S. Boldo et S. Le Roux Le 1er décembre 2004

Logique – TD n°9

Modèles de Kripke

Rappels de cours : ***Modèles de Kripke en logique intuitionniste***

Un *modèle de Kripke* est un triplet $\mathcal{M} = \langle U, \preccurlyeq, I\rangle$ où
- U est un ensemble appelé *univers* dont les éléments sont appelés *mondes* ;
- $\preccurlyeq$ est un préordre (*i.e.* une relation réflexive et transitive) sur U appelé relation d'*accessibilité* ;
- $I : \mathcal{V} \longrightarrow \mathfrak{P}U$ est une fonction dirigée, *i.e.* si $u \in I(a)$ et $v \succcurlyeq u$, alors $v \in I(a)$.

On définit sur $U \times \Phi$ (où Φ est l'ensemble des formules) une relation binaire $\Vdash$ dite relation de *forçage* par :
- si $\varphi = a \in \mathcal{V}$, $u \Vdash \varphi$ si et seulement si $u \in I(a)$;
- si $\varphi = \neg\psi$, $u \Vdash \varphi$ si et seulement si pour tout $v \succcurlyeq u$, si $v \nVdash \psi$;
- si $\varphi = \psi\wedge\chi$, $u \Vdash \varphi$ si et seulement si $u \Vdash \psi$ et $u \Vdash \chi$;
- si $\varphi = \psi\vee\chi$, $u \Vdash \varphi$ si et seulement si $u \Vdash \psi$ ou $u \Vdash \chi$;
- si $\varphi = \psi\rightarrow\chi$, $u \Vdash \varphi$ si et seulement si pour tout $v \succcurlyeq u$, si $v \Vdash \psi$, alors $v \Vdash \chi$;
- si $\varphi = \perp$, $u \nVdash \varphi$.

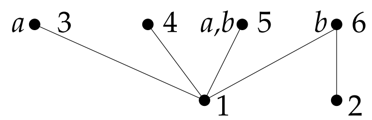
On dit que $\mathcal{M} = \langle U, \preccurlyeq, I\rangle$ *réalise* une formule φ (ou est un modèle de φ), ce que l'on note $\mathcal{M} \Vvdash \varphi$, si pour tout monde $u \in U$, $u \Vdash \varphi$.

On dit que φ est *valide* (au sens de l'intuition) si elle est réalisée dans tout modèle de Kripke. On note alors $\Vvdash \varphi$.

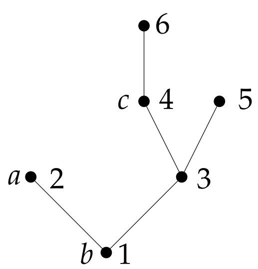
Les deux théorèmes fondamentaux suivants établissent une correspondance entre validité (au sens de l'intuition) et démontrabilité en logique intuitionniste :
- **Correction** : si $\vdash_{\text{LI}} \varphi$, alors $\Vvdash \varphi$.
- **Complétude** : si $\Vvdash \varphi$, alors $\vdash_{\text{LI}} \varphi$.

Exercice 1 : ***Un exercice ~~débile~~ graphique***

1°) Dans le modèle de Kripke donné par le graphe ci-dessous, préciser quels mondes forcent a, $\neg a$, b, $\neg b$, $a\rightarrow b$, $b\rightarrow a$, $a\wedge b$, $b\vee a$, $a\rightarrow b\rightarrow a$, $(\neg a\rightarrow a)\rightarrow a$.



2°) Dans le modèle de Kripke donné par le graphe ci-dessous, préciser quels mondes forcent a, $\neg a$, b, $\neg b$, c, $\neg c$, $c\rightarrow a$, $c\rightarrow b$, $a\rightarrow b$, $b\rightarrow a$, $\perp$, $a\wedge b$, $c\vee a$, $(a\rightarrow b\rightarrow c)\rightarrow(a\rightarrow b)\rightarrow a\rightarrow c$.



Exercice 2 : ***Logique classique vs. logique intuitionniste***

Pour chacune des formules suivantes, donner un arbre de démonstration en logique classique et un contre-modèle de Kripke :

1. $\neg\neg p \to p$
2. $\neg p \vee \neg\neg p$
3. $(\neg p \to \neg q) \to q \to p$
4. $((\neg p) \to p) \to p$
5. $(p \to q) \to \neg p \vee q$

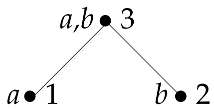
Exercice 3 : ***Indépendance de connecteurs***

Soient $\mathcal{C}$ un ensemble de connecteurs logiques et $\maltese$ un connecteur k-aire n'appartenant pas à $\mathcal{C}$. On dit que $\maltese$ est *indépendant* de $\mathcal{C}$ s'il n'existe pas de formule $\varphi(a_1, \ldots, a_k)$ écrite uniquement avec les connecteurs de $\mathcal{C}$ telle que $\vdash \maltese(a_1, \ldots, a_k) \leftrightarrow \varphi(a_1, \ldots, a_k)$

Dans toute la suite, on se place en logique intuitionniste. Il conviendra donc d'entendre par $\vdash$ la déduction naturelle intuitionniste.

1°) Montrer que $\neg$ est indépendant de $\{\wedge, \vee, \to\}$.

2°) On considère le modèle de Kripke $\mathcal{M}$ ci-dessous :



1. Soit ψ une formule ayant a et b comme variables propositionnelles et ne contenant que les connecteurs $\vee$, $\neg$, $\to$, $\bot$. Montrer que si $\alpha_3 \Vdash \psi$ alors $\alpha_1 \Vdash \psi$ ou $\alpha_2 \Vdash \psi$.
2. En déduire que $\wedge$ est indépendant de $\{\vee, \neg, \to, \bot\}$.

Exercice 4 : ***Une logique intermédiaire entre intuitionniste et classique***

On définit la logique LT comme la logique intuitionniste à laquelle on ajoute le schéma d'axiome $\dfrac{}{(a \to b) \vee (b \to a)}\ (\mathrm{T})$.

Un modèle de Kripke $\mathcal{M} = \langle U, \preccurlyeq, I \rangle$ est dit *linéaire* s'il vérifie la propriété suivant : pour tous α, β, β' tels que $\alpha \preccurlyeq \beta$ et $\alpha \preccurlyeq \beta'$, on a que $\beta' \preccurlyeq \beta$ ou $\beta \preccurlyeq \beta'$.

1°) Montrer que toute formule vraie dans LT est vraie dans tout modèle de Kripke linéaire. (*Pour votre culture personnelle, la réciproque est également vraie.*)

2°) Montrer que LI $\subsetneq$ LT $\subsetneq$ LK.