La Déduction naturelle

Pierre Lescanne

10 octobre 2005 – 12 : 57

Qu'est-ce que la déduction naturelle ?

En déduction naturelle, on raisonne avec des hypothèses.

Qu'est-ce que la déduction naturelle ?

En déduction naturelle, on raisonne avec des hypothèses.

- On peut faire une hypothèse à laquelle on peut donner le nom h.

Qu'est-ce que la déduction naturelle ?

En déduction naturelle, on raisonne avec des hypothèses.

- On peut faire une hypothèse à laquelle on peut donner le nom h.
  Typiquement on dit
  «posons l'hypothèse ψ que j'appelle h».

Qu'est-ce que la déduction naturelle ?

En déduction naturelle, on raisonne avec des hypothèses.

- On peut faire une hypothèse à laquelle on peut donner le nom h.
  Typiquement on dit
  «posons l'hypothèse ψ que j'appelle h».
- Puis on déroule le raisonnement, jusqu'à un certain point où on a prouvé φ.

Qu'est-ce que la déduction naturelle ?

En déduction naturelle, on raisonne avec des hypothèses.

- On peut faire une hypothèse à laquelle on peut donner le nom *h*.
  Typiquement on dit
  «posons l'hypothèse ψ que j'appelle *h*».
- Puis on déroule le raisonnement, jusqu'à un certain point où on a prouvé φ.
- A ce point, on peut «annuler» l'hypothèse et continuer avec la proposition $\psi \Rightarrow \varphi$.

Qu'est-ce que la déduction naturelle ?

En déduction naturelle, on raisonne avec des hypothèses.

- On peut faire une hypothèse à laquelle on peut donner le nom *h*.
  Typiquement on dit
  «posons l'hypothèse ψ que j'appelle *h*».
- Puis on déroule le raisonnement, jusqu'à un certain point où on a prouvé φ.
- A ce point, on peut «annuler» l'hypothèse et continuer avec la proposition $\psi \Rightarrow \varphi$.
  On dit que l'on a déchargé l'hypothèse *h*.

La présentation à la Gentzen-Prawitz

Gentzen et *Prawitz* présentent la déduction naturelle par un arbre.

Dans leur approche, on dispose les hypothèses aux feuilles

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : \varphi_1}{\ldots} \qquad \dfrac{h_2 : \varphi_2}{\ldots}}{}\,(foo_1) \qquad \dfrac{\dfrac{h_3 : \varphi_3}{\ldots}}{\ldots}\,(bar)}{\ldots}\,(foo_2) \qquad \dfrac{h_4 : \varphi_4}{\ldots}}{\varphi}\,(foo_1)$$

La présentation à la Gentzen-Prawitz

A certains moments dans une preuve, on supprime une ou des hypothèses au moment d'utiliser une règle.

Par exemple, on remplace une proposition ψ par $\varphi \Rightarrow \psi$ et on coche l'hypothèse $h : \varphi$ comme ayant été utilisée. On a déchargé l'hypothèse h.

Cela donne $\cancel{h} : \varphi$.

La présentation à la Gentzen-Prawitz

A certains moments dans une preuve, on supprime une ou des hypothèses au moment d'utiliser une règle.

Par exemple, on remplace une proposition ψ par $\varphi \Rightarrow \psi$ et on coche l'hypothèse $h : \varphi$ comme ayant été utilisée. On a déchargé l'hypothèse h.

Cela donne $\cancel{h} : \varphi$.

Une preuve est complète quand toutes les hypothèses ont été déchargées.

La présentation à la Gentzen-Prawitz

L'hypothèse h_1 est barrée parce qu'elle est déchargée.

