Les modèles de Kripke de la logique propositionnelle

Pierre Lescanne

3 janvier 2006 – 11 : 11

Notations

À partir de maintenant, je note

1. $\varphi, \psi, \chi, \theta$ etc. les propositions,
2. p, q, r, s, t, les variables propositionnelles,
3. Γ, Θ, Σ, les environnements,

Les modèles de Kripke (cas général)

Un modèle de Kripke est un triplet $\mathcal{M} = (\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, \mathcal{I}_{\mathcal{M}}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ où

- $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ est un ensemble dont les éléments, notés $u, v, w,$ sont appelés

Les modèles de Kripke (cas général)

Un modèle de Kripke est un triplet $\mathcal{M} = (\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, \mathcal{I}_{\mathcal{M}}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ où

- $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ est un ensemble dont les éléments, notés u, v, w, sont appelés
  - des mondes,

Les modèles de Kripke (cas général)

Un modèle de Kripke est un triplet $\mathcal{M} = (\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, \mathcal{I}_{\mathcal{M}}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ où

- $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ est un ensemble dont les éléments, notés u, v, w, sont appelés
  - des mondes,
  - des mondes possibles,

Les modèles de Kripke (cas général)

Un modèle de Kripke est un triplet $\mathcal{M} = (\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, \mathcal{I}_{\mathcal{M}}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ où

- $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ est un ensemble dont les éléments, notés u, v, w, sont appelés
  - des mondes,
  - des mondes possibles,
  - des étapes (de raisonnement),

Les modèles de Kripke (cas général)

Un modèle de Kripke est un triplet $\mathcal{M} = (\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, \mathcal{I}_{\mathcal{M}}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ où

- $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ est un ensemble dont les éléments, notés $u, v, w,$ sont appelés
  - des mondes,
  - des mondes possibles,
  - des étapes (de raisonnement),
  - des états.

Les modèles de Kripke (cas général)

Un modèle de Kripke est un triplet $\mathcal{M} = (\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, \mathcal{I}_{\mathcal{M}}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ où

- $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ est un ensemble dont les éléments, notés u, v, w, sont appelés
  - des mondes,
  - des mondes possibles,
  - des étapes (de raisonnement),
  - des états.
- $\mathcal{I}_{\mathcal{M}} : \mathit{Variables} \to \mathcal{P}(\mathcal{U}_{\mathcal{M}})$. Intuitivement $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p)$ est l'ensembles des mondes où la variable p est satisfaite.

Les modèles de Kripke (cas général)

- $\mathcal{R}_{\mathcal{M}} = (R_1, ..R_n)$ est un ensemble de relations dites relations d'accessibilité.
  Si $u\, R_i\, v$ alors le monde v est accessible à partir de u pour i[1].

Les propriétés (transitivité, réflexivité, symétrie ou antisymétrie) des relations R_i jouent un rôle.

$\mathcal{I}_{\mathcal{M}}$ doit satisfaire des propriétés de compatibilité avec les R_i.

[1] On verra plus tard ce que ça signifie.

Les modèles de Kripke (cas propositionnelle)

1. Il n'y a qu'une relation notée $\leq_{\mathcal{M}}$, qui est un ordre, c'est à dire réflexive, antisymétrique et transitive.
2. $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}$ est dirigé, c'est à dire que
   pour toute variable propositionnelle p,
   si $u \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p)$ et $u \leq_{\mathcal{M}} v$ alors $v \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p)$.

Forçage

On définit sur $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ une relation dite de forçage ou réalisabilité qui s'écrit :

- $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$
- ou $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$
- ou $u \Vdash \varphi$ s'il n'y a pas d'ambiguïtés sur $\mathcal{M}$.

Forçage

On définit sur $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ une relation dite de forçage ou réalisabilité qui s'écrit :

- $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$
- ou $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$
- ou $u \Vdash \varphi$ s'il n'y a pas d'ambiguïtés sur $\mathcal{M}$.

Le forçage se définit par induction sur la structure des propositions.

