Introduction au calcul des prédicats du premier ordre

Pierre Lescanne

1er décembre 2005 – 19 : 05

Structures

Une structure est un quadruplet $\mathfrak{A} = \langle A, \mathbf{P}, \mathbf{F}, \{c_i \in I\}\rangle$ où

- A est un ensemble non vide (le support ou l'univers de la structure),
- $\mathbf{P}$ est un n-uple $P_1, \ldots, P_n$ de prédicats,
- $\mathbf{F}$ est un m-uple $F_1, \ldots, F_m$ de fonctions totales,
- les c_i sont des éléments de A (les constantes).

Exemples

Example

- $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, ^{-1}, 0, 1 \rangle$ *est le corps des réels,*
- $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ *est l'ensemble ordonné des naturels.*

Le type de similarité

Le type de similarité d'une structure $\mathfrak{A} = \langle A, R_1, \ldots R_n, F_1, \ldots, F_m, \{c_i \in I\}\rangle$ est la suite $\langle r_1, \ldots, r_n; a_1, \ldots, a_m, \kappa\rangle$ où

- $R_i \subseteq A^{r_i}$,
- $F_j : A^{a_j} \longrightarrow A$,
- $\kappa = |\{c_i \in I\}|$ (le cardinal de I).

Le type de similarité

Le type de similarité d'une structure $\mathfrak{A} = \langle A, R_1, \ldots R_n, F_1, \ldots, F_m, \{c_i \in I\}\rangle$ est la suite $\langle r_1, \ldots, r_n; a_1, \ldots, a_m, \kappa\rangle$ où

- $R_i \subseteq A^{r_i}$,
- $F_j : A^{a_j} \rightarrow A$,
- $\kappa = |\{c_i \in I\}|$ (le cardinal de I).

Chaque structure contient la relation binaire d'identité qui est notée $=$.

Exemples

Example

- $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, ^{-1}, 0, 1 \rangle$ *a pour type de similarité* $\langle -; 2, 2, 1; 2 \rangle$,
- $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ *a pour type de similarité* $\langle 2; -; 0 \rangle$.

La syntaxe

Supposons que l'on a un langage de type de similarité $\langle r_1, \ldots, r_n; a_1, \ldots, a_m; \kappa \rangle$.
Les entités syntaxiques sont

1. les symboles de prédicats $R_1, \ldots, R_n, Q, R, \doteq$,
2. les symboles de fonctions $f_1, \ldots, f_m$,
3. les symboles de constantes $\bar{c}_i$ pour $i \in I$,
4. les variables $x_0, x_1, x_2, \ldots$
5. les connecteurs $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \perp, \forall, \exists$

La syntaxe

Les termes sont

$$t, t' \quad ::= \quad \bar{c}_i \mid x_j \mid f(t, \ldots, t)$$

Les formules sont

$$\begin{aligned} \varphi, \psi \quad ::= \quad & \bot \mid P(t, \ldots, t) \mid t \doteq t' \\ & \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \Rightarrow \psi \mid \varphi \Leftrightarrow \psi \mid \neg\varphi \mid (\forall x_i)\varphi \mid (\exists x_i)\varphi \end{aligned}$$

La syntaxe

Les termes sont

$$t, t' \quad ::= \quad \bar{c}_i \mid x_j \mid f(t, \ldots, t)$$

Les formules sont

$$\begin{aligned} \varphi, \psi \quad ::= \quad & \bot \mid P(t, \ldots, t) \mid t \doteq t' \qquad\qquad \text{Les atomes} \\ & \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \Rightarrow \psi \mid \varphi \Leftrightarrow \psi \mid \neg\varphi \mid (\forall x_i)\varphi \mid (\exists x_i)\varphi \end{aligned}$$

La syntaxe

Les notions de variables libres, de variables liées, de formules closes sont les mêmes qu'en lambda-calcul, sauf qu'ici les lieurs sont $\forall$ et $\exists$.

La syntaxe

Les notions de variables libres, de variables liées, de formules closes sont les mêmes qu'en lambda-calcul, sauf qu'ici les lieurs sont $\forall$ et $\exists$.

Les formules closes sont appelées des phrases ou des sentences.

Parenthèses et priorités

Les conventions sur les parenthèses sont les suivantes.