La présentation à la Gentzen-Prawitz

L'hypothèse h_1 est barrée parce qu'elle est déchargée.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : \varphi_1}{\cdots} \quad \dfrac{h_2 : \varphi_2}{\cdots}}{}\,(\mathit{foo}_1) \qquad \dfrac{\dfrac{h_3 : \varphi_3}{\cdots}}{\cdots}\,(\mathit{bar})}{\cdots}\,(\mathit{foo}_2) \qquad \dfrac{h_4 : \varphi_4}{\cdots}}{\varphi}\,(\mathit{foo}_1)$$

La présentation à la Gentzen-Prawitz

L'hypothèse h_1 est barrée parce qu'elle est déchargée.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{h_1} : \varphi_1}{\dots} \quad \dfrac{h_2 : \varphi_2}{\dots}}{}\,(foo_1) \quad \dfrac{\dfrac{h_3 : \varphi_3}{\dots}}{\dots}\,(bar)}{\dots}\,(foo_2) \qquad \dfrac{h_4 : \varphi_4}{\dots}}{\varphi}\,(foo_1)}{\psi \Rightarrow \varphi}
$$

Les séquents naturels

Quitte à être un peu plus lourd, on garde les hypothèse à coté de la proposition, pour former un séquent naturel.
Au lieu du séquent $\vdash \varphi$, on utilise le séquent $\Gamma \vdash \varphi$ où

- Γ est un ensemble de propositions appelé l'antécédent, qui sont les hypothèses.
- On écrit $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ au lieu de $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$
  et $\vdash \varphi$ quand l'ensemble des hypothèses est vide.
- $\Gamma \vdash \varphi$ se lit
  - «de Γ on déduit φ»
  - ou «Γ infère φ» ou «Γ induit φ»
  - ou «sous les hypothèses Γ on a φ».

Les théorèmes

Les théorèmes sont les séquents de la forme $\vdash \varphi$
qui peuvent être déduits des axiomes et des règles.
On les trouve donc à la racine d'un arbre de preuve.

Les théorèmes

Les théorèmes sont les séquents de la forme $\vdash \varphi$
qui peuvent être déduits des axiomes et des règles.
On les trouve donc à la racine d'un arbre de preuve.

Un théorème est obtenu
quand toutes les hypothèses ont été déchargées.

L'axiome

Il n'y a qu'un seul axiome :

Axiome

$$\Gamma, \varphi \vdash \varphi$$

Les règles

Il y a deux règles : introduction et élimination :

$$\Rightarrow I \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi}$$

$$\Rightarrow E \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Preuve de *Hilbert_K*

$$\Rightarrow I \quad \dfrac{\Rightarrow I \quad \dfrac{\varphi, \psi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \psi \Rightarrow \varphi}}{\vdash \varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi}$$

Preuve de *Hilbert_S*

Soit $A \equiv \varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, (\varphi \Rightarrow \psi), \varphi \vdash \varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi \quad A, (\varphi \Rightarrow \psi), \varphi \vdash \varphi}{A, (\varphi \Rightarrow \psi), \varphi \vdash \psi \Rightarrow \chi} \quad \dfrac{A, (\varphi \Rightarrow \psi), \varphi \vdash \varphi \Rightarrow \psi \quad A, (\varphi \Rightarrow \psi), \varphi \vdash \varphi}{A, (\varphi \Rightarrow \psi), \varphi \vdash \psi}}{\dfrac{A, (\varphi \Rightarrow \psi), \varphi \vdash \chi}{\dfrac{A, (\varphi \Rightarrow \psi) \vdash \varphi \Rightarrow \chi}{A \vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi}}}}{\vdash (\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi}$$

Preuve de B

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{{\color{red}\Rightarrow E}\quad \cfrac{(\varphi \Rightarrow \psi),\ (\chi \Rightarrow \varphi), \chi \vdash \varphi \Rightarrow \psi \qquad \mathcal{D}}{(\varphi \Rightarrow \psi),\ (\chi \Rightarrow \varphi), \chi \vdash \psi}}{(\varphi \Rightarrow \psi),\ (\chi \Rightarrow \varphi) \vdash \chi \Rightarrow \psi}}{(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash (\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi \Rightarrow \psi}}{\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi \Rightarrow \psi}
$$

où $\mathcal{D}$ est

$$
{\color{red}\Rightarrow E}\quad \frac{(\varphi \Rightarrow \psi),\ (\chi \Rightarrow \varphi), \chi \vdash \chi \Rightarrow \varphi \qquad (\varphi \Rightarrow \psi),\ (\chi \Rightarrow \varphi), \chi \vdash \chi}{(\varphi \Rightarrow \psi),\ (\chi \Rightarrow \varphi), \chi \vdash \varphi}
$$

