Les séquents

Pierre Lescanne

10 octobre 2005 – 12 : 38

Rétablir la symétrie rompue

Dans la déduction naturelle classique, la symétrie introduction-élimination est rompue par la règle de réduction à l'absurde.
Le but du calcul des séquents est de rétablir cette symétrie.

Les séquents

Dans le calcul des séquents, les jugements sont de la forme :

$$\Gamma \vdash \Delta.$$

où Γ et Δ sont des multi-ensembles de propositions.

Les séquents

Dans le calcul des séquents, les jugements sont de la forme :

$$\Gamma \vdash \Delta.$$

où Γ et Δ sont des multi-ensembles de propositions.

Γ est l'antécédent et Δ est le succédent.

Les séquents

Dans le calcul des séquents, les jugements sont de la forme :

$$\Gamma \vdash \Delta.$$

où Γ et Δ sont des multi-ensembles de propositions.

Γ est l'antécédent et Δ est le succédent.

Le cas intuitionniste est le cas particulier où Δ est constitué d'une et une seule proposition.

Les séquents

Dans le calcul des séquents, les jugements sont de la forme :

$$\Gamma \vdash \Delta.$$

où Γ et Δ sont des multi-ensembles de propositions.

Γ est l'antécédent et Δ est le succédent.

Le cas intuitionniste est le cas particulier où Δ est constitué d'une et une seule proposition.

Le séquent $\{\varphi_1, ...\varphi_m\} \vdash \{\psi_1, ..., \psi_n\}$ s'intepréte en

$$\varphi_1 \wedge ...\wedge, \varphi_m \Rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_n$$

Les règles

Les règles du calcul des séquents respectent une symétrie gauche/droite.
Il y a

- les règles structurelles,
- les règles logiques,
  il n'y a que des règles d'introduction,
- l'axiome,
- la règle de coupure.

L'axiome

Axiome

$$\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$$

Les règles structurelles

L'affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}$$

La contraction

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}$$

Les règles logiques (conjonction)

L'introduction d'une conjonction à gauche

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}$$

L'introduction d'une conjonction à droite

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

Les règles logiques (disjonction)

L'introduction d'une disjonction à gauche

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}$$

L'introduction d'une disjonction à droite

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}$$

Les règles logiques (implication)

L'introduction d'une implication à gauche

$$\frac{\Gamma, \psi \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \Delta}$$

L'introduction d'une implication à droite

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \Rightarrow \psi}$$

Les règles logiques (négation)

L'introduction d'une négation à gauche

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}$$

L'introduction d'une négation à droite

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}$$

La preuve de la formule de Pierce

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi \qquad \dfrac{\varphi \vdash \psi, \varphi}{\vdash \varphi \Rightarrow \psi, \varphi}\ \text{introduction de } \Rightarrow \text{ à droite}}{(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \vdash \varphi, \varphi}\ \text{introduction de } \Rightarrow \text{ à gauche}}{(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \vdash \varphi}\ \text{contraction à droite}}{\vdash ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi}\ \text{introduction de } \Rightarrow \text{ à droite}$$

Le calcul des séquents sans coupure

La calcul qui ne contient que les règles précédentes :

axiomes, règles structurelles, règles logiques,

s'appelle le calcul des séquents sans coupure.

Proposition

Le calcul des séquents sans coupure satisfait la propriété de la sous-formule, à savoir que les formules figurant dans la preuve d'un séquent sont des sous-formules de ce séquent.

La règle de coupure

La coupure

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma', \varphi \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

En fait c'est l'utilisation d'un lemme dans une démonstration qui permet de faire une démonstration plus courte et plus «intelligente».

L'élimination des coupures

La règle de coupure n'augmente pas la puissance du calcul des séquents.

Gentzen a démontré le théorème d'élimination des coupures. Si une démonstration comporte des coupures, on peut la transformer en une démonstration équivalente qui ne comporte pas de coupures.

La démonstration du théorème d'élimination des coupures utilise la symétrie du calcul des séquents.

L'élimination des coupures

Ce théorème ne se généralise pas aux théories où l'on accepterait d'autres axiomes.
Dans ce cas, l'utilisation de coupure permet des démonstrations plus puissantes.