- On omet les parenthèses les plus externes.
- On enlève les parenthèses dans les négations.
- $\vee$ et $\wedge$ ont priorité sur $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.
- $\neg$ a priorité sur tout autre opérateur.
- On enlève les parenthèses autour des quantifications $\forall x$ et $\exists x$ chaque fois que c'est possible.
- Les quantificateurs ont priorité sur tous les connecteurs logiques.
- On fusionne les listes de quantificateurs identiques $\exists x_1 x_2 \forall x_3 x_4 x_5 \varphi$ au lieu de $\exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 \forall x_4 \forall x_5 \varphi$.

Le cas du signe $=$

On peut vouloir utiliser le symbole $=$ à la fois dans la théorie est la métathéorie. Pour faire la différence on emploie souvent

- $\equiv$ pour l'égalité syntaxique des expressions dans la métathéorie,
- $=$ comme symbole d'égalité dans la structure.
- et $\doteq$ comme symbole d'égalité du langage de la théorie,

Le cas du signe $=$

On peut vouloir utiliser le symbole $=$ à la fois dans la théorie est la métathéorie. Pour faire la différence on emploie souvent

- $\equiv$ pour l'égalité syntaxique des expressions dans la métathéorie,
- $=$ comme symbole d'égalité dans la structure.
- et $\doteq$ comme symbole d'égalité du langage de la théorie,

Nous accepterons l'utilisation de $=$ à la place de $\doteq$ quand il n'y aura pas de confusion possible.

Substitutions de termes dans les termes

- $x[x := t] \quad \equiv \quad t$
- $y[x := t] \quad \equiv \quad y$
- $\bar{c}[x := t] \quad \equiv \quad \bar{c}$
- $f(t_1, \ldots, t_p)[x := t] \equiv f(t_1[x := t], \ldots, t_p[x := t])$.

Substitutions de termes dans les formules

On applique la convention de Barendregt

- $\bot[x := t] \quad \equiv \quad \bot$
- $P[x := t] \quad \equiv \quad P$
- $(t_1 \doteq t_2)[x := t] \quad \equiv \quad (t_1[x := t] \doteq t_2[x := t]$
- $P(t_1, \ldots, t_p)[x := t] \equiv P(t_1[x := t], \ldots, t_p[x := t])$
- $(\varphi \Box \gamma)[x := t] \quad \equiv \quad \varphi[x := t] \Box \gamma[x := t]$
- $(\neg\varphi)[x := t] \quad \equiv \quad \neg(\varphi[x := t])$
- $(\forall y \varphi)[x := t] \quad \equiv \quad \forall y(\varphi[x := t])$
- $(\exists y \varphi)[x := t] \quad \equiv \quad \exists y(\varphi[x := t])$

Convention

Parfois pour mettre en évidence que x peut apparaître dans φ, on écrit $\varphi(x)$.

et au lieu de $\varphi(x)[x := t]$, on écrit alors $\varphi(t)$.

Le langage étendu

Le langage étendu $L(\mathfrak{A})$ de $\mathfrak{A}$ est obtenu en ajoutant au langage L du type de similarité de $\mathfrak{A}$ des symboles de constantes pour tous les éléments de A (le support de $\mathfrak{A}$).

Substitutions de formules dans les formules

La substitution de formules dans les formules n'est pas difficile,
pour qui connaît le λ-calcul.

Là aussi, il faut éviter les captures.

Les structures

La syntaxe

La sémantique

Quelques propriétés

La déduction naturelle

L'approche à la Hilbert

Un exemple

Considérons la structure $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, <, +, -, 0 \rangle$.
Le langage a son alphabet

- des symboles de prédicats $\doteq, L$,
- des symboles de fonctions P, M,
- des symboles de constantes $\overline{0}$.

$L(\mathfrak{Z})$ contient de plus un symbole de constante $\overline{m}$ pour chaque $m \in \mathbb{Z}$.

Interprétation des termes dans $\mathfrak{Z}$

L'interprétation $t^{\mathfrak{Z}}$ de chaque terme t de $L(\mathfrak{Z})$ est un élément de $\mathbb{Z}$.

termes$_{\mathfrak{Z}}$	$\mathbb{Z}$
t	$t^{\mathfrak{Z}}$
$\overline{m}$	m
$P(t_1, t_2)$	$t_1^{\mathfrak{Z}} + t_2^{\mathfrak{Z}}$
$M(t)$	$-t^{\mathfrak{Z}}$

Grosso modo, on interprète

- m par «son nombre»,
- P par plus
- et M par moins.

