Introduction au lambda-calcul logique combinatoire

Pierre Lescanne

14 novembre 2005 – 14 : 26

La logique combinatoire

Il s'agit d'une structure algébrique avec trois opérateurs.

- Un opérateur binaire l'application,
- Deux constantes S et K.

$$M, N \quad ::= \quad \mathsf{S} \mid \mathsf{K} \mid x \mid M\ N$$

Forment les CL-termes.
Si M et P sont deux CL-termes on note l'application de M à P tout simplement par la concaténation soit $M\ P$.

La logique combinatoire

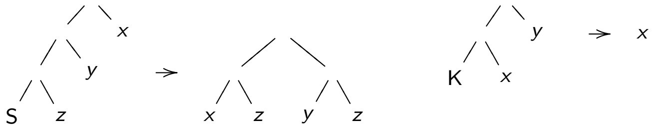
On définit deux règles de réduction

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{S}xyz & \xrightarrow[CL]{} & xz(yz) \\ \mathsf{K}xy & \xrightarrow[CL]{} & x \end{array}$$

La logique combinatoire

On définit deux règles de réduction

$$
\begin{array}{lcl}
\mathsf{S}xyz & \xrightarrow[CL]{} & xz(yz) \\
\mathsf{K}xy & \xrightarrow[CL]{} & x
\end{array}
$$



Quelques termes

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{SKK}x & \xrightarrow[CL]{} & \mathsf{K}x(\mathsf{K}x) \\ & \xrightarrow[CL]{} & x \end{array}$$

On appelle très naturellement ce terme I et on retient la règle

$$\mathsf{I}x \quad \underset{CL}{\twoheadrightarrow} \quad x$$

Quelques termes

On remarque que

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{SII}x & \xrightarrow[CL]{} & \mathsf{I}x(\mathsf{I}x) \\ & \xrightarrow[CL]{} & x\ x \end{array}$$

donc

$$\mathsf{SII}(\mathsf{SII}) \quad \overset{}{\underset{CL}{\twoheadrightarrow}} \quad \mathsf{SII}(\mathsf{SII})$$

SII correspond à ω et SII(SII) correspond à Ω.

Quelques termes

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{S}(\mathsf{KS})\mathsf{K}\ xyz & \xrightarrow[CL]{} & \mathsf{KS}x(\mathsf{K}x)yz \\
& \xrightarrow[CL]{} & \mathsf{S}(\mathsf{K}x)yz \\
& \xrightarrow[CL]{} & \mathsf{K}xz(yz) \\
& \xrightarrow[CL]{} & x(yz).
\end{array}
$$

Donc $\mathsf{S}(\mathsf{KS})\mathsf{K}$ équivaut à $\mathsf{B} \equiv \lambda xyz.x(yz)$.

Questions

Quel combinateur satisfait $\mathsf{F}xy \xrightarrow[CL]{} y$?

Que vaut

$$\mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK})?$$

Typage

On a tout d'abord :

$$\begin{array}{ll} \vdash & \mathsf{S} : (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma \\ \vdash & \mathsf{K} : \alpha \to \beta \to \alpha. \end{array}$$

Associé à la règle

$$\frac{\vdash M : \sigma \to \tau \qquad \vdash N : \sigma}{\vdash MN : \tau}\ (App)$$

on voit qu'on a une correspondance de Curry-Howard entre la logique combinatoire et la logique minimale à la Hilbert.

Typage

On a de plus

$$
\begin{array}{rcl}
 & \vdash & \mathsf{I} : \alpha \to \alpha \\
 & \vdash & \mathsf{B} : (\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \alpha) \to \gamma \to \beta, \\
x : \alpha \to \beta \to \gamma & \vdash & \mathsf{S}\ x : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma
\end{array}
$$

Des CL-termes vers les λ-termes

On peut donner une interprétation $[\![\_]\!]_\lambda$ des CL-termes vers les lambda-termes.

$$
\begin{array}{rcl}
[\![\mathsf{K}]\!]_\lambda & = & \lambda xy.x \\
[\![\mathsf{S}]\!]_\lambda & = & \lambda xyz.x\ z\ (y\ z) \\
[\![M_1\ M_2]\!]_\lambda & = & [\![M_1]\!]_\lambda\ [\![M_2]\!]_\lambda \\
[\![x]\!]_\lambda & = & x
\end{array}
$$

Des CL-termes vers les λ-termes

Cette interprétation préserve les types.
Autrement dit

> si M est un terme de preuve de σ dans la logique propositionnelle intuitionniste à la Hilbert,
>
> alors $[\![M]\!]_\lambda$ est un terme de preuve de σ dans la déduction naturelle pour la logique minimale.

Des CL-termes vers les λ-termes

Au niveau des preuves, cette traduction consiste à transformer une preuve à la Hilbert en une preuve en déduction naturelle en remplaçant les utilisations des axiomes Hilbert_S et Hilbert_K par leur preuve en déduction naturelle.

On n'obtient pas une preuve minimum !

