Introduction au lambda-calcul

Pierre Lescanne

17 octobre 2005 – 16 : 03

Propriété du losange

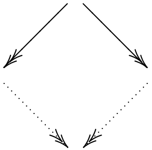
$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\
N_1 & & N_2
\end{tikzcd}
\quad \Longrightarrow \exists P \quad
\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[dr, "R"] & & N_2 \arrow[dl, "R"'] \\
 & P &
\end{tikzcd}
$$

Confluence

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, two heads, "R"'] \arrow[dr, two heads, "R"] & \\ N_1 & & N_2 \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \exists P \quad \begin{tikzcd} N_1 \arrow[dr, two heads, "R"] & & N_2 \arrow[dl, two heads, "R"'] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Remarques

1. $\xrightarrow[R]{}$ est confluente si $\overset{}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}}$ a la propriété du losange.
2. Parfois on note la confluence :



où $\cdots\cdots\twoheadrightarrow$ est un flèche existentielle.

Confluence et convertibilité

Théorème (Church-Rosser) :

Si R est confluente alors
$M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N \Longleftrightarrow \exists P(M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P)$.

Si R est confluente alors
$M \overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}} N \Longleftrightarrow \exists P(M \overset{*}{\underset{R}{\longrightarrow}} P \wedge N \overset{*}{\underset{R}{\longrightarrow}} P).$

Démonstration : $\Longleftarrow$ est évident car $\overset{*}{\underset{R}{\longrightarrow}} \subseteq \overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}}$ et $\overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}}$ est symétrique et transitive.

> Si R est confluente alors
> $M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N \Longleftrightarrow \exists P (M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P)$.

Démonstration : $\Longrightarrow$. Par induction sur le nombre de «pics» dans $M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N$. Soit

$$M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_i \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots$$
$$\ldots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$$

- si $n = 0$ alors $M \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$ ou $M \underset{R}{\twoheadrightarrow} N$.

Si R est confluente alors
$M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N \Longleftrightarrow \exists P(M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P)$.

Démonstration : $\Longrightarrow$.

- si $n \neq 0$, par confluence, dans

  $$M \underset{R}{\overset{+}{\twoheadleftarrow}} M_1 \underset{R}{\overset{+}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots N_{n-1} \underset{R}{\overset{+}{\twoheadleftarrow}} M_n \underset{R}{\overset{+}{\twoheadrightarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$$

  il existe M'_n tel que

  $$N_{n-1} \underset{R}{\overset{+}{\twoheadrightarrow}} M'_n \underset{R}{\overset{+}{\twoheadleftarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$$

  et

  $$M \underset{R}{\overset{+}{\twoheadleftarrow}} M_1 \underset{R}{\overset{+}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots \underset{R}{\overset{+}{\twoheadleftarrow}} M_i \underset{R}{\overset{+}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots$$

  $$\ldots N_{n-1} \underset{R}{\overset{+}{\twoheadrightarrow}} M'_n \underset{R}{\overset{+}{\twoheadleftarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$$

  a un pic de moins, donc on a le résultat par induction.

Confluence et convertibilité

Corollaire : Si R est confluente

1. Si N est une forme normale de M alors $M \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\rightarrow N$.
2. Un terme a au plus une forme normale.

Confluence de $\longrightarrow_\beta$

Théorème :

$\boxed{\xrightarrow[\beta]{} \text{ est confluent}}$

Remarques préliminaires

- Si $\xrightarrow[R]{}$ a la propriété du losange, alors $\xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\!\to$ a la propriété du losange.
- $\xrightarrow[\beta]{}$ n'a pas la propriété du losange. Pourquoi ?
- Il faut donc trouver une relation $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\Vert\;\;$ telle que
  - o $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\Vert\;\;$ a la propriété du losange,
  - o $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\Vert\!\!\twoheadrightarrow = \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow$,
    - + donc $\xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow$ a la propriété du losange,
    - + ce qui signifie que $\xrightarrow[\beta]{}$ est confluente.

Lemme de substitution

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } x \notin FV(L) \text{ alors} \\ M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]\end{array}}$

Si $x \notin FV(L)$ alors
$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$

Démonstration : Par induction sur la structure de M.

M est une variable

- $M \equiv x$, les deux côtés valent $N[y := L]$,
- $M \equiv y$, les deux côtés valent L,
- $M \equiv z$, les deux côtés valent z,

Si $x \notin FV(L)$ alors
$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$

Démonstration : Par induction sur la structure de M.
M est une abstraction $M \equiv \lambda z.M_1$.

$$\begin{array}{rcll}
M[x := N][y := L] & \equiv & (\lambda z.M_1)[x := N][y := L] & \\
& \equiv & \lambda z.(M_1[x := N][y := L]) & \text{(par définition)} \\
& \equiv & \lambda z.(M_1[y := L][x := N[y := L]]) & \text{(par induction)} \\
& \equiv & (\lambda z.M_1)[y := L][x := N[y := L]] & \text{(par définition)}
\end{array}$$

M est une application facile.

