

# Logique – TD n°7

## $\lambda$ -calcul – réduction

On rappelle la définition de certains termes spéciaux :

$$I = \lambda x.x \quad T = \lambda x.\lambda y.x \quad F = \lambda x.\lambda y.y \quad Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)).$$

### Exercice 1 : Les entiers naturels en $\lambda$ -calcul

On souhaite encoder  $\mathbb{N}$  et les opérations arithmétiques élémentaires en  $\lambda$ -calcul.

On pose par récurrence les entiers comme suit :

–  $0 = \lambda s.I$  (*i.e.* le combinateur **F**);

– si  $n \in \mathbb{N}$  a été défini,  $n+1$  est défini comme la forme normale de  $\lambda s.\lambda z.s(ns)$ .

1°) Écrire les valeurs de 1, 2 et 3. Quel combinateur représente  $n$  ?

2°) Définir des  $\lambda$ -termes représentant le successeur **SUCC** et les opérations  $+$  et  $\times$ .

3°) Définir un  $\lambda$ -terme **Z** tel que  $Zn$  représente le booléen «  $n=0$  ».

4°) On pose  $\text{pred} = \lambda n.n(\lambda p.\lambda z.z(\text{succ}(pT))(pT))(\lambda z.z0)F$ .

Montrer que  $\text{pred}(n+1) \xrightarrow{\beta} n$ . Que vaut  $\text{pred } 0$  ?

5°) Définir un  $\lambda$ -terme représentant l'opération  $-$ .

### Exercice 2 : Fonctions récursives

Le but de cet exercice est de construire des fonctions récursives (*i.e.* faisant appel à elles-mêmes) sur les entiers.

Le prédicat **pair**, qui renvoie **T** si son argument est pair et **F** dans le cas contraire, peut s'écrire ainsi :  $\lambda n.(Zn)T(\lambda x.\lambda y.\text{pair}(\text{pred } n)yx)$

Simplement, on ne peut pas faire d'appel récursif à **pair** dans le corps de **pair**.

La solution consiste à passer **pair** en paramètre en définissant la fonction d'ordre supérieur :  $\text{Pair} = \lambda F.\lambda n.(Zn)T(\lambda x.\lambda y.F(\text{pred } n)yx)$ . Ensuite il n'y a qu'à prendre un point fixe de **Pair** pour obtenir un terme calculant le prédicat **pair** :  $\text{pair} = Y\text{Pair}$ .

1°) Calculer la forme  $\beta$ -normale de **pair** 2.

2°) Écrire deux termes calculant respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de deux entiers naturels.

**Exercice 3 : Réduction – vrai ou faux ?**

Soit une relation de réduction  $\xrightarrow{R}$ .

On note  $\xrightarrow{R}\!\!\!\rightarrow$  la clôture réflexive-transitive de  $\xrightarrow{R}$ , qui est définie par :  $x \xrightarrow{R}\!\!\!\rightarrow z$  s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $y_0, \dots, y_n$  tels que  $x = y_0, z = y_n$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, y_{i-1} \xrightarrow{R} y_i$ .

On appelle *forme R-normale* un élément irréductible pour  $\xrightarrow{R}$ .

La réduction  $\xrightarrow{R}$  est dite :

- *confluente* si  $a \xrightarrow{R}\!\!\!\rightarrow b \wedge a \xrightarrow{R}\!\!\!\rightarrow c \Rightarrow \exists d (b \xrightarrow{R}\!\!\!\rightarrow d \wedge c \xrightarrow{R}\!\!\!\rightarrow d)$  ;
- *fortement normalisante* s'il n'existe pas de suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $i, a_i \xrightarrow{R} a_{i+1}$  ;
- *faiblement normalisante* si tout élément admet une forme normale ;
- *convergente* si elle est confluente et fortement normalisante ;
- *acyclique* s'il n'existe pas d'élément  $a$  tel que  $a \xrightarrow{R} \xrightarrow{R}\!\!\!\rightarrow a$  ;
- *finitaire* si pour tout élément  $a$  l'ensemble  $\{b / a \xrightarrow{R} b\}$  est fini ;
- *bornée* si pour tout  $a$  il existe  $n_a$  tel qu'il n'existe pas de  $b$  tel que  $a \xrightarrow{R} n_a b$ .

Pour toutes les questions suivantes, on demande soit une démonstration formelle, soit un contre-exemple (lesquels pourront être donnés sous forme de graphe orienté).

- 1°) Une réduction fortement normalisante est-elle faiblement normalisante ? Et réciproquement ?
- 2°) On suppose que  $\xrightarrow{R}$  est telle que tout élément admet une unique forme normale.  $\xrightarrow{R}$  est-elle confluente ? Est-elle convergente ?
- 3°) Une réduction fortement normalisante est-elle acyclique ?
- 4°) Une réduction faiblement normalisante, non confluente et acyclique est-elle fortement normalisante ?
- 5°) Une réduction faiblement normalisante, confluente et acyclique est-elle fortement normalisante ?
- 6°) Une relation bornée est-elle fortement normalisante ?
- 7°) Une relation fortement normalisante est-elle bornée ?
- 8°) Une relation finitaire fortement normalisante est-elle bornée ?
- 9°) Une relation dont la clôture réflexive-transitive est fortement normalisante est-elle fortement normalisante ?