Interprétation des phrases dans $\mathfrak{Z}$

$$\begin{array}{lcl} [\![\bot]\!]_{\mathfrak{Z}} & = & 0 \\ [\![t \doteq s]\!]_{\mathfrak{Z}} & = & \begin{cases} 1 \text{ si } t^{\mathfrak{Z}} = s^{\mathfrak{Z}} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ [\![L(t,s)]\!]_{\mathfrak{Z}} & = & \begin{cases} 1 \text{ si } t^{\mathfrak{Z}} < s^{\mathfrak{Z}} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} [\![\varphi \wedge \psi]\!]_{\mathfrak{Z}} & = & min([\![\varphi]\!]_{\mathfrak{Z}}, [\![\psi]\!]_{\mathfrak{Z}}) \\ [\![\varphi \vee \psi]\!]_{\mathfrak{Z}} & = & max([\![\varphi]\!]_{\mathfrak{Z}}, [\![\psi]\!]_{\mathfrak{Z}}) \\ [\![\varphi \square \psi]\!]_{\mathfrak{Z}} & = & \textit{(comme d'habitude)} \\ [\![\forall x \varphi]\!]_{\mathfrak{Z}} & = & min\{[\![\varphi[x := \overline{n}]]\!]_{\mathfrak{Z}} \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ [\![\exists x \varphi]\!]_{\mathfrak{Z}} & = & max\{[\![\varphi[x := \overline{n}]]\!]_{\mathfrak{Z}} \mid n \in \mathbb{Z}\} \end{array}$$

Interprétation des phrases dans $\mathfrak{Z}$

On voit que $[\![\forall x \varphi]\!]_{\mathfrak{A}}$ prend la valeur 1 si toutes les instances de $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}}$ prennent la valeur 1.

C'est une généralisation de $\wedge$.

De même $[\![\exists x \varphi]\!]_{\mathfrak{A}}$ est une généralisation de $\vee$.

Quand il n'y aura pas de confusion on écrira $[\![\varphi]\!]$ au lieu de $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}}$.

Interprétation des termes

Considérons $\mathfrak{A} = \langle A, P_1, \ldots P_n, F_1, \ldots, F_m, \{c_i \in I\}\rangle$ de type de similarité $\langle r_1, \ldots, r_n; a_1, \ldots, a_m, |I|\rangle$

On définit la fonction $(\cdot)^{\mathfrak{A}}$: $\text{termes}_{\mathfrak{A}} \to A$

$$
\begin{array}{rcl}
\overline{c}_i^{\mathfrak{A}} & = & c_i \\
\overline{a}^{\mathfrak{A}} & = & a \\
(\overline{F_i}(t_1, \ldots t_p))^{\mathfrak{A}} & = & F_i(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_p^{\mathfrak{A}}).
\end{array}
$$

où $\overline{F_i}$ est le symbole correspondant à la fonction F_i et où $p = a_i$.

Interprétation des phrases

$$
\begin{array}{rcl}
[\![\bot]\!]_{\mathfrak{A}} & = & 0 \\
[\![\overline{R}]\!]_{\mathfrak{A}} & = & R \\
[\![\overline{R_i}(t_1, \ldots t_p)]\!]_{\mathfrak{A}} & = & \begin{cases} 1 \text{ si } \langle t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_p^{\mathfrak{A}} \rangle \in R_i & \text{où } p = r_i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\
[\![t_1 \doteq t_2]\!]_{\mathfrak{A}} & = & \begin{cases} 1 \text{ si } t_1^{\mathfrak{A}} = t_2^{\mathfrak{A}} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}
\end{array}
$$

