Partiel de logique

21 novembre 2005

Documents autorisés

...

enfin pas vraiment tous les documents, en fait...

...

par exemple, pas les dossiers ultra-secrets de la CIA sur l'affaire Kennedy[1]

Rappel : quand on invoque un principe d'induction, il faut préciser sur quel objet, après s'être assuré qu'il est bien défini par induction. On rappelle les règles de la déduction naturelle classique, en abrégé DNC. Aucune hypothèse de finitude n'est faite quant à Γ. On rappelle aussi que $\neg\alpha$ est simplement une notation pour $\alpha \vdash \bot$.

$$\frac{\Gamma, \neg\alpha \ \vdash \ \bot}{\Gamma \ \vdash \ \alpha}\ (\textit{r.a.a.}) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \ \vdash \ \beta}{\Gamma \ \vdash \ \alpha \to \beta}\ \neg\text{-I)} \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \alpha \to \beta \quad \Gamma \ \vdash \ \alpha}{\Gamma \ \vdash \ \beta}\ (\neg\text{-E})$$

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \alpha \quad \Gamma \ \vdash \ \beta}{\Gamma \ \vdash \ \alpha \wedge \beta}\ (\wedge\text{-I}) \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \alpha \wedge \beta}{\Gamma \ \vdash \ \alpha}\ (\wedge\text{-E-1}) \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \alpha \wedge \beta}{\Gamma \ \vdash \ \beta}\ (\wedge\text{-E-2})$$

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \alpha \vee \beta \quad \Gamma, \alpha \ \vdash \ \gamma \quad \Gamma, \beta \ \vdash \ \gamma}{\Gamma \ \vdash \ \gamma}\ (\vee\text{-E}) \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \alpha}{\Gamma \ \vdash \ \alpha \vee \beta}\ (\vee\text{-I-1}) \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \beta}{\Gamma \ \vdash \ \alpha \vee \beta}\ (\vee\text{-I-2})$$

1 - Déduction naturelle classique implicative et parabolique et vice et versa

1. Définir P l'ensemble des propositions associées à DNC (On appellera $\mathscr{V}$ l'ensemble des variables propositionnelles, que l'on supposera dénombrable).

   Dans tout ce problème, on appellera "déduction naturelle classique implicative", en abrégé DNCI, la partie de DNC concernant uniquement les connecteurs $\to$ et $\bot$. Le symbole thèse associé sera noté $\vdash_0$.

2. Définir P_0 l'ensemble des propositions de DNCI ainsi que les règles de DNCI.

   On définit une fonction f de P dans P_0 de la façon suivante :

   $$f(p) = p, \quad p \in \mathscr{V} \cup \{\bot\} \qquad f(A \vee B) = \neg f(A) \to f(B)$$

   $$f(A \to B) = f(A) \to f(B) \qquad f(A \wedge B) = \neg(f(A) \to \neg f(B))$$

   On appelle $\tilde{f}$ la fonction qui à un ensemble Γ de propositions de P associe l'ensemble des images de ces propositions par f.

[1] que je n'ai *jamais* vendus sur e-bay. Je répète : je n'ai jamais vendus les dossiers ultra-secrets de la CIA sur l'affaire Kennedy sur e-bay. Ou alors y'a longtemps. Ou bien j'ai oublié. Ou ils sentaient pas bon. Dites, si vous arrêtiez de lire des conneries et que vous réflechissiez au partiel, vous croyez pas que vous seriez plus efficaces ?

3. Quelle méthode a-t-on utilisée pour définir la fonction f ?

   L'objet du problème est de démontrer que $\vdash \varphi$ si et seulement si $\vdash_0 f(\varphi)$.

4. Interpréter le "résultat" ci-dessus. Quelles en sont les conséquences en terme de langage, d'arbres de preuve, etc. ?

5. Que peut-on dire de $\Gamma \vdash \varphi$ si on a $\Gamma \vdash_0 \varphi$?

6. Dans DNCI, montrer la règle d'affaiblissement, la règle "inverse de l'introduction de la flèche" et l'absurde intuitionniste.

7. Dériver les théorèmes suivants (dans DNCI) :
   - $\vdash_0 \neg(\alpha \to \beta) \to \alpha$
   - $\vdash_0 \neg(\alpha \to \neg\beta) \to \beta$

8. Montrer la règle suivante (dans DNCI) : $\dfrac{\Gamma, \neg\gamma, \beta \vdash_0 \gamma \quad \Gamma, \neg\gamma, \neg\alpha \vdash_0 \beta \quad \Gamma, \neg\gamma, \alpha \vdash_0 \gamma}{\Gamma, \neg\gamma \vdash_0 \gamma}$.

   En déduire celle-ci : $\dfrac{\Gamma \vdash_0 \neg\alpha \to \beta \quad \Gamma, \alpha \vdash_0 \gamma \quad \Gamma, \beta \vdash_0 \gamma}{\Gamma \vdash_0 \gamma}$.

9. Montrer que si $\Gamma \vdash \varphi$ alors $\tilde{f}(\Gamma) \vdash_0 f(\varphi)$ par induction sur l'arbre de dérivation de $\Gamma \vdash \varphi$.

10. Montrer que si $\vdash f(\varphi) \to \varphi$ alors on a : $\vdash_0 f(\varphi)$ implique $\vdash \varphi$.

11. Montrer $\vdash f(\varphi) \to \varphi$ par induction sur φ.

12. Conclure.

2 - Théorème de complétude

On dit qu'une formule φ est *conséquence sémantique classique* d'un ensemble de propositions Γ et l'on note $\Gamma \vDash \varphi$ si, pour toute valuation v, quand tous les énoncés de Γ sont (classiquement) satisfaits par v, φ l'est aussi.

On se propose de démontrer le théorème de complétude, établi par Gödel en 1929 dans le cadre de sa thèse de doctorat, qui stipule que si $\Gamma \vDash \varphi$, alors $\Gamma \vdash \varphi$ est un théorème de la déduction naturelle classique.

1. Pourquoi ce théorème est-il dit « de complétude » ?

2. Que dit la réciproque du théorème de complétude ? Justifier brièvement qu'elle est vraie.

   Un ensemble de propositions Γ est dit *incohérent* si $\Gamma \vdash \perp$, *cohérent* sinon. Γ est *maximalement cohérent* si Γ est cohérent mais tout sur-ensemble strict de Γ est incohérent.

3. Montrer que l'ensemble des propositions est dénombrable.
4. Montrer que si Γ est cohérent, alors Γ est inclus dans un ensemble maximalement cohérent.

5. Montrer que si Γ est maximalement cohérent et $\Gamma \vdash \varphi$, alors $\varphi \in \Gamma$.
6. Montrer que si Γ est maximalement cohérent, alors pour toute proposition φ, $\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \neg\varphi \notin \Gamma$.

7. Montrer que si Γ est cohérent, alors il existe une valuation v telle que pour toute formule φ de Γ,H $\tilde{v}(\varphi) = 1$.

8. Conclure.