Abstractions dans les CL-termes

On définit une opération d'abstraction $[x].M$ sur les CL-termes de la façon suivante
Si $x \notin FV(M)$ alors

$$[x].M \quad = \quad \mathsf{K} M$$

sinon

$$\begin{aligned} [x].(M_1 \ M_2) &= \mathsf{S}\ ([x].M_1)\ ([x].M_2) \\ [x].x &= \mathsf{I} \end{aligned}$$

Abstractions dans les CL-termes

Par exemple,

$$
\begin{array}{rcl}
[x].\mathsf{K} & = & \mathsf{K}\ \mathsf{K} \\
[x].\mathsf{S}\ x & = & \mathsf{S}\ ([x].\mathsf{S})\ ([x].x) \\
 & = & \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \mathsf{I} \\
[x].[y].x & = & [x].\mathsf{K}x \\
 & = & \mathsf{S}\ ([x].\mathsf{K})\ ([x].x) \\
 & = & \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}
\end{array}
$$

Abstractions dans les CL-termes

$$
\begin{array}{rcl}
[x].[y].\mathsf{K}\ x\ y & = & [x].\mathsf{S}\ ([y].(\mathsf{K}\ x))\ ([y].y) \\
& = & [x].\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ (\mathsf{K}\ x))\ \mathsf{I} \\
& = & \mathsf{S}\ ([x].\mathsf{S})\ ([x].(\mathsf{K}\ (\mathsf{K}\ x))\ \mathsf{I}) \\
& = & \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ ([x].(\mathsf{K}\ (\mathsf{K}\ x)))\ ([x].\mathsf{I})) \\
& = & \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{S}([x].\mathsf{K})\ ([x].(\mathsf{K}\ x))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I}) \\
& = & \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{S}(\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ (\mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}))\ (\mathsf{K}\ \mathsf{I})
\end{array}
$$

Typage des abstractions

$\boxed{\text{Si } x : \sigma, \Gamma \vdash M : \tau \text{ alors } \Gamma \vdash [x].M : \sigma \to \tau.}$

Par induction sur la structure de M.

- si $x \notin FV(M)$ alors $\Gamma \vdash \mathsf{K} M : \sigma \to \tau$ pour n'importe quel σ.
- si $x \in FV(M)$ et $M \equiv M_1 \; M_2$ alors par induction $x : \sigma, \Gamma \vdash M_1 : \rho \to \tau$ et $x : \sigma, \Gamma \vdash M_1 : \rho$ et $\Gamma \vdash [x].M_1 : \sigma \to \rho \to \tau$ et $\Gamma \vdash [x].M_2 : \sigma \to \rho$. On prend $\mathsf{S} : (\sigma \to \rho \to \tau) \to (\sigma \to \rho) \to \sigma \to \tau$. Par conséquent $\Gamma \vdash \mathsf{S} \; [x].M_1 \; [x].M_2 : \sigma \to \tau$. C. Q. F. D.
- si $x \in FV(M)$ et $M \equiv x$ alors $\Gamma \vdash \mathsf{I} : \sigma \to \sigma$.

Réduction

$$\boxed{([x].M)\ N \xrightarrow[CL]{} M[x := N]}$$

Démonstration : Par induction sur la définition de $[x].M$.

- si $x \notin FV(M)$ alors

$$\begin{array}{rcl} ([x].M)\ N & \equiv & \mathsf{K}\ M\ N \\ & = & M = M[x := N]. \end{array}$$

- si $x \in FV(M)$ et $M \equiv x$ alors $[x].M \equiv I$ et $([x].M)\ N = N = x[x := N]$.

Réduction

$$\boxed{([x].M)\ N \xrightarrow[CL]{} M[x := N]}$$

- si $x \in FV(M)$ et $M \equiv M_1\ M_2$ alors par induction

$$
\begin{array}{rcl}
([x].M_1\ M_2)\ N & = & \mathsf{S}\ ([x].M_1)\ ([x].M_2)\ N \\
& \xrightarrow[CL]{} & (([x].M_1)\ N)\ (([x].M_2)\ N) \\
& = & M_1[x := N]\ M_2[x := N] \\
& = & (M_1\ M_2)[x := N].
\end{array}
$$

Des λ-termes vers les CL-termes

On peut donner une interprétation $[\![\_]\!]_{CL}$ des lambda-termes vers les CL-termes.

$$
\begin{array}{rcl}
[\![\lambda x.M]\!]_{CL} & = & [x].[\![M]\!]_{CL} \\
[\![M_1\ M_2]\!]_{CL} & = & [\![M_1]\!]_{CL}\ [\![M_2]\!]_{CL} \\
[\![x]\!]_{CL} & = & x
\end{array}
$$

On a $M \xrightarrow[\beta]{} N$ implique $[\![M]\!]_{CL} \xrightarrow[CL]{} [\![N]\!]_{CL}$.

Des λ-termes vers les CL-termes

Cette interprétation préserve les types.
Autrement dit

> si M est un terme de preuve de σ dans la déduction naturelle de la logique propositionnelle intuitionniste
>
> alors $[\![M]\!]_\lambda$ est un terme de preuve de σ dans la logique propositionnelle intuitionniste à la Hilbert.

Des λ-termes vers les CL-termes

La taille de $[\![M]\!]_{CL}$ est en $O(3^n)$ où n est la taille de M.
Clairement, $[\![[\![M]\!]_{\lambda}]\!]_{CL}$ n'est pas en général égal à M.