La logique propositionnelle classique

Pierre Lescanne

10 octobre 2005 – 13 : 40

En déduction naturelle

On ajoute la règle dite de réduction par l'absurde.

$$RAA \quad \frac{\Gamma, \neg p \vdash \bot}{\Gamma \vdash p}$$

Attention : il ne faut pas confondre cela avec

$$\frac{\Gamma, p \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg p}$$

qui est en fait :

$$\frac{\Gamma, p \vdash \bot}{\Gamma \vdash p \Rightarrow \bot}$$

Exercice

Prouvez

1. $\neg\neg p \Rightarrow p$
2. $p \vee \neg p$
3. $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$

Exercice 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg p, \neg p \vdash \neg\neg p \qquad \neg\neg p, \neg p \vdash \neg p}{\neg\neg p, \neg p \vdash \bot} \Rightarrow E}{\neg\neg p \vdash p} RAA}{\vdash \neg\neg p \Rightarrow p} \Rightarrow I$$

Exercice 2

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg(p \vee \neg p) \vdash \neg(p \vee \neg p)$}
\AxiomC{$\neg(p \vee \neg p), p \vdash \neg(p \vee \neg p)$}
\AxiomC{$\neg(p \vee \neg p), p \vdash p$}
\RightLabel{$\vee I_g$}
\UnaryInfC{$\neg(p \vee \neg p), p \vdash p \vee \neg p$}
\RightLabel{$\Rightarrow E$}
\BinaryInfC{$\neg(p \vee \neg p), p \vdash \bot$}
\RightLabel{$\Rightarrow I$}
\UnaryInfC{$\neg(p \vee \neg p) \vdash \neg p$}
\RightLabel{$\vee I_d$}
\UnaryInfC{$\neg(p \vee \neg p) \vdash p \vee \neg p$}
\RightLabel{$\Rightarrow E$}
\BinaryInfC{$\neg(p \vee \neg p) \vdash \bot$}
\RightLabel{RAA}
\UnaryInfC{$\vdash p \vee \neg p$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 3

Posons $\Gamma \triangleq (p \Rightarrow q) \Rightarrow p, \neg p$.

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{\Gamma, p \vdash \neg p \qquad \Gamma, p \vdash p}{\Gamma, p \vdash \bot}\;{\color{red}\Rightarrow E}
      }{\Gamma, p \vdash q}\;{\color{red}\bot E}
    }{\Gamma \vdash p \Rightarrow q}\;{\color{red}\Rightarrow I}
    \qquad \text{with } \Gamma \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q
  }{}
}{}
$$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \Gamma \vdash \neg p
      \qquad
      \dfrac{
        \Gamma \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q
        \qquad
        \dfrac{
          \dfrac{
            \dfrac{\Gamma, p \vdash \neg p \qquad \Gamma, p \vdash p}{\Gamma, p \vdash \bot}\;{\color{red}\Rightarrow E}
          }{\Gamma, p \vdash q}\;{\color{red}\bot E}
        }{\Gamma \vdash p \Rightarrow q}\;{\color{red}\Rightarrow I}
      }{\Gamma \vdash p}\;{\color{red}\Rightarrow E}
    }{(p \Rightarrow q) \Rightarrow p, \neg p \vdash \bot}\;{\color{red}\Rightarrow E}
  }{(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \vdash p}\;{\color{red}RAA}
}{\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p}\;{\color{red}\Rightarrow I}
$$

Correction et complétude

Interprétation : une fonction de *proposition* vers $\{0, 1\}$, somme et produit modulo 2.

- $[\![p \Rightarrow q]\!] = 1 + [\![p]\!] + [\![p]\!].[\![q]\!]$
- $[\![p \vee q]\!] = [\![p]\!] + [\![q]\!] + [\![p]\!].[\![q]\!]$
- $[\![p \wedge q]\!] = [\![p]\!].[\![q]\!]$
- $\bot = 0$

$\Gamma \vDash_{NK} p$ signifie que si $[\![q]\!] = 1$ pour tout $q \in \Gamma$
alors $[\![p]\!] = 1$

Correction et complétude (suite)

La logique propositionnelle est correcte,
c-à-d $\Gamma \vdash_{NK} p$ implique $\Gamma \vDash_{NK} p$

La logique propositionnelle est complète,
c-à-d $\Gamma \vDash_{NK} p$ implique $\Gamma \vdash_{NK} p$