Interprétation des phrases

$$
\begin{array}{rcl}
[\![\varphi \wedge \psi]\!]_{\mathfrak{A}} & = & \mathit{min}([\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}}, [\![\psi]\!]_{\mathfrak{A}}) \\
[\![\varphi \vee \psi]\!]_{\mathfrak{A}} & = & \mathit{max}([\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}}, [\![\psi]\!]_{\mathfrak{A}}) \\
[\![\varphi \Rightarrow \psi]\!]_{\mathfrak{A}} & = & \mathit{max}(1 - [\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}}, [\![\psi]\!]_{\mathfrak{A}}) \\
[\![\varphi \Leftrightarrow \psi]\!]_{\mathfrak{A}} & = & \begin{cases} 1 \text{ si } [\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![\psi]\!]_{\mathfrak{A}} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\
[\![\neg\varphi]\!]_{\mathfrak{A}} & = & 1 - [\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}}
\end{array}
$$

Interprétation des phrases

$$
\begin{array}{rcl}
[\![\forall x \varphi]\!]_{\mathfrak{A}} & = & min\{[\![\varphi[x := \overline{a}]]\!]_{\mathfrak{A}} \mid a \in A\} \\
[\![\exists x \varphi]\!]_{\mathfrak{A}} & = & max\{[\![\varphi[x := \overline{a}]]\!]_{\mathfrak{A}} \mid a \in A\}
\end{array}
$$

À partir de maintenant, nous supposerons que toutes les structures ont les mêmes types de similarité.

On écrira $\mathfrak{A} \models_K \varphi$ pour $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}} = 1$.

Cela se lira la structure $\mathfrak{A}$ valide la phrase φ

ou bien la phrase φ est valide dans la structure $\mathfrak{A}$

Interprétation des formules

Si $FV(\varphi) = \{z_1, \ldots z_k\}$, la clôture universelle de φ est

$$Cl(\varphi) = \forall z_1 \ldots z_k \varphi.$$

$\mathfrak{A} \models_K \varphi$ ssi $\mathfrak{A} \models_K Cl(\varphi)$.

Interprétation des formules

$\models_K \varphi$ ssi $\mathfrak{A} \models_K \varphi$ pour tout $\mathfrak{A}$ de type adéquat.

$\mathfrak{A} \models_K \Gamma$ ssi $\mathfrak{A} \models_K \psi$ pour tout $\psi \in \Gamma$,

$\Gamma \models_K \varphi$ ssi $\mathfrak{A} \models_K \Gamma$ implique $\mathfrak{A} \models_K \varphi$, si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ est constitué de phrases.

Interprétation des formules

Lemme

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{A} \models_K \varphi \wedge \psi & \textit{si et seulement si} & \mathfrak{A} \models_K \varphi \ \textit{ et } \ \mathfrak{A} \models_K \psi \\
\mathfrak{A} \models_K \varphi \vee \psi & \textit{si et seulement si} & \mathfrak{A} \models_K \varphi \ \textit{ ou } \ \mathfrak{A} \models_K \psi \\
\mathfrak{A} \models_K \neg\varphi & \textit{si et seulement si} & \mathfrak{A} \not\models \varphi \\
\mathfrak{A} \models_K \varphi \Rightarrow \psi & \textit{si et seulement si} & \mathfrak{A} \models_K \varphi \ \textit{ implique } \ \mathfrak{A} \models_K \psi \\
\mathfrak{A} \models_K \varphi \Leftrightarrow \psi & \textit{si et seulement si} & \mathfrak{A} \models_K \varphi \ \textit{ est équivalent à } \ \mathfrak{A} \models_K \psi \\
\mathfrak{A} \models_K \forall x \varphi & \textit{si et seulement si} & \mathfrak{A} \models_K \varphi[x := \overline{a}] \ \textit{pour tout } a \in A. \\
\mathfrak{A} \models_K \exists x \varphi & \textit{si et seulement si} & \mathfrak{A} \models_K \varphi[x := \overline{a}] \ \textit{pour un } a \in A.
\end{array}
$$

Interprétation des formules

Démonstration.
On le fait dans deux cas seulement.

$\mathfrak{A} \models_K \varphi \vee \psi$ équivaut à $\max([\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}}, [\![\psi]\!]_{\mathfrak{A}}) = 1$
ce qui équivaut à ce que $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}} = 1$ ou $[\![\psi]\!]_{\mathfrak{A}} = 1$
ce qui équivaut donc à $\mathfrak{A} \models_K \varphi$ ou $\mathfrak{A} \models_K \psi$.