Forçage

1. Si φ est une variable p :

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad u \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p)$$

Forçage

1. Si φ est une variable p :

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad u \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p)$$

2. Si φ est une conjonction $\psi \wedge \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{et} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

Forçage

1. Si φ est une variable p :

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad u \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p)$$

2. Si φ est une conjonction $\psi \wedge \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{et} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

3. Si φ est une disjonction $\psi \vee \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

Forçage

1. Si φ est une variable p :

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad u \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p)$$

2. Si φ est une conjonction $\psi \wedge \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{et} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

3. Si φ est une disjonction $\psi \vee \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

4. Si φ est une implication $\psi \Rightarrow \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$$

ssi

$$\text{pour tout } v \geq_M u \ \text{ si } \ \mathcal{M}, v \Vdash \psi \ \text{ alors } \ \mathcal{M}, v \Vdash \theta$$

Forçage

1. Si φ est une variable p :

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad u \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p)$$

2. Si φ est une conjonction $\psi \wedge \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{et} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

3. Si φ est une disjonction $\psi \vee \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

4. Si φ est une implication $\psi \Rightarrow \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$$

$$\text{ssi}$$

$$\text{pour tout } v \geq_M u \text{ si } \mathcal{M}, v \Vdash \psi \text{ alors } \mathcal{M}, v \Vdash \theta$$

5. Si $\perp$ est l'absurde, alors $\mathcal{M}, u \nVdash \perp$.

Monotonicité du forçage

Proposition

$\Vdash_{\mathcal{M}}$ est monotone.

Si $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ et $u \leq_{\mathcal{M}} v$ alors $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$

Monotonicité du forçage

Proposition

$\Vdash_{\mathcal{M}}$ est monotone.

Si $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ et $u \leq_{\mathcal{M}} v$ alors $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$

En exercice !

Monotonicité du forçage

Proposition

$\Vdash_{\mathcal{M}}$ est monotone.

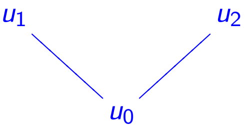
Si $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ et $u \leq_{\mathcal{M}} v$ alors $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$

En exercice !

Donc pour tout φ, l'ensemble $\{u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \mid u \Vdash \varphi\}$ est dirigé.

Exercice

Soit le modèle de Kripke $\mathcal{A}$:



où $u_0 \Vdash p$ et $u_1 \Vdash q$.

1. Donnez les valeurs de $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ pour p et q.
2. Annotez les mondes qui forcent $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$

Quelques définitions

1. $\mathcal{M} \vDash \varphi$ ($\mathcal{M}$ modélise φ, φ est valide dans $\mathcal{M}$)
   si pour tout $u \in \mathcal{M}$, on a $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$.

Quelques définitions

1. $\mathcal{M} \vDash \varphi$ ($\mathcal{M}$ modélise φ, φ est valide dans $\mathcal{M}$)
   si pour tout $u \in \mathcal{M}$, on a $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$.

2. $\vDash \varphi$, (φ est valide),
   si pour tout modèle de Kripke $\mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \vDash \varphi$.

Théorème de correction

Si $\vdash \varphi$ alors $\models \varphi$.

On va prouver un lemme, pour lequel on a besoin d'une définition.

Définition : $\Gamma \models \varphi$ où $\Gamma \equiv \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$
signifie que pour tout modèle $\mathcal{M}$ et tout $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$,

$$u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_1, ..., u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_n \text{ implique } u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi.$$

Lemme

Si $\Gamma \vdash \varphi$ alors $\Gamma \models \varphi$.

La démonstration se fait par induction sur la structure de l'arbre de preuve de $\Gamma \vdash \varphi$.
On fixe le modèle $\mathcal{M}$ dans la preuve.
On suppose que pour tout u, on a $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_1, \ldots, u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_n$.
On cherche à montrer que $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$.

Lemme

Si $\Gamma \vdash \varphi$ alors $\Gamma \models \varphi$.

La démonstration se fait par induction sur la structure de l'arbre de preuve de $\Gamma \vdash \varphi$.

On fixe le modèle $\mathcal{M}$ dans la preuve.

On suppose que pour tout u, on a $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_1, \ldots, u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_n$.

On cherche à montrer que $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$.

- L'arbre est réduit à une feuille. Alors $\varphi \in \Gamma$ et comme $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_1, \ldots, u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_n$, on a $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$

Si $\Gamma \vdash \varphi$ alors $\Gamma \models \varphi$.