La preuve de B dans la présentation à la Prawitz

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{h : \varphi \Rightarrow \psi \qquad \cfrac{h' : \chi \Rightarrow \varphi \qquad h'' : \chi}{\varphi}}{\psi}\; h''}{\chi \Rightarrow \psi}\; h'}{(\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi \Rightarrow \psi}
$$

$$
\cfrac{(\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi \Rightarrow \psi}{(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi \Rightarrow \psi}\; h
$$

J'ai noté en bleu clair les hypothèses quand elles sont créées et en rouge quand elles ont été déchargées.

La preuve de B dans la présentation à la Prawitz

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{h} : \varphi \Rightarrow \psi \qquad \dfrac{\cancel{h'} : \chi \Rightarrow \varphi \qquad \cancel{h''} : \chi}{\varphi}}{\psi}\; {\color{red}h''}}{\chi \Rightarrow \psi}\; {\color{red}h'}}{(\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi \Rightarrow \psi}\; {\color{red}h}}{(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \chi \Rightarrow \psi}
$$

On coche les hypothèses pour s'assurer qu'elles ont bien toutes été déchargées.

Pour passer d'une preuve à la Hilbert à une preuve en déduction naturelle.

On remplace les invocations de *Hilbert_K* et *Hilbert_S* par leurs preuves.

Les preuves sont plus longues.

Preuve de $\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$

La preuve en déduction naturelle de $\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$ est

$$\dfrac{\dfrac{\psi, \varphi \vdash \varphi}{\psi \vdash \varphi \Rightarrow \varphi}}{\vdash \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi}$$

Preuve de $\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$

Alors que la preuve déduite de la preuve à la Hilbert est

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\varphi \Rightarrow \varphi), \psi, \varphi \vdash \varphi}{(\varphi \Rightarrow \varphi) \vdash \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi}}{\vdash (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi} \qquad \dfrac{\mathcal{D} \qquad \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi}{\vdash \varphi \Rightarrow \varphi}}{\vdash \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi}$$

où $\mathcal{D}$ est

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}'}{(\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi, (\varphi \Rightarrow \varphi) \vdash \varphi}{\varphi \vdash (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi}}{\vdash \varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi}}{\vdash (\varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi}$$

Preuve de $\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$

et $\mathcal{D}'$ est l'arbre de la preuve de *Hilbert_S* où l'on a substitué les variables de la façon suivante :

$$
\begin{array}{lcl}
\varphi & := & \varphi \\
\psi & := & \varphi \Rightarrow \varphi \\
\chi & := & \varphi
\end{array}
$$

Preuve de $\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$

et $\mathcal{D}'$ est l'arbre de la preuve de *Hilbert_S* où l'on a substitué les variables de la façon suivante :

$$\begin{array}{lll} \varphi & := & \varphi \\ \psi & := & \varphi \Rightarrow \varphi \\ \chi & := & \varphi \end{array}$$

Exercice

1. *Dessiner l'arbre complet en déduction naturelle de la démonstration de* $\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$ *déduite de la preuve à la Hilbert.*
2. *Comparer cette preuve avec la preuve «naturelle».*

Les règles

Les règles sont deux types :

- règles d'introduction : un connecteur qui n'était pas présent apparaît dans la proposition conséquente sous la barre d'inférence.
- règles d'élimination : la proposition conséquente sous la barre d'inférence est construite en enlevant le connecteur principal d'un des connecteurs conséquents d'un séquent au dessus de la barre.

La syntaxe

Il y a trois nouveaux connecteurs $\perp$, $\wedge$ et $\vee$.

- $\perp$ est nullaire et représente l'absurde,
- $\wedge$ et $\vee$ sont bien connus et représentent la conjonction et la disjonction.

