe et x une variable. Montrer qu'il existe N tel que $Mx\overset{\beta}{\equiv}xN$.
4°) Montrer que si M est un combinateur de point fixe alors il existe une variable y et un λ-terme R tel que $M\overset{\beta}{\equiv}\lambda y.R$
5°) Montrer que si M est un combinateur de point fixe et $x \notin fv(M)$, alors $\lambda x.Mx \overset{\beta}{\equiv} M$.
6°) Montrer qu'un λ-terme est un combinateur de point fixe si et seulement si c'est un point fixe de G.

Construction de combinateurs de point fixe

7°) Construire une suite infinie $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de combinateurs de point fixe.
8°) Donner les formes normales de Y_0, Y_1 et Y_2.

Exercice posé en partiel

On pose $\$ = \lambda abcdefghijklmnopqrstuvwxyz.z(lecombinateurdontvousreviez)$
et € $=$ $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ (il y a ici vingt-six fois $).
9°) Montrer que € est un combinateur de point fixe.

On rappelle la définition de certains termes spéciaux :

$$\mathsf{I} = \lambda x.x \qquad \omega = \lambda x.xx \qquad \Omega = \omega\omega.$$

Exercice 3 : ***Graphes de réduction***

Pour un λ-terme M, on notera $\mathcal{G}(M)$ le graphe dont les sommets sont les $\{N \;/\; M \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\rightarrow N\}$ et les arcs sont les β-réductions (il peut donc y avoir plusieurs arcs entre deux sommets).

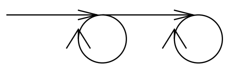
Sens systématique

Tracer les graphes correspondant aux termes suivants, où $O = \lambda x.\omega x$ et $\tau = \lambda x.xxx$.

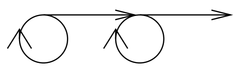
1. $\mathsf{I}x$
2. $\mathsf{I}(\mathsf{I}x)$
3. $\mathsf{II}(\mathsf{III})$
4. Ω
5. OO
6. $\tau\tau$
7. $(\lambda x.\mathsf{I})(\tau\tau)$

Sens créatif

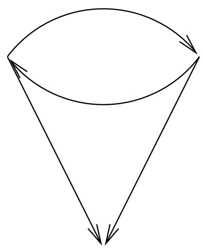
Trouver des termes qui ont les graphes suivants :



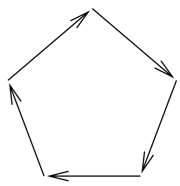
1.



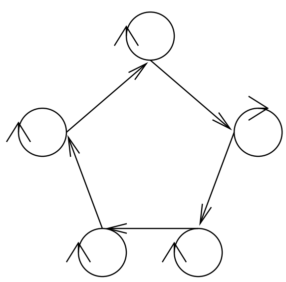
2.



3.



4.



5.