Définition de la réduction parallèle

(réflexivité) $\quad M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\!\!> M$

(APP-congruence) $\quad \dfrac{M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\!\!> M' \qquad N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\!\!> N'}{MN \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\!\!> M'N'}$

(ABS-congruence) $\quad \dfrac{M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\!\!> M'}{\lambda x.M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\!\!> \lambda x.M'}$

(β-parallèle) $\quad \dfrac{M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\!\!> M' \qquad N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\!\!> N'}{(\lambda x.M)N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\!\!> M'[x := N']}$

Trois résultats

1. Si $M \xrightarrow[\beta]{} M'$ alors $M \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\|\!\!\;\;\;} M'$

   c'est-à-dire $\xrightarrow[\beta]{} \;\subseteq\; \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\|\!\!\;\;\;}$

2. Si $M \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\|\!\!\;\;\;} M'$ alors $M \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\!\!\to M'$

   c'est-à-dire $\mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\|\!\!\;\;\;} \;\subseteq\; \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\!\!\to$

3. Si $M \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\|\!\!\;\;\;} M'$ et $N \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\|\!\!\;\;\;} N'$ alors

   $M[x := N] \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\|\!\!\;\;\;} M'[x := N']$

En exercice.

Une propriété plus forte

On prouve une propriété plus forte (due à M. Takahashi) que la propriété du losange pour $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\shortparallel\!\!\!\!>$:

$$M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\shortparallel\!\!\!\!> N \Longrightarrow N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\shortparallel\!\!\!\!> M^* \qquad (*)$$

où M^* est un terme déterminé par M mais indépendant de N.

Une propriété plus forte

On prouve une propriété plus forte
que la propriété du losange pour $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel\!\!\!\!>$:

$$M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel\!\!\!\!> N \Longrightarrow N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel\!\!\!\!> M^* \qquad (*)$$

où M^* est un terme déterminé par M mais indépendant de N.
Intuitivement M^* est le terme obtenu à partir de M en contractant tous ses redex simultanément.

Le définition de M^*

1. $x^* \equiv x$
2. $(\lambda x.M)^* \equiv \lambda x.M^*$
3. $(M_1 M_2)^* \equiv M_1^* M_2^*$ si $M_1 M_2$ n'est pas un redex.
4. $((\lambda x.M_1) M_2)^* \equiv M_1^*[x := M_2^*]$

Exercices

Calculer

1. $((\lambda x.x)\ ((\lambda yzu.y\ (z\ u))\ abc))^*$
2. $((\lambda x.x\ x)\ (\lambda y.y\ y))^*$

$$\boxed{M \mathrel{-\!\!\!\|\!\!\!\rightarrow} N \Longrightarrow N \mathrel{-\!\!\!\|\!\!\!\rightarrow} M^*.}$$

Les cas correspondant aux parties 1., 2. et 3. de la définition M^* sont laissés en exercice.

$$\boxed{M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\;\,\parallel\quad\; N \Longrightarrow N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\;\,\parallel\quad\; M^*.}$$

Si $M \equiv ((\lambda x.M_1)M_2) \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\;\,\parallel\quad\; N$, alors deux cas pour N,

- $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$
- $N \equiv N_1[x := N_2]$

dans les deux cas, il y a des N_i (i=1 ou i=2) tels que $M_i \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\;\,\parallel\quad\; N_i$.

Par induction, $N_i \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\;\,\parallel\quad\; M_i^*$.
Pour chaque cas :

- Si $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$ alors $N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\;\,\parallel\quad\; M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$.
- Si $N \equiv N_1[x := N_2]$,alors nous avons $N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\;\,\parallel\quad\; M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$, par le résultat 3.

Résumons

De la propriété (*) pour $\mathrel{-\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}$

on déduit la propriété du losange pour $\mathrel{-\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}$

de laquelle on déduit la propriété du losange pour $\mathrel{-\!\!\!\|\!\!\!\!\twoheadrightarrow}$
de laquelle on déduit la propriété du losange pour $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$

parce que $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \; = \; \mathrel{-\!\!\!\|\!\!\!\!\twoheadrightarrow}$,

qui est la confluence de $\xrightarrow[\beta]{}$.

Donc $\xrightarrow[\beta]{}$ est confluent.

C.q.f.d.