L'axiome pour $\perp$

Il n'y a qu'une règle et c'est une règle d'élimination :

$$\perp E \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Les règles du $\wedge$

Il y a une règle d'introduction et deux règles d'élimination.

Les règles du $\wedge$

Il y a une règle d'introduction et deux règles d'élimination.

$$\wedge I \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}$$

$$\wedge E_g \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad\qquad \wedge E_d \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Les règles du $\vee$

Il y a deux règles d'introduction et une règle d'élimination.

Les règles du $\vee$

Il y a deux règles d'introduction et une règle d'élimination.

$$\vee I_g \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \qquad\qquad \vee I_d \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$$

$$\vee E \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \chi \qquad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}$$

Un exemple

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \lor \psi \vdash \varphi \lor \psi \qquad \dfrac{\varphi \lor \psi, \varphi \vdash \varphi}{\varphi \lor \psi, \varphi \vdash \psi \lor \varphi}\,{\color{red}\lor I_d} \qquad \dfrac{\varphi \lor \psi, \psi \vdash \psi}{\varphi \lor \psi, \varphi \vdash \psi \lor \varphi}\,{\color{red}\lor I_g}}{\varphi \lor \psi \vdash \psi \lor \varphi}\,{\color{red}\lor E}}{\vdash \varphi \lor \psi \Rightarrow \psi \lor \varphi}\,{\color{red}\Rightarrow I}$$

Les hypothèses déchargées dans $\vee E$

Dans la règle

$$\vee E \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \qquad \Gamma, h_1 : \varphi \vdash \chi \qquad \Gamma, h_2 : \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}$$

Les hypothèses $h_1 : \varphi$ et $h_2 : \psi$ sont déchargées.

$\vee$ à la Gentzen-Prawitz

L'utilisation de $\vee E$ et des décharges apparaissent mieux sur un exemple.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\cancel{h}_1 : (\varphi \vee \psi) \vee \chi
\qquad
\dfrac{
\cancel{h}_2 : \varphi \vee \psi
\quad
\dfrac{\cancel{h}_3 : \varphi}{\varphi \vee (\psi \vee \chi)}\,{\color{red}\vee I_g}
\quad
\dfrac{\dfrac{\cancel{h}_4 : \psi}{\psi \vee \chi}\,{\color{red}\vee I_g}}{\varphi \vee (\psi \vee \chi)}\,{\color{red}\vee I_d}
}{\varphi \vee (\psi \vee \chi)}\,{\color{red}\vee E, h_3 \text{ et } h_4}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\cancel{h}_5 : \chi}{\psi \vee \chi}\,{\color{red}\vee I_d}}{\varphi \vee (\psi \vee \chi)}\,{\color{red}\vee}
}{\varphi \vee (\psi \vee \chi)}\,{\color{red}\vee}
}{(\varphi \vee \psi) \vee \chi \Rightarrow \varphi \vee (\psi \vee \chi)}\,{\color{red}\Rightarrow I \text{ et } h_1}
$$

$\lor$ à la Gentzen-Prawitz

L'utilisation de $\lor E$ et des décharges apparaissent mieux sur un exemple.

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{h_1} : (\varphi \lor \psi) \lor \chi \qquad \dfrac{\cancel{h_2} : \varphi \lor \psi \qquad \dfrac{\cancel{h_3} : \varphi}{\varphi \lor (\psi \lor \chi)}\lor I_g \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{h_4} : \psi}{\psi \lor \chi}\lor I_g}{\varphi \lor (\psi \lor \chi)}\lor I_d}{\varphi \lor (\psi \lor \chi)}\lor E, h_3 \text{ et } h_4 \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{h_5} : \chi}{\psi \lor \chi}\lor I_d}{\varphi \lor (\psi \lor \chi)}\lor}{\varphi \lor (\psi \lor \chi)}\lor}{(\varphi \lor \psi) \lor \chi \Rightarrow \varphi \lor (\psi \lor \chi)}\Rightarrow I \text{ et } h_1$$

Exercice

Faire la même démonstration en utilisant des séquents naturels.