- Le nœud de la racine est la règle $\Rightarrow$I et donc le jugement est $\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \theta$.
  Par induction il existe un arbre de preuve pour $\Gamma, \psi \vdash \theta$.
  L'hypothèse d'induction nous dit que pour n'importe quel monde w tel que $w \Vdash \varphi_1, \ldots, w \Vdash \varphi_n, w \Vdash \psi$
  on a $w \Vdash \theta$.
  Considérons maintenant un monde u tel que $u \Vdash \varphi_1, \ldots, u \Vdash \varphi_n$. Si v est monde tel que $u \leq_{\mathcal{M}} v$ et $v \Vdash \psi$.
  Par monotonicité, $v \Vdash \varphi_1, \ldots, v \Vdash \varphi_n$.
  On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à v et l'on a $v \Vdash \theta$.
  Par la définition de $\Vdash$ sur $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \theta$ cela donne $u \Vdash \varphi$.

Si $\Gamma \vdash \varphi$ alors $\Gamma \models \varphi$.

- Le nœud de la racine est la règle $\Rightarrow$E
  On a donc deux arbres de preuve pour $\Gamma \vdash \psi$ et $\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \varphi$.
  Soit u tel que
  $$u \Vdash \varphi_1, \ldots, u \Vdash \varphi_n.$$
  alors par hypothèse d'induction d'une part $u \Vdash \psi$ d'autre part $u \Vdash \psi \Rightarrow \varphi$.
  Par définition de $u \Vdash \psi \Rightarrow \varphi$, on a $u \Vdash \varphi$.

Si $\Gamma \vdash \varphi$ alors $\Gamma \vDash \varphi$.

- Le nœud de la racine est la règle $\perp$.
  Si $u \Vdash \psi$ (pour tout $\psi \in \Gamma$) alors $u \Vdash \perp$, mais on sait que ça n'est pas possible, donc chaque fois qu'on a $u \Vdash \psi$ (pour tout $\psi \in \Gamma$), on aussi $u \Vdash \varphi$, donc $\Gamma \vDash \varphi$.

Si $\Gamma \vdash \varphi$ alors $\Gamma \models \varphi$.

- Le nœud de la racine est la règle $\vee I_g$ avec $\Gamma \vdash \theta \vee \chi$. L'hypothèse d'induction dit que pour tout $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$
  - si pour tout $\psi \in \Gamma$ on a $u \Vdash \psi$ alors $u \Vdash \theta$,

  donc aussi $u \Vdash \theta \vee \chi$.

Si $\Gamma \vdash \varphi$ alors $\Gamma \vDash \varphi$.

- Le nœud de la racine est la règle $\vee E$ avec comme prémisse
  $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$, $\quad \Gamma, \varphi \vdash \theta \quad$ et $\quad \Gamma, \psi \vdash \theta$
  et comme conclusion $\Gamma \vdash \theta$.
  Considérons les u qui satisfont $u \Vdash \chi$ pour $\chi \in \Gamma$.
  L'hypothèse d'induction nous dit que pour ces u, on doit avoir $u \Vdash \varphi \vee \psi$.
  Si de plus $u \Vdash \varphi$ alors $u \Vdash \theta$.
  Et si de plus $u \Vdash \psi$ alors $u \Vdash \theta$ aussi.
  Mais comme on sait que $u \Vdash \varphi$ ou $u \Vdash \psi$ alors dans tous les cas $u \Vdash \theta$.

Théorème de complétude

Si $\models \varphi$ alors $\vdash \varphi$.

Théorème de complétude

Si $\models \varphi$ alors $\vdash \varphi$.

On montre que

- si φ a un modèle infini si et seulement si φ a un modèle fini.

Théorème de complétude

Si $\models \varphi$ alors $\vdash \varphi$.

On montre que

- si φ a un modèle infini si et seulement si φ a un modèle fini.
- si $\not\models \varphi$ alors on peut construire un modèle de Kripke $\mathcal{K}$ tel que $\mathcal{K} \not\models \varphi$.

Théorème de complétude

Si $\models \varphi$ alors $\vdash \varphi$.

On montre que

- si φ a un modèle infini si et seulement si φ a un modèle fini.
- si $\nvdash \varphi$ alors on peut construire un modèle de Kripke $\mathcal{K}$ tel que $\mathcal{K} \nvDash \varphi$.

Théorème de complétude

Si $\models \varphi$ alors $\vdash \varphi$.

On montre que

- si φ a un modèle infini si et seulement si φ a un modèle fini.
- si $\nvdash \varphi$ alors on peut construire un modèle de Kripke $\mathcal{K}$ tel que $\mathcal{K} \nvDash \varphi$.
  Ce modèle est infini !