S. Le Roux et V.Nesme Le 13 octobre 2004

Logique – TD n°0
Déduction naturelle

Exercice 1 : ***Logique minimale***

Finir le TD précédent…

Rappels de cours : ***Déduction naturelle***

Les formules de déduction naturelle (en abrégé, DN) sont construites avec le connecteur nullaire $\bot$ et les connecteurs binaires $\to$, $\vee$, $\wedge$. Ses jugements sont de la forme $\Gamma \vdash \varphi$, où φ est une formule et Γ, appelé l'*antécédent*, un ensemble de formules.
Il n'y a en déduction naturelle qu'un axiome : $\dfrac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha}$ (hyp)

et, pour chaque connecteur, il y a des règles d'introduction et d'élimination :

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \alpha}\ (e.f.q.s.) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha{\to}\beta}\ (\to\text{-I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha{\to}\beta \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta}\ (\to\text{-E})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha{\wedge}\beta}\ (\wedge\text{-I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha{\wedge}\beta}{\Gamma \vdash \alpha}\ (\wedge\text{-E-1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha{\wedge}\beta}{\Gamma \vdash \beta}\ (\wedge\text{-E-2})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha{\vee}\beta \quad \Gamma, \alpha \vdash \gamma \quad \Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma}\ (\vee\text{-E}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha{\vee}\beta}\ (\vee\text{-I-1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha{\vee}\beta}\ (\vee\text{-I-2})$$

Exercice 2 : ***La déduction naturelle, c'est plus facile que Hilbert***

Montrer en déduction naturelle les assertions suivantes :
- I : $\vdash \alpha{\to}\alpha$
- K : $\vdash \alpha{\to}\beta{\to}\alpha$
- S : $\vdash (\alpha{\to}\beta{\to}\gamma){\to}(\alpha{\to}\beta){\to}\alpha{\to}\gamma$
- B : $\vdash (\beta{\to}\gamma){\to}(\alpha{\to}\beta){\to}\alpha{\to}\gamma$
- $\vdash (\alpha{\to}\beta{\to}\gamma{\to}\delta){\to}(\beta{\to}\alpha){\to}(\beta{\to}\gamma){\to}\beta{\to}\delta$
- $\vdash \alpha \vee \beta{\to}\beta \vee \alpha$
- $\vdash (\alpha{\to}\beta){\to}(\alpha \vee \gamma){\to}(\beta \vee \gamma)$
- $\vdash \alpha \vee (\beta{\wedge}\gamma){\to}(\alpha \vee \beta){\wedge}(\alpha \vee \gamma)$

Exercice 3 : ***Affaiblissement***

Montrer que la règle suivante, dite d'*affaiblissement*, est correcte en déduction naturelle :

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi}\ (\text{aff.})$$

Exercice 4 : ***Quelques démonstrations en déduction naturelle***

- $\vdash p{\wedge}(q{\wedge}r){\to}(p{\wedge}q){\wedge}r$
- $\vdash p \vee (q{\wedge}r){\to}(p \vee q){\wedge}(p \vee r)$
- $\vdash (p \vee \neg p){\to}(((p{\to}q){\to}p){\to}p)$
- $\vdash (p{\to}q){\to}(\neg q{\to}\neg p)$
- Montrer que la règle suivante est correcte en DN : $\dfrac{\Gamma \vdash \neg q \quad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p}$

Rappels de cours : ***Logique classique***

On ajoute à la déduction naturelle la règle de *reductio ad absurdum* :

$$\frac{\Gamma, \neg\alpha \vdash \bot}{\Gamma \vdash \alpha}\ (\textit{r.a.a.})$$

Exercice 5 : ***Déduction naturelle classique***

Montrer en déduction naturelle les assertions suivantes :

$$\vdash \neg\neg p \rightarrow p$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash p}\ \bot\,\mathrm{E}$$

$$\frac{\Gamma, \neg p \vdash p}{\Gamma \vdash p}$$

$$\vdash p \vee \neg p$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg q \rightarrow \neg p}{\Gamma \vdash p \rightarrow q}\ \text{contrap}$$

$$\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$$

$$\frac{\Gamma, \neg p \vee \neg q \vdash r}{\Gamma, \neg(p \wedge q) \vdash r}$$

$$\frac{\Gamma, \neg p, \neg q \vdash r}{\Gamma, \neg(p \vee q) \vdash r}$$

$$\frac{\Gamma, p, \neg q \vdash r}{\Gamma, \neg(p \rightarrow q) \vdash r}$$