$\mathfrak{A} \models_K \forall x \varphi$ équivaut à $\min\{[\![\varphi[x := \overline{a}]]\!]_{\mathfrak{A}} \mid a \in A\} = 1$
ce qui équivaut à ce que pour tout $a \in A$ on ait
$[\![\varphi[x := \overline{a}]]\!]_{\mathfrak{A}} = 1$
ce qui revient donc à ce que pour tout $a \in A$ on ait
$\mathfrak{A} \models_K \varphi[x := \overline{a}]$. $\square$

Quantificateurs et négations

$$\models_K \neg\forall x\varphi \Leftrightarrow \exists x\neg\varphi$$
$$\models_K \neg\exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\neg\varphi$$
$$\models_K \forall x\varphi \Leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$$
$$\models_K \exists x\varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$$

Permutation et oubli de quantificateurs

$\models_K \forall x \forall y \varphi \Leftrightarrow \forall y \forall x \varphi$
$\models_K \exists x \exists y \varphi \Leftrightarrow \exists y \exists x \varphi$
$\models_K \forall x \varphi \Leftrightarrow \varphi$ si $x \notin FV(\varphi)$
$\models_K \exists x \varphi \Leftrightarrow \varphi$ si $x \notin FV(\varphi)$

Formules prénexes

Une formule φ est en forme prénexe, on dit aussi que φ est prénexe,

si φ consiste en une suite (éventuellement vide) de quantificateurs suivie d'une formule sans quantificateurs.

Formules prénexes

Une formule φ est en forme prénexe, on dit aussi que φ est prénexe,

si φ consiste en une suite (éventuellement vide) de quantificateurs suivie d'une formule sans quantificateurs.

Example

$(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists y)P(y)$ *n'est pas en forme prénexe, tandis que* $(\exists y\ x)(P(x) \Rightarrow P(y))$ *est en forme prénexe.*

Formules en forme prénexe

Théorème

Pour chaque φ *il existe une formule prénexe* ψ *telle que* $\models_K \varphi \Leftrightarrow \psi$.

Les structures

La syntaxe

La sémantique

Quelques propriétés

La déduction naturelle

L'approche à la Hilbert

Les règles

On ajoute à la logique propositionelle les règles

$$\frac{\Gamma \vdash_K \varphi(x)}{\Gamma \vdash_K \forall x \varphi(x)} \; \forall I \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash_K \forall x \varphi(x)}{\Gamma \vdash_K \varphi(t)} \; \forall E$$

Complétude

Théorème
$\Gamma \models_K \varphi$ *implique* $\Gamma \vdash_K \varphi$.

Complétude

Théorème

$\Gamma \models_K \varphi$ *implique* $\Gamma \vdash_K \varphi$.

Autrement dit, la logique classique est complète pour les modèles à base de structures tel que nous venons de les présenter.

Complétude

Théorème

$\Gamma \models_K \varphi$ *implique* $\Gamma \vdash_K \varphi$.

Autrement dit, la logique classique est complète pour les modèles à base de structures tel que nous venons de les présenter.

Idée de la preuve.

On suppose $\Gamma \nvdash_K \varphi$ et on construit une structure où pour tout ψ dans Γ, on a $\mathfrak{A} \models_K \psi$ et $\mathfrak{A} \not\models_K \varphi$.

Les structures

La syntaxe

La sémantique

Quelques propriétés

La déduction naturelle

L'approche à la Hilbert

Les axiomes et les règles

On a deux axiomes

Axiome

$$\frac{}{\vdash \forall x \; \varphi(x) \Rightarrow \varphi(t)} \; \forall_1$$

Axiome

$$\frac{}{\vdash (\forall x \; (\varphi \Rightarrow \psi(x))) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \forall x \; \psi(x)} \; \forall_2 \qquad x \notin FV(\varphi)$$

Les axiomes et les règles

On a deux axiomes

Axiome

$$\frac{}{\vdash \forall x\ \varphi(x) \Rightarrow \varphi(t)}\ \forall_1$$

Axiome

$$\frac{}{\vdash (\forall x\ (\varphi \Rightarrow \psi(x))) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \forall x\ \psi(x)}\ \forall_2 \quad x \notin FV(\varphi)$$

et une règle

$$\frac{\vdash \varphi(x)}{\vdash \forall x\ \varphi(x)}